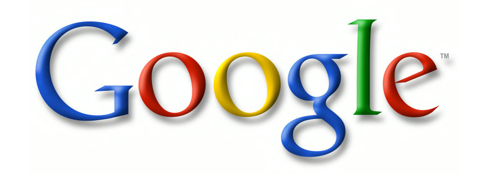





1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE



# PHYSIKALISCHE MINERALOGIE.

# LEHRBUCH

DER

# PHYSIKALISCHEN MINERALOGIE

VON


Dr. ALBRECHT SCHRAUF.

DOCENTEN FÜR PHYSIKALISCHE MINERALOGIE AN DER WIENER UNIVERSITÄT, CUSTOS-ADJUNCTEN AM K. K. HOF-MINERALIEN-CABINETE, MITGLIED MEHRERER GELEHRTEN GESELLSCHAFTEN.


## I. BAND.

LEHRBUCH DER KRYSTALLOGRAPHIE UND MINERAL-MORPHOLOGIE.


WIEN, 1866.

WILHELM BRAUMÜLLER

K. K. HOF- UND UNIVERSITÄTSBUCHHÄNDLER.

# LEHRBUCH

DER

# KRYSTALLOGRAPHIE

UND

# MINERAL-MORPHOLOGIE.

## HANDBUCH

ZUM STUDIUM DER THEORETISCHEN CHEMIE, MINERALOGIE
UND KRYSTALLOPHYSIK.

VON

Dr. ALBRECHT SCHRAUF
DOCENTEN FÜR PHYSIKALISCHE MINERALOGIE AN DER WIENER UNIVERSITÄT, CUSTOS-ADJUNCTEN AM K. K.
HOF-MINERALIEN-CABINETE, MITGLIED MEHRERER GELEHRTEN GESELLSCHAFTEN.

MIT 100 DEM TEXTE EINGEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

WIEN, 1866.
WILHELM BRAUMÜLLER
K. K. HOF- UND UNIVERSITÄTSBUCHHÄNDLER.



HERRN PROFESSOR

# ANTON SCHRÖTTER

GENERALSECRETÄR DER K. K. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

DEM FORDERER KRYSTALLOGRAPHISCHER BESTREBUNGEN

GEWIDMET

VOM VERFASSER.

# PHYSIKALISCHE MINERALOGIE.

# LEHRBUCH

DER

# PHYSIKALISCHEN MINERALOGIE

VON

Dr. ALBRECHT SCHRAUF.

DOCENTEN FÜR PHYSIKALISCHE MINERALOGIE AN DER WIENER UNIVERSITÄT, CUSTOS-ADJUNCTEN AM K. K. HOF-MINERALIEN-CABINETE, MITGLIED MEHRERER GELEHRTEN GESELLSCHAFTEN.

I. BAND.

LEHRBUCH DER KRYSTALLOGRAPHIE UND MINERAL-MORPHOLOGIE.

WIEN, 1866.

WILHELM BRAUMÜLLER

K. K. HOF- UND UNIVERSITÄTSBUCHHÄNDLER.

# LEHRBUCH

DER

# KRYSTALLOGRAPHIE

UND

# MINERAL-MORPHOLOGIE.

HANDBUCH

ZUM STUDIUM DER THEORETISCHEN CHEMIE, MINERALOGIE UND KRYSTALLOPHYSIK.

VON

Dr. ALBRECHT SCHRAUF

DOCENTEN FÜR PHYSIKALISCHE MINERALOGIE AN DER WIENER UNIVERSITÄT, CUSTOS-ADJUNCTEN AM K. K. HOF-MINERALIEN-CABINETE, MITGLIED MEHRERER GELEHRTEN GESELLSCHAFTEN.

MIT 100 DEM TEXTE EINGEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

WIEN, 1866.

WILHELM BRAUMÜLLER

K. K. HOF- UND UNIVERSITÄTSBUCHHÄNDLER.

HERRN PROFESSOR

# ANTON SCHRÖTTER

GENERALSECRETÄR DER K. K. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

DEM FORDERER KRYSTALLOGRAPHISCHER BESTREBUNGEN

GEWIDMET

VOM VERFASSER.

# VORWORT.

„Seitdem die Naturforschung sich von den willkürlichen und unklaren Sätzen losgewunden und zu einer strengen Wissenschaft, welche die geprüften Gesetze der Erscheinung umfasst, ausgebildet hat, waren die ausgezeichnetsten Geister bemüht, das Eigenthümliche in der regelmässigen Bildung der unbelebten Körper an den Tag zu fördern. Sie urtheilten einstimmig, dass, wenn der Bau und der Zusammenhang, die Entstehung und die Umwandlung der wundervollen Krystalle allseitig und erschöpfend ergründet wären, über die wichtigsten Fragen der Physik und Chemie, sowie die ganze Naturgeschichte ein neues Licht sich verbreiten würde. Denn in jenen Gebilden scheinen die gestaltenden Kräfte der Erde sich am unmittelbarsten kundzugeben und wie ausruhend von ihrem ersten Schöpfungstage unter der starren Hülle nur leise zu schlummern.“

Diese beredten Zeilen, welche Marx 1825 in der Vorrede zur Geschichte der Krystallkunde schrieb, haben ihre volle Geltung bis zur Gegenwart behalten. Durch die Erforschung der wechselnden Erscheinungen an der gesetzmässigsten Form — dem Krystalle — die Gesetze der Materie abzuleiten, ist das Endziel der Krystallophysik des heutigen Tages.

Ueberblicken wir mit prüfendem Auge die bisherigen Resultate, Früchte der Erkenntniss gewonnen von den ausgezeichnetsten Gelehrten, so finden wir bereits vieles erreicht, doch ungleich mehr angestrebt und in der Vollendung begriffen.

Die Erweiterung dieser Kenntnisse hatte den grössten Einfluss auf die Lehren der Mineralogie. Die zahlreichen Abhandlungen, welche die Untersuchung der morphologischen und physikalischen Verhältnisse einzelner Mineralspecies zum Gegenstande haben, sprechen für den Eifer der Erforschung dieses Zweiges der Natur-

kunde und haben bereits die physikalische Mineralogie zur selbstständigen Doktrin erweitert.

Wohl schenken die ausgezeichneten Werke über Krystallographie oder Mineralogie den physikalischen Verhältnissen einige Beachtung, doch fühlte ich bei meinen Vorlesungen nur allzusehr den Mangel eines vollständigen, dem Standpunkte der heutigen Mineralphysik entsprechenden Werkes, als dass ich nicht versucht hätte, diese Lücke, wenn auch nur unvollkommen auszufüllen.

Vorliegendes Lehrbuch soll die Theorien und Resultate der Beobachtungen darstellen und so vereint mit dem Atlas der Krystallformen das gesammte Gebiet umfassen. Dass es möglich war, die zur Richtigstellung und Erweiterung der Kenntnisse nöthigen Beobachtungen in weiterer Ausdehnung durchführen zu können, verdanke ich der mir allseits bewiesenen Liberalität, namentlich aber dem hochgeehrten Herrn Director des k. k. Hof-Mineralien-Cabinetes, Dr. M. Hörnes, welcher mir die reichen Hülfsmittel des genannten Cabinetes bereitwilligst zur Verfügung stellte, wofür ich meinen innigsten Dank ausspreche. Schliesslich der k. k. Hof- und Universitätsbuchhandlung W. Braumüller für die treffliche Ausstattung des Werkes meinen wärmsten Dank.

Wien, den 1. August 1865.

**Dr. A. Schrauf.**

# EINLEITUNG.

Sowohl nach den Methoden der Betrachtung und Erforschung, als auch nach der Verschiedenheit der Körper zerfällt die Naturkunde in mehrere Theile oder Doktrinen, deren Unterscheidung schwierig und selbst von verschiedenen Naturforschern verschieden dargestellt wird.

Die allgemeinen Eigenschaften und die gegenseitigen Einwirkungen der Körper, je nachdem sie temporäre oder dauernde Veränderungen des Molecularzustandes bewirken, sind Gegenstand der Physik oder Chemie. Der hingegen für die Charakterisirung und Beschreibung der einzelnen Körper bestimmte Theil der Naturwissenschaft wird Naturgeschichte genannt, und jener Theil der Naturgeschichte, welcher die leblose und homogene Materie, wie sie in der Natur vorkommt, zum Gegenstande seiner Untersuchungen hat, heisst Mineralogie.

Unter Mineralien verstehen wir daher natürliche, aus gleichartigen Theilen bestehende, unorganische Körper, die einen Theil des festen Erdkörpers ausmachen und in und unter der Oberfläche derselben gefunden werden.

Da die Mineralogie die Mineralien durch ihre Kennzeichen erkennen und unterscheiden lehrt, so müssen letztere zum Gegenstande specieller Untersuchungen gemacht werden. Diese können aber, insofern sie die Gestalt, Eigenschaften oder Stoffverhältnisse der Körper betreffen, als krystallograpisch, physikalisch oder chemisch bezeichnet werden.

Die physikalischen Eigenschaften sind aber mit jenen der Gestalt in so innigem, untrennbaren Connex, dass man bereits lange gewohnt ist, die Krystallographie als einen Theil der Physik, und somit Physik und Chemie als die zwei Hülfswissenschaften der Mineralogie zu betrachten,

Und wahrlich, der Einfluss dieser beiden Hülfswissenschaften ist von solcher Wichtigkeit, dass sie den Anstoss zu besonderen Richtungen der mineralogischen Disciplin gegeben haben.

Als Gründer der physikalischen Mineralogie im weitesten Sinne des Wortes kann Romé de Lisle betrachtet werden, welcher zuerst die morphologischen Verhältnisse würdigte — den gewaltigsten Aufschwung nahm dieselbe aber durch Haüy und Weiss, auf deren krystallographische Untersuchungen gestützt eine Reihe genialer Naturforscher das Gebiet der physikalischen Mineralogie nach allen Richtungen hin erweiterten und auf den Stand der heutigen Kenntniss brachten.

Die physikalische Mineralogie umfasst zwei grosse theoretische Abtheilungen, die Mineralmorphologie und die specielle Mineralphysik. Die Morphologie lehrt die räumlichen Verhältnisse der Gestalt und die Abhängigkeit derselben von den Eigenschaften der Materie erkennen und diese gewonnene Erkenntniss zur Charakterisirung der Species zu verwerthen. Sie verlangt zu ihrem Verständniss die Geometrie als Hülfswissenschaft. Die specielle Mineralphysik untersucht die Verhältnisse von Elasticität, Magnetismus, Optik u. s. w., insofern sie gesetzliche Folge der krystallinischen Structur sind, und lehrt deren Benützung auf dem Gebiete der Mineralogie.

Diesen theoretischen Disciplinen entsprechen die gleichnamigen Theile vorliegenden Lehrbuches; die Resultate der Anwendung der gesammten Lehrsätze auf die einzelnen Mineralien sind in einem dritten Theile — der Physiographie der Mineralspecies — zusammengestellt und hiedurch das gesammte Gebiet der physikalischen Mineralogie zum Abschluss gebracht.

# I. Abtheilung.

## Allgemeine Morphologie.

# I. Kapitel.

## Von den Krystallgestalten.

§. 1. Während im Pflanzen- und Thierreiche den einzelnen Individuen je nach der Gattung, der sie angehören, bestimmte Formen und Regelmässigkeit des Baues eigen ist, scheint das Gebiet der unorganischen Welt auf den ersten Anblick ohne solche eigenthümliche, die einzelnen Arten in Individuen charakterisirende Gestalten; jede genauere Untersuchung aber lehrt, dass auch diesen, wenn sie nicht schon während des Bildungsprozesses in ihrer vollständigen Entwicklung gehemmt, oder später durch chemische und mechanische Zerstörung umgewandelt wurden, bestimmte, die einzelnen Individuen charakterisirende Formen zukommen. Die Erfahrungen der Chemie geben noch weitere Aufschlüsse, denn der Chemiker verschafft den anorganischen Verbindungen eine künstliche Freiheit der Bildung, eine Freiheit, welche die Natur nicht immer darbieten kann, und hiedurch wird es ermöglicht, dass die meisten Stoffe als Individuen entstehen, welche eine bestimmte, eigenthümliche Gestalt haben.

Die Gestalten der unorganischen Welt unterscheiden sich aber von den Individuen der organischen im Wesentlichen dadurch, dass während die Umgrenzungen dieser nur durch krumme Flächen gebildet werden, bei jenen Ebenen die Begrenzungen bilden. Auch das Innere der organischen Individuen ist mit dem herrschenden Charakter der Rundung aller einzelnen Theile konstruirt, während bei den anorganischen das Innere analog dem Aeusseren nach Ebenen gebildet ist. Da die Ebene ein spezieller Fall aus der grossen Anzahl von gekrümmten Flächen, so ist hiedurch zugleich die Bedingung angedeutet, welche bei der Bildung der unorganischen Naturprodukte erfüllt werden muss. Im Gegensatze zu den organischen Gebilden, welche unbedingte Freiheit in der Wahl der ge-

krümmten Flächen und daher die grösste Mannigfaltigkeit in der Entwicklung besitzen, müssen die unorganischen beschränkt auf die Ebene die grösste Einfachheit und Regelmässigkeit zeigen. Allein nicht bloss das Aeussere, sondern auch das Innere muss diesen Gesetzen der Regelmässigkeit unterliegen. An die Stelle der Mannigfaltigkeit in der Entwicklung, welche den einzelnen Theilen und Organen der Thier- und Pflanzenwelt eigen ist, muss daher hier die grösste Gleichheit und Einfachheit treten.

Ein Individuum der unorganischen Natur kann daher betrachtet werden als ein Ganzes einzelner Theile, welche dieselbe Form und Gestalt besitzen wie das Ganze, während hingegen das Individuum der organischen Natur ein Ganzes seiner verschieden gestalteten Theile ist.

Es lässt sich nun die Frage aufwerfen, ob diese erwähnten unorganischen Gestalten, dieser Complex von gleichen, gleich gebildeten Partikeln als ein selbstständiges, in sich abgeschlossenes Wesen — als ein Individuum — betrachtet werden darf. Die Individualität wird aber am sichersten erkannt aus dem Zusammenhange, welcher zwischen den morphologischen und physikalischen Eigenschaften stattfindet. Da eine gesetzmässige räumliche Individualisirung die erste Bedingung zur Anerkennung des Individuums überhaupt ist, so muss die Form des anorganischen Individuums nicht nur eine stabile und selbstständige, sondern auch eine gesetzmässig regelmässige sein. In der That existirt eine ringsum abgeschlossene, mehr oder weniger regelmässige, polyedrische Gestaltung bei denselben. Man hat diese regelmässig gestalteten Körper Krystalle genannt. Die Krystalle sind aber — denn nicht nur ihre Form specialisirt sie, sondern jede genauere Untersuchung lehrt, dass die Form derselben mit den meisten ihrer physikalischen Eigenschaften und namentlich mit ihrer Elastizität, mit den Cohärenzverhältnissen und mit ihren optischen Eigenschaften in dem genauesten, mathematisch nachweisbaren Zusammenhange steht — als Individuen zu betrachten, jedoch nicht als Individuen im Sinne der organischen Natur, da sie nie mehr sind, als individualisirte Complexe von analogen, dem Ganzen gleichenden Theilen.

Durch diese Betrachtungen gelangt man schliesslich zu folgender Definition des Krystalls[1]).

Krystall ist jeder starre, unorganische Körper, welcher eine wesentliche und ursprüngliche, mehr oder weniger regelmässige polyedrische Form besitzt, die von ebenen Flächen begrenzt ist und die Tendenz hat, sich in der Richtung gewisser Ebenen leichter theilen zu lassen, welche Ebenen zu irgend einer der möglichen Grenzflächen parallel sind.

---

[1]) Naumann Mineralogie 1859 p. 3. Brooke and Miller Mineralogy 1852 pag. 4.

§. 2. Eine nothwendige Folge dieser Definition ist, dass jede bestimmte Substanz nur eine genau bestimmte Krystallgestalt hat, und dass die Krystalle einer und derselben Substanz gleichförmig sind. Sieht man von den später zu erörternden Fällen ab, dass zwei oder mehrere Substanzen ähnliche Krystallgestalten oder andererseits eine chemische Substanz mehrere Krystallformen besitzen kann, vernachlässigt man also die wenigen Fälle des Allomorphismus und Homöomorphismus, so lehrt jede genauere Untersuchung, dass die Krystalle einer und derselben Substanz sich sämmtlich auf dieselbe Grundform zurückführen lassen, obwohl sie nicht immer gleich gestaltet sind, sondern vielmehr die mannigfaltigsten Formen der Ausbildung besitzen, denn es ist eines der Hauptgesetze der Krystallbildung, dass nicht die Grösse, sondern nur die Lage der Flächen als constant zu betrachten ist.

Da ferner mit der obigen Definition des Wortes Krystall folgt, dass die Bildung desselben mathematischen Gesetzen unterworfen ist, so muss sich auch jede Gestalt ganz genau bestimmen und mit den übrigen in geometrischen Connex bringen lassen. Zur Vereinfachung hat man nun schon im Voraus alle möglichen Fälle postulirt und so wichtige Kennzeichen gefunden, dass eine Trennung in einige Systeme und Unterabtheilungen möglich ist.

Aus den einfachsten Grundsätzen der analytischen Geometrie folgt, dass es möglich ist, jede Ebene ihrer Lage nach durch eine Gleichung mit drei Coordinaten von der Form

$$ax + by + cz = D$$

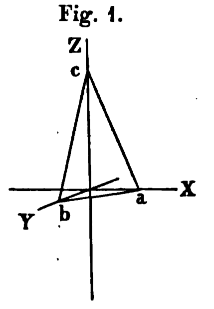
zu bestimmen.

Jede Fläche kann durch eine analoge Gleichung definirt und aus der Formel die Lage abgeleitet werden. Wollte man aus der Formel

$$\frac{1}{\mathrm{a}} x + \frac{1}{\mathrm{b}} y + \frac{1}{\mathrm{c}} z = 1$$

wirklich die Form der angedeuteten Fläche ermitteln, so wären die Coëfficienten a, b, c, auch Parameter genannt, als relative Verhältnisszahlen, bezogen auf eine willkürliche Längeneinheit, zu betrachten, von dem Mittelpunkte des Axensystems $O$ auf die Axe $X$ die Länge a, auf $Y$ die Länge b, auf $Z$ die Länge c aufzutragen, und die hiedurch entstandenen Punkte a, b, c zu verbinden; die hiedurch angedeutete Fläche (Fig. 1) entspricht der obigen Gleichung.

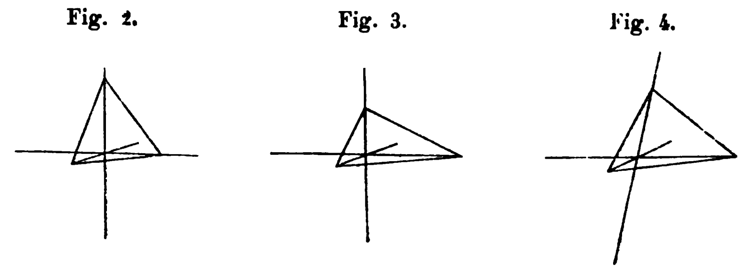
Fig. 1.




Durch das Variiren der Grössen $a$, $b$, $c$ und das der Axenaufstellung selbst wird es möglich, verschieden liegende Flächen symbolisch

darzustellen; so deutet Fig. 2 die Fläche an, welche entsteht durch die

Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4.



Construction der Gleichung $ax + ay + az = D$. Fig. 3 entspricht der Gleichung $ax + by + cz = D$; Fig. 4 hingegen die Bedingung $ax' + by' + cz' = D$, wobei $x'$ $y'$ $z'$ gegen $x$ $y$ $z$ vollständig geänderte Lage einnehmen und im Gegensatze zu ersterem nicht mehr rechtwinklig zu einander geneigt sind.

Hiebei ist nur zu bemerken, dass alle Flächen, in deren Formel Multipla von $abc$ vorkommen, also $hax + khy + lcz = D$ als abgeleitete betrachtet werden von jener, welche $abc$ nur in der Einheit enthält; letztere wird die Grundform oder Grundgestalt der ersteren genannt.

Aus der Betrachtung der obigen Figuren folgt nun unmittelbar, dass gewisse Bedingungen für die Flächengleichungen schon im Voraus bestimmbar sind, welche sich entweder auf die Grösse der Parameter oder andererseits auf die Lage der Coordinatenaxen beziehen, und dass hiedurch die Grundgestalten der Mineralien sich in Abtheilungen sondern lassen, deren jede gewissen Bedingungen unterworfen ist.

Die erste Bedingung bezieht sich auf die Lage der Coördinatenebene oder, was hiermit gleichbedeutend ist, auf die Winkel der Coordinatenaxen miteinander; den zweiten Eintheilungsgrund bildet das wechselnde Verhältniss der Parameter der Grundgestalt; durch Anwendung beider ergeben sich 7 Krystallsysteme.

*A)* Orthogonale Krystallsysteme $XY = YZ = XZ = 90^0$.

1. $a : b : c = A : 1 : C$ prismatisch
2. $a : b : c = \sqrt{3} : 1 : C$ orthohexagonal
3. $a : b : c = 1 : 1 : C$ pyramidal
4. $a : b : c = 1 : 1 : 1$ tesseral.

*B)* Monoclinisches Krystallsystem $XY = XZ = 90^0$ $YZ \gtrless 90^0$.

5. $a : b : c = A : 1 : C$.

*C)* Diclinisches Krystallsystem $XY = 90^0$ $YZ \gtrless XZ \gtrless 90^0$.

6. $a : b : c = A : 1 : C$.

*D)* Triclinisches Krystallsystem $XY \gtreqless YZ \gtreqless XZ \gtreqless 90^0$.

7. $a : b : c = A : 1 : C$.

§. 3. Alle bisher gemachten Untersuchungen haben bewiesen, dass diese Systeme die in der Natur vorkommenden Krystallformen zu umfassen genügen, sowie auch andererseits, dass jede Substanz einem Axenverhältnisse angehört, welches letztere für jeden bestimmten Stoff einen speciellen Werth annimmt, und hiedurch die Lage der Grundgestalt im Raum fixirt.

Wie schon erwähnt, sind alle übrigen Flächen eines Krystalls mittelst einfacher Coëfficienten der Parameter — Indices genannt — von der Grundgestalt ableitbar; mit dem Erkennen des Systems ist somit der Gesammthabitus des Krystalls definirt.

Die hier erwähnten Indices werden aber nicht bloss gebraucht zur Bezeichnung der Ableitungsgleichung, sondern dienen auch abgekürzt — da in der Gleichung

$$hax + kby + lcz = D$$

*abc*, *xyz* vernachlässigt wird, zur Bezeichnung der Fläche selbst.

Während also die Grundpyramide (Fig. 5) entsteht durch Verbindung der Endpunkte der Parameter, und daher das Symbol 111 — $h = 1$, $k = 1$, $l = 1$ — erhält, entsteht andererseits eine Säule oder ein Würfel (Fig. 6) mit den Indices 100, 010, 001 dadurch, dass parallel je zwei Axen einer Fläche durch die dritte Axe gelegt wird.

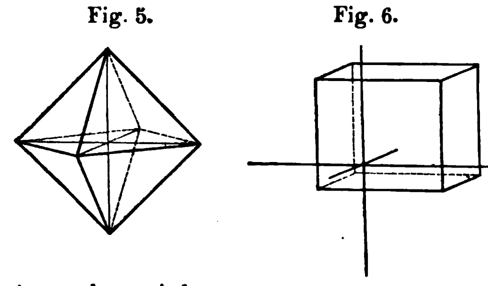


Fig. 5. Fig. 6.

Bedenkt man ferner, dass ein negativer Werth der Indices nach dem Gebrauche der Analysis die negativen Coordinatenaxen bezeichnet, so wird durch diese abgekürzte Bezeichnungsmethode der jedesmalige Ort der Flächen absolut bestimmt und zugleich angegeben, wie viel Lagen die durch dieselbe bezeichneten Fläche im Raume möglich ist. Beispielsweise wird der Fläche *hoo* die Fläche $\bar{h}oo$ [1]) (vide Fig. 6) parallel sein und ihre Gegenfläche bilden und der Complex der beiden Flächen *hoo*, $\bar{h}oo$ wird das Pinakoid (*hoo*) genannt. Ebenso folgt für die Form (*hko*) — Doma oder Prisma — dass demselben die möglichen 4 Fälle, *hko*, $\bar{h}ko$, *hko*, $\bar{h}\bar{k}o$, entsprechen; analog hat die Pyramide (*hkl*) 8 Flächen in ihrer vollständigen Entwicklung.

---

[1]) Das Minuszeichen wird statt vor über der betreffenden Ziffer gesetzt.

Tritt bei einem Krystalle die volle Anzahl der möglichen Flächen einer Form auf, so besitzt derselbe eine holoedrische Ausbildung, welche auch, da man von den möglicherweise eintretenden unregelmässigen Störungen absehen muss, die häufigste ist. Allein es kommen auch einzelne Fälle vor, wo einem bestimmten Mineral immer die Hälfte oder drei Viertheile der Flächen fehlen, welche die Form bedingt. Solche Fälle, wenn sie gesetzmässig begründet sind, gehören in das Bereich der Hemiedrie oder Tetartoedrie. Für erstere ist der Rhomboeder (Fig. 7), als Hälfte die sechsseitige Pyramide (Fig. 8) hinreichendes Beispiel. Ist ferner diese eingetretene Hemiedrie von einer Verschiedenheit in den physikalischen Eigenschaften begleitet, so zwar, dass jedes Ende des Krystalls nicht bloss andere Ausbildung, sondern auch entgegengesetzte physikalische Eigenschaften zeigt, so wird dieser Entwicklungszustand der Substanz Hemimorphismus genannt; ein charakterisirendes Beispiel hievon liefert Kieselzinkerz (Fig. 9), auch desshalb von den Mineralogen Hemimorphit genannt. Ausser diesen oben betrachteten Ausnahmsfällen tritt noch in der Natur eine Verwachsung mehrerer Individuen auf. Ist diese Verwachsung unregelmässig, so sind die entstehenden Gruppen wohl keiner näheren Untersuchung zu unterwerfen; im Gegensatze hiezu ist eine regelmässige Gruppirung zweier oder dreier Individuen zu Zwillingen oder Drillingen von grosser Wichtigkeit und geometrisch zu prüfen.

Fig. 7.

Fig. 8.

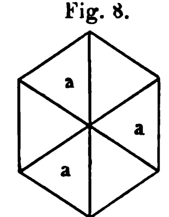
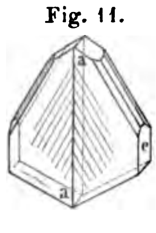



Fig. 9.

Das Gesetz, welches die Zwillingsbildung beherrscht, ist, dass nur jene Individuen verwachsen können, welche durch eine Drehung von 180⁰ aus ihrer parallelen Lage gebracht sind, wobei die Drehungsaxe immer auf einer wirklichen oder möglichen Krystallfläche senkrecht sein muss. Als Beispiel gelte hiefür der Columbit, Fig. 10 stellt einen einfachen Krystall vor, Fig. 11 den Zwilling, der aus zwei vollständig gleichen Hälften entstanden ist, die Linie *aa* zeigt die Drehungsaxe, und die Zwillingsfläche *ee* ist parallel der Fläche *e*.

Fig. 10.

Fig. 11.



§. 4. Mit diesen angeführten Formen und deren Abweichungen ist wohl die allgemeine Frage nach dem Wesen der Krystallgestalten erschöpft, jedes weitere Detail führt Schritt für Schritt in die geometrischen Betrachtungsweisen, welche hier ausgeschlossen sind.

Um alle Körper von den Axen abzuleiten, wird die axinometrische Methode von Weiss zu Grunde gelegt. Doch musste im vorliegenden Werke für das orthohexagonale System von den bisher gewohnten Pfaden der verschiedenen Schulen vollständig abgewichen werden, um eine gesetzmässige Reihe continuirlicher, immer weniger symmetrisch sich gestaltender Grundformen zu erzeugen.

Während die axinometrischen Methoden in Deutschland, England und Amerika sich Bahn gebrochen und Alleinherrschaft errungen haben, so huldigt doch Frankreich nicht ihr, sondern der Schule Haüy's, nämlich der Theorie, durch Aufeinanderschichten von den Grundgestalten alle secundären Formen zu erzeugen.

Wenig Uebereinstimmung herrscht unter den Krystallographen, vielfäche Schulen sind, deren jede auf einem anderen Wege das Ziel zu erreichen sucht. Symbole der Bezeichnung sind aufgetaucht und wieder verschwunden, Methoden, Namen, Rechnungen, alles wechselte, ohne dass bis jetzt eine absolute Einheit erreicht worden wäre.

Während die specielle Krystallophysik als der Sprössling des laufenden Jahrhunderts von all den Ideen der Neuzeit getragen wird, hat die Krystallographie als ein Ueberkommniss vergangener Zeiten nicht nur eine Geschichte der Entwicklung ihrer Grundsätze, sondern auch eine Geschichte ihrer allmälig wachsenden Wichtigkeit und ihrer Vereinigung mit den wahren Fortschritten, Ideen und Zwecken der Mineralogie und Physik des heutigen Tages.

Das folgende Kapitel soll einen kurzen Abriss der Entwicklung und der Ansichten der verschiedenen krystallographischen Schulen geben, so weit diess zur Erkenntniss der oftmals so verschiedenen Anschauungsweisen nöthig ist.

# II. Kapitel.

## Entwicklung der krystallographischen Anschauungsweisen.

§. 5. Vielfache Messungen und krystallographische Bestimmungen waren nöthig, um die Richtigkeit des Satzes: „jede Substanz besitzt ihre eigenthümliche Krystallgestalt“ über alle Zweifel zu erheben; denn diese Identität liegt nicht immer ganz offen zu Tage, oft geringe Beimengungen der chemischen Verbindung, oft die gestörte Ausbildung verschleiern sie, und selbst bei der regelmässigsten Krystallentwicklung vermag das unbewaffnete Auge wohl nicht absolut genau zu entscheiden, da diese Identität, wie das frühere Kapitel lehrte, nicht zu suchen ist in einer Gleichheit der Grösse, sondern in einer Gleichheit der Lage der Flächen: eine geometrische Identität, welche nur mit mathematischen Hilfsmitteln nachweisbar ist. Ist es daher zu verwundern, wenn dieselbe den Mineralogen lange verborgen blieb?

Plinius, der beste Naturhistoriker des Alterthums, spricht in seiner: Historia naturalis XXVII. 2 einen Satz aus, welcher seine Meinung bezüglich der Winkelschwankungen constatirt: „Warum der Krystall in der Gestalt eines Hexagons entsteht, davon ist die Ursache schwer anzugeben, um so schwieriger, da, während die Seitenflächen glatter sind, als sie ein Künstler machen könnte, die Pyramidalpunkte doch nicht alle von derselben Art sind.“

Unter Krystallos verstanden die Griechen den Quarz, da er am meisten dem klaren Eise ähnlich war; allmälig hat sich jedoch der Ausdruck Krystall immer mehr der Substanz entfremdet, und ist der specielle Name der Form geblieben. Die Quarzkrystalle, die an der citirten Stelle Plinius meint, sind auch in einigen Exemplaren sehr regelmässig, während wieder bei anderen die Seiten der Pyramiden verschieden gross ausgebildet sind, ohne dass desshalb die Lage der Flächen, d. i. die Winkel geändert würden. Doch Plinius und alle seine Nachfolger wur-

den dadurch getäuscht und meinten, dass mit solch auffälliger Aenderung der Gestalt auch die Winkel bedeutend geändert würden.

Es sollen hier einige charakteristische Aeusserungen folgen von den bedeutendsten Naturforschern, welche am Schlusse des Mittelalters und Beginne der Neuzeit lebten, um hiedurch zu zeigen, wie wenig bis dahin das wahre Wesen der Krystalle erkannt war.

So schreibt Conrad Gessner (geb. 1516, gest. 1565)[1] in seinem Werke: De rerum fossilium, lapidum et gemmarum maxime figuris. Zürich 1564 pag. 25: „Ein Krystall ist von dem anderen durch seine Winkel, folglich auch durch seine Figur unterschieden.“ Um die Wichtigkeit dieses Ausspruches für die Kenntniss jener Zeit richtig zu würdigen, ist nöthig, zu erwähnen, dass Gessner es war, welcher die Naturgeschichte aus der Lethargie emporrüttelte, welcher sie seit den Tagen der Philosophen Griechenlands anheimgefallen war.

Ganz ähnlich den Ansichten Gessner's über die Variabilität der Winkel äussert sich der von 1519—1603 lebende Cäsalpinus in seinem Werke: De metallicis. Nürnberg 1602, pag. 97: „Leblosen Körpern eine bestimmte, unveränderliche Gestalt zuzuschreiben, scheint mit der Vernunft nicht übereinstimmend zu sein, denn es ist das Geschäft der Organisation, bestimmte Gestalten zu erzeugen.“

Aehnliche Aeusserungen, mehr oder minder prägnant ausgesprochen, trifft man noch beinahe ein Jahrhundert lang bei den naturforschenden Schriftstellern an, doch wäre es überflüssig, alle jene kleinen Fortschritte zu registriren, durch welche die Mineralogen allmälig dahin gelangten, das Wesen und die Gesetze der Krystallformen von den Naturkörpern richtig zu beurtheilen und sich von allen falschen Hypothesen frei zu machen.

Letzteres war wohl sehr schwierig, denn die ersten Beobachter der merkwürdigen regelmässigen Gestalten wurden durch die damals herrschende philosophisch-speculative Richtung der Naturforschung zu Hypothesen und Verallgemeinerungen geleitet und abgehalten, die Gegenstände einer genauen Prüfung oder Messung zu unterwerfen, durch das Bestreben das allgemeine Gesetz der geometrischen Erscheinungen zu ermitteln.

So spricht der bekannte Astronom Keppler in seinem Werke Harmonice mundi. Linz 1619, pag. 161 „von einer formatrix facultas“, gleichsam von einer plastischen Kraft, die ihren Sitz in den Eingeweiden der Erde hat und die fünf regulären Körper in den Edelsteinen erzeugt.

Erst mit dem Verlassen dieser abstracten Speculationen und dem Beginnen von Beobachtungen und Sammeln wirklicher Thatsachen ward

---

[1] Vergl. Marx Gesch. d. Krystallkunde, woraus Whewell Gesch. der induct. Wiss. Mineralogie. Vieles entlehnt.

der Grundstein gelegt zur allmäligen Entwicklung der richtigen morphologischen Lehren.

§. 6. In der Mitte des siebenzehnten Jahrhunderts findet man sich staunend vor drei Männern, welche ihrer Zeit um mehr als ein Jahrhundert voreilten, und welche in Unkenntniss so vieler wichtigen, erst nach ihnen mühsam errungenen Resultaten der Untersuchungen, durch wenige Beobachtungen geleitet, theoretische Gesetze aufstellten, welche noch als die Grundlehren der heutigen Wissenschaft anerkannt werden. Es sind diess Erasmus Bartholin, Niclas Steno und Christ. Huyghens.

Ihre Untersuchungen und Publicationen sind beinahe gleichzeitig, und zwar in den Jahren 1660—1670. Es war diess eine Zeit, welche den glänzenden Perioden der naturwissenschaftlichen Thätigkeit der Neuzeit ebenbürtig an die Seite zu stellen ist.

Bartholin entdeckte die Doppelbrechung des Lichtes im isländischen Kalkspath, mass an Krystallen desselben die ebenen Flächenwinkel des Rhomboëders, und berechnete hieraus den Kantenwinkel zu 103° 30′. Es war diess die erste Krystallmessung. Seine Untersuchungen sind niedergelegt in: Experimenta crystalli Islandici Hafniae 1670.

Steno (geb. 1638, gest. 1687) war berühmter Arzt und Anatom, jedoch enthält seine Abhandlung: De solido inter solidum naturaliter contento Florenz 1669 die wichtige und für die ganze Richtung der nachfolgenden Untersuchungen massgebende Entdeckung, dass am Bergkrystall trotz aller Verziehung der Gestalten dennoch die Winkel constant bleiben.

Der dritte Naturforscher dieser Zeit und der weitaus bedeutendste war Christian Huyghens (gest. 1695), der Schöpfer der Undulationstheorie und der Gesetze der Lichtfortpflanzung in den Krystallen [1].

Huyghens wurde durch die Entdeckung der Doppelbrechung von Bartholin auf den isländischen Kalkspath aufmerksam gemacht; er untersuchte, da ihm die Methode Bartholin's, aus der Messung des ebenen Flächenwinkels die Körperwinkel zu berechnen, ungenau schien, die Winkel des Krystalls nochmals sorgfältig, und mass direct den stumpfen Kantenwinkel; seine Angabe 105° stimmt beinahe absolut mit dem wahren Werthe 105° 5′. Er stellte eine Hypothese auf, wie sich die Gestalt des Kalkspathes und seine leichte, regelmässige Spaltbarkeit am besten erklären lasse — eine Hypothese, welche als die Grundlage der späteren Hauy'schen Theorie betrachtet werden kann. Er nimmt an, dass die kleinsten Kalkspathmoleküle elliptisch-sphäroidische Körper wären, welche, wenn sie regelmässig auf einander geschichtet würden, die Kry-

---

[1] Die erste Ausgabe seiner Werke erschien 1690 in französischer Sprache, Gewöhnl.: Hugenii, Op. vol. I. Amstelodam. 1728. Tractatus de lumine.

stallform erzeugen können, und woraus sich zugleich die leichte Spaltbarkeit ableiten liesse.

Die Kenntniss der Gesetze der doppelten Brechung des Lichtes in den Krystallen wurde von Huyghens ebenfalls um Vieles erweitert, und die Ausmittlung derselben aus seinen Voraussetzungen so gründlich und vollständig entwickelt, dass alle Geometer der Neuzeit seine Annahmen und Folgerungen als beinahe erschöpfend anerkannten. Diess gelang ihm besonders dadurch, dass er es dahin brachte, verschiedene Prismen aus dem Kalkspath zu schneiden und zu poliren; — auch die Doppelbrechung des Bergkrystalls wurde zuerst von ihm entdeckt.

Durch die Arbeiten dieser drei Naturforscher war die Möglichkeit gegeben für die weitere Entwicklung der Wissenschaft, und es begann auch von hier an ein regeres Leben, und mehrere Naturforscher bestrebten sich, diesem scheinbar so mühsamen Gegenstande einige Gesetze abzuringen. Es gelang auch, schrittweise vorzudringen, obgleich auf diesem schwierigen Gebiete, wo Mathematik, Physik und Mineralogie gleich berechtigt sind, die höchsten Anforderungen an den Forscher gemacht wurden.

Dass aber trotz aller Schwierigkeiten die durch die Ideen von Huyghens und Steno geleiteten Untersuchungen glückliche Resultate lieferten, sieht man an der Schrift von Dominicus Gulielmi: Dissertatio de salibus Lugd. Bat. 1707, worin derselbe sich bereits bestimmt über die Constanz der Winkel und über den Aufbau der Krystalle aus Grundformen und Molecülen ausspricht.

Gleichzeitig oder wenige Jahre nach Gulielmi haben sich mehrere für ihre Zeit berühmte Naturforscher mit demselben Gebiete vertraut gemacht und Untersuchungen veröffentlicht. Es sind diess: Capeller, Prodomus crystallographiae. Luzern 1723. — Bourget, Lettres philosophiques sur la formation des Sels et de Cristaux, Amsterdam 1729. — Henkel Pyritologia. Leipzig 1725.

Letztere Schrift namentlich enthält bereits ziemlich deutlich erkennbare Pyrit-Krystallzeichnungen, und gibt Zeugniss von dem Eifer und Verständniss des bekannten churfürstlich sächsischen Leibarztes Henkel; trotzdem wies letzterer die Zumuthung von sich ab, die Mineralien nach ihren geometrischen Gestalten einzutheilen.

Dieser Versuch, der als der erste entscheidende Schritt zur Gründung einer physikalischen Mineralogie betrachtet werden kann, ist von Linné gemacht worden.

§. 7. Linné (geb. 1707, gest. 1778), der tiefsinnige Begründer der classificirenden Naturbeschreibung im Gebiete der Zoologie und Botanik, war wohl überzeugt, dass die Krystallgestalt einer der bestimmtesten, also auch der wichtigsten Charaktere der Mineralien ist,

doch vermochte er nicht diese Idee genügend zu verwerthen, und sein mineralogisches System hierauf richtig zu basiren, da er sich bloss durch Aehnlichkeiten leiten liess, ohne auf die geometrischen Untersuchungen Rücksicht zu nehmen. In seinem Systeme findet sich Diamant neben Alaun, da beide das Octaëder zur Grundform haben. Indess gebührt ihm der Verdienst zu solchen Untersuchungen einen Naturforscher aufgemuntert zu haben, dem die Mineralogie grössere Fortschritte, als jedem anderen seiner Nachfolger verdankt.

Es war diess Romé de Lisle. Er sagt in der Vorrede zu seinem berühmten Essai de Cristallographie: Belehrt durch die Schriften des berühmten Linné, wie wichtig das Studium der Winkelbildung der Krystalle ist und wie geeignet, die Sphäre unserer mineralogischen Kenntnisse zu erweitern, suchte ich dieselbe durch alle ihre Metamorphosen mit der grössten Aufmerksamkeit zu verfolgen.

De Lisle hatte bereits im Jahre 1772 seinen Essai de Cristallographie herausgegeben, in welcher er eine grosse Anzahl der Mineralien näher beschrieb. Allein hierin sind seine Ansichten noch unbestimmt ausgedrückt; er kennt noch keine zusammenhängende Folge der Uebergänge einer Gestalt von anderen ihr analogen, und er legt auf die Winkelmessungen wenig Gewicht. Allein mit dem Fortschreiten seiner Untersuchungen wurden auch seine Ansichten immer bestimmter und richtiger. In seiner Krystallographie [1]) vom Jahre 1783 behauptet er bestimmt die Invariabilität der Winkel bei allen Veränderungen in der Grösse der Flächen des Krystalles mit der Bemerkung jedoch, dass sich diese Unveränderlichkeit der Winkel nur auf die Grundgestalt des Krystalls beziehe, aus welcher man durch mannigfache Umgestaltungen mehrere secundäre Gestalten ableiten könne.

De Lisle verfolgte diese seine Ideen mit grosser Ausdauer und Meisterschaft.

In seiner Krystallographie hat er mehr als 500 Krystalle richtig gezeichnet, von den wichtigen Mineralspecies bereits mehrere Combinationen, so z. B. für Kalkspath bereits 30 Figuren. Auch hatte er zur Messung der Winkel das Anlegegoniometer angewendet und von allen seinen Figuren sich Modelle fertigen lassen. Wohl hatte bereits Linné [2]) Krystallmodelle, doch de Lisle fand den Künstler Carangeau, welcher ihm die Figuren in Thon und Holz winkelrecht ausführte, und hiezu auch den nach ihm benannten Anlegegoniometer für die genauere Winkelmessung erfand.

---

[1]) Cristallographie 1783. Paris. 3 vol. Text mit 1 vol. Tafeln.

[2]) Nach einem Schreiben desselben an De Lisle. Vide De Lisle Cristallographie I. p. XXI.

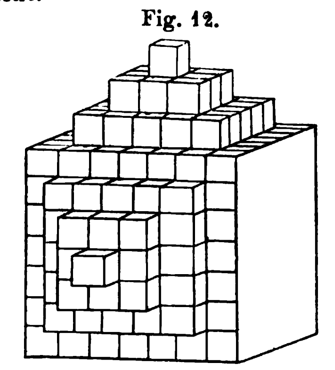
Trotz dieser wichtigen Entdeckungen und Fortschritte fand und findet Romé de Lisle wenig gerechte Würdigung seiner grossen Verdienste, da sein Erfolg durch den Ruhm seines Zeitgenossen Just. René, Haüy vollständig verdunkelt ward.

§. 8. Haüy kann als der eigentliche Gründer der neuen Schule der Krystallographie betrachtet werden, da alle seine Nachfolger seinen Ansichten als einer allgemeinen Grundlage beigetreten sind. Haüy gab in seinen Werken das vollständige System der Krystallographie und Mineralogie, sowie auch den consequenten Ausdruck für die Gesetze der Derivation der secundären Formen von den primitiven mittelst der Descrescenzen, d. i. der aufeinander folgenden Schichten der integrirenden Molecüle.

In der Entdeckung der Möglichkeit, die Krystalle aus Molecülen aufzubauen, ist ihm wohl Huyghens — durch den Aufbau des Kalkspathes aus sphärischen Molecülen — sowie auch Bergmann zuvorgekommen, welcher letztere in seiner Abhandlung: De formis crystallorum Nov. Act. Ups. 1773 lehrte, wie man durch Juxtaposition mehrerer Prismen ein sechsseitiges Prisma erzeugen kann; doch ist aus den Aeusserungen Hauy's über die Entdeckung Bergmann's nicht zu entnehmen, ob ihm dieselbe früher oder erst nach jener Zeit bekannt wurde, als er selbst durch Spaltung eines hexagonalen Prisma von Kalkspath, die ihm zufällig gelungen war, oder wie die Sage ist, auf die Erde fiel, auf dieselbe Idee von der Structur des Kalkspathes geführt wurde.

Wie sich diess auch in Wirklichkeit verhalten mag, ihm gebührt unstreitig das Verdienst, diese Idee mit aller Kraft der Originalität und mit unermüdlicher Ausdauer verfolgt zu haben. Er hat sie zum eigentlichen Geschäfte seines langen Lebens gemacht.

Fig. 12.



Seine Hypothese besteht im Wesentlichen darin, die Gestalt aus gleichgeformten Molecülen (Fig. 12) aufzubauen, wie man z. B. die Fläche eines Dreieckes gebildet denken kann durch auf einander folgende Reihen von gleich grossen Quadraten, wovon jede höhere Reihe um 1 oder 2 Quadrate weniger zählt als die untere. Diese Weise, das Innere der Krystalle zu betrachten, erlaubt nur bestimmte secundäre Formen, da beispielsweise die Anzahl der die Höhe des Dreieckes bildenden Quadrate in einem rationalen Verhältniss zu der die Basis bildenden stehen muss.

Die mathematische Deduction der Verhältnisse dieser abgeleiteten Formen, die Aufstellung einer Bezeichnungsmethode für diese Ableitung,

welche genau und einfach ist, endlich die Anwendung derselben in der Mineralogie, welche er allseits durchforschte und mit neuen Thatsachen bereicherte, diess sind die Fortschritte, welche die physikalische Mineralogie Haüy zu verdanken hat. Von dem grossen Umfang seiner Arbeiten geben seine Krystallographie und Mineralogie[1]) Zeugniss. Die geometrischen Sätze, welche seinen Forschungen zu Grunde liegen, füllen beinahe zwei Bände und die Zahl der von ihm gemessenen, gerechneten und vollständig bestimmten Figuren seines mineralogischen Atlasses übersteigt tausend.

Haüy bildete durch sein System der Krystallographie eine vollkommene Schule, welche sich bis in die Neuzeit in Frankreich erhalten hat und in der Bezeichnungsweise, aber nicht in den Grundgestalten der Krystallsysteme von den übrigen Schulen abweicht.

Haüy's Schule hat die Ableitung aller secundären Gestalten von Primitivformen beibehalten, jedoch die anfängliche Anzahl der letzteren verringert, und zwar übereinstimmend[2]) mit den deutschen und englischen Krystallographen, von 17 auf 6; analog hiemit wurden auch die Flächensymbole vereinfacht, wozu Monteiro und Levy durch Angabe der Zonengleichungen das meiste beitrugen.

§. 9. Im Gegensatze zu diesen treuen Anhängern war es ein Schüler von Haüy, Christ. Sam. Weiss, welcher, seines Meisters Methode verlassend, die axinometrische entdeckte, jene Methode, welche sich immer mehr und mehr zur Alleinherrschalt emporschwingt.

Weiss war zuerst Anhänger von Haüy, suchte denselben in Paris auf, übersetzte 1804—1810 dessen Mineralogie, und arbeitete in seiner Richtung fort; allein seine geometrischen Untersuchungen über das Wesen und die unterscheidenden Merkmale der Primitivgestalten in Verbindung tiefer analytischer Kenntniss brachte ihn auf einen anderen Weg.

Er sagt selbst im Jahre 1815: „Als ich im Jahre 1809 meine beiden Abhandlungen über diesen Gegenstand bekannt machte, theilte ich noch die gewöhnliche Meinung von der Nothwendigkeit der Annahme und von der Realität der Existenz einer primitiven Form oder legte diesem Ausdrucke wenigstens eine von der damals herrschenden Auslegung nicht sehr verschiedenen Sinn bei. Indem ich nun eine dynamische Begründung jener primitiven Formen statt der verwerflichen atomistischen Denkweise suchte, so entwickelte sich mir gleichsam unter der Hand das, was über ihnen steht — das Grundverhältniss der Dimensionen.“ Die

[1]) Haüy Traité de Mineralogie. Paris 1801, 1822. Traité de Cristallographie. Paris 1822.

[2]) Das diclinische Krystallsystem wird hier, wie in den meisten Fällen als specieller Fall des triclinischen angenommen.

Abhandlung vom Jahre 1809: De indagando formarum crystallinarum charactere geometrico principali enthielt nämlich bereits die neue Anordnung der Krystalle von axinometrischen Grundsätzen aus: in derselben ist die krystallographische Bedeutung der Krystallaxen hervorgehoben, das System selbst übersichtlich angedeutet, und die zahlreichen Haüy'schen Primitivformen auf fünf zurückgeführt, wobei nur einige wenige Mineralien noch nicht vollständig definirt waren. In der oben citirten Abhandlung vom Jahre 1815 war aber bereits das System vollständig entwickelt und sechs Krystallsysteme festgesetzt.

Hiemit war der wundervolle Bau der Krystalle in seinen Hauptzügen erkannt und ermittelt, dass diese gesetzmässige Anordnung in Beziehung zu den Coordinatenaxen steht, auf welche die Krystalle als geometrische Körper bezogen werden können.

Wenn auch die ursprüngliche Anordnung und der Ideengang von Weiss in Manchem allmälig geändert ward, so blieb er doch der Träger, ja der Gründer der heutigen Krystallophysik, indem die von ihm eingeführte axinometrische Methode die einzige ist, welche sich streng sowohl dem mathematischen Calcul als auch den physikalischen Vorstellungsweisen anschliesst.

Durch ihn auf die nöthige Höhe der Ausbildung gebracht, ist es möglich, dass die Krystallographie, ohne ihre richtige Grundlage zu verlieren, ohne von ihrem Ansehen einzubüssen, neben seiner Schule noch mehrere andere ertrug, welche wohl geistige Nachfolger Weiss' sind, aber in Methode, Sprache und Symbolik gesondert auftraten; es waren diess Mohs, Naumann, Neumann-Miller.

Mohs, bekannt durch seine Bestrebungen, mit Ausschliessung chemischer Merkmale ein Mineralsystem zu creiren, ward hiedurch gezwungen, vielfache Aufmerksamkeit den krystallographischen Verhältnissen zu schenken. In Folge dessen arbeitete er von Haidinger unterstützt an der Richtigstellung falscher Angaben und der Ermittlung neuer Constanten; es gelang ihm auch, die Möglichkeit der Existenz schiefwinkeliger Coordinaten gegen die Ansicht von Weiss zuerst anzugeben und nachzuweisen; allein im Gegensatze hiezu waren seine theoretischen Forschungen keine Verbesserung der Weiss'schen Anschauungsweisen. Mohs bestrebte sich, alle seine Resultate so gemeinfasslich als möglich zu machen; er führte daher statt der geometrischen Ausdrücke hievon abgeleitete populäre Symbole ein; da er aber hiemit seine Idee von einer reiheweisen Entwicklung der Krystallgestalten (gleichsam successive Abstumpfung von Kanten) verwebte, versündigte er sich gegen die Grundbedingung aller krystallographischen Forschungen „einfach und richtig."

Es ist daher nicht zu wundern, wenn seine Methode nicht die Anerkennung und Verbreitung fand, welche er hoffte.

Analog mit Mohs befolgte auch Hausmann eine naturhistorische Richtung, sie führte ihn ebenfalls zu einer eigenen krystallographischen Sprache, welche sich auf den ermittelten, aber nicht in Zahlen übersetzten Zonenverband stützt[1]).

Bedeutend wichtiger als diese sogenannte naturhistorische Richtung war jene geworden, welche von der mathematischen Schule gefördert ward. Auf die Untersuchungen von Weiss folgte im Jahre 1830 ein vollständiges Lehrbuch der mathematischen Krystallographie von Naumann. Eines der bedeutendsten Werke in diesem Fache, ward es der Stützpunkt aller Mineralogen und Physiker, welche sich der analytischen Geometrie bedienen wollten, und wahrlich, das Werk steht so vollkommen geschlossen und geordnet da, dass bei Beibehaltung der Methode kaum weniges davon geändert werden könnte. Naumann führt zur Vereinfachung der Weiss'schen Flächenformeln Symbole ein, welche sich aber von den Mohs'schen durch ihre Prägnanz und geometrische Richtigkeit wesentlich unterscheiden, obgleich sie dem äusseren Anschein nach analog gebildet sind. Die Naumann'schen Zeichen sind in letzterer Zeit vereinfacht worden durch Dana[2]), welcher sie hiermit in Amerika einzubürgern bestrebt ist.

§. 10. Die bisher erwähnten Schulen sind alle mehr oder minder beschränkt und von physikalischen Forschungen ausgeschlossen geblieben, indem deren Methoden vielfach der für die Physik nöthigen Leichtigkeit und Handsamkeit entbehren. Die in letzterer Beziehung, also auch für die Zwecke der physikalischen Mineralogie wichtigste Methode, ward durch Neumann gefunden und durch Miller ausgebildet.

Neumann hat nämlich nicht bloss gezeigt, wie man Zonen und Richtungen der Flächen in einer Zeichnung durch eine besondere Constructionsmethode der Projection ersichtlich machen könne, sondern auch in seinen Untersuchungen über die thermischen Axen des Gypses[3]) wendet er ganz neue und fruchtbringende Methoden an. Er lehrt im letzteren, dass es möglich ist, die Punkte der Flächennormale auf eine Kugeloberfläche in Betracht zu ziehen, und dass die so entstehenden Indices die reciproken Werthe der Axenlängen sind.

Hier wäre möglich, die Priorität der Entdeckung in Frage zu stellen, da über denselben Gegenstand Grassmann in Stettin bereits

---

[1]) Hausmann Mineralogie 1828.

[2]) Dana: Mineralogy New Haven 1854.

[3]) Neumann. Beiträge zur Krystallonomie 1823: De lege zonarum diss. 1826: Krystallsystem des Axinites Pogg Ann. 1825. Ueber die thermischen Axen des Gypses. Pogg. Annal. XXVII.

1829[1]) seine Untersuchungen veröffentlichte und auf bloss theoretisch-inductivem Wege über die Hypothese der Krystallbildung zu ganz ähnlichen Schlussfolgerungen gelangte. Allein Neumann war es, der die Entdeckung mit mathematischer Schärfe und Originalität publicirte, dieselbe gleichzeitig an einem speciellen Falle (Gyps) der physikalischen Mineralogie erläuterte, und so nicht nur ihre Richtigkeit, sondern auch die Möglichkeit ihrer nutzbringenden Anwendung bewies. Und so kam es auch, dass seine Ideen zu der Gründung einer krystallographischen Schule durch Miller Anstoss gaben.

Miller vereinigte die Ideen von Whewell[2]) und Neumann, führt die Kugelprojection und die Bezeichnung der Flächen nach ihren Normalen ein und gibt eine theoretische Krystallographie mit Anwendung der sphärischen Trigonometrie[3]).

Wer die Leichtigkeit dieser Methode im Gegensatze zu jener mittelst analytischer Geometrie kennt, wird nicht zweifeln, dass sie es ist, welche endlich die Alleinherrschaft erringen wird; sie war es bereits, welche trotz des verhältnissmässig kurzen Bestandes vielfach befruchtend und hervorbringend gewirkt hat, denn sie schliesst sich den übrigen physikalischen Eigenschaften so enge an, dass alle Verhältnisse der Krystalle aus einem und demselben Gesichtspunkte betrachtet werden können — sie war Gründerin einer systematischen Krystallophysik.

Vorliegendes Werk ist ebenfalls den Grundsätzen von Neumann-Miller gefolgt, doch nicht in allen Punkten. Im rhomboedrischen Systeme ward abweichend von allen bisherigen Anschauungsweisen sowohl der Weiss-Naumann- als Neumann-Miller'schen Schule eine Aenderung der Coordinatenaxen eingeführt, welche nicht bloss dem geometrischen Charakter des Systemes genügt, und vielfache, physikalische Erscheinungen erklärt, sondern auch ermöglicht, alle Krystalle als eine fortlaufende Reihe von immer weniger symmetrisch werdenden Gestalten ohne Discontinuität zu betrachten.

[1]) Grassmann: Zur physischen Krystallonomie. Stettin 1829.

[2]) Whewell. Phil. Transact. 1825: Cambridge Transact. 1826. vol. II. p. 398 gibt zuerst die abgekürzte Flächenbezeichnung durch Kürzung der Weiss'schen Formel ohne Symbolik.

[3]) Miller. Treatise on crystallography London 1839.

# III. Kapitel.

## Ueber Krystallogenesis.

§. 11. Der Anblick der Krystalle drängt unwillkürlich zu der Frage, wie sie entstanden; ob durch allmäliges Ablagern des fest werdenden Stoffes nach verschiedenen Richtungen oder durch Aneinanderreihung kleinster atomartiger Partikeln von bestimmter Form und wie sie gerade in dieser Gestalt aus einer anderen hervorgegangen sind.

Seit den ältesten Zeiten der morphologischen Studien — wie bereits im vorhergehenden Kapitel erörtert ward — bis zum heutigen Tage waren diese Fragen Gegenstände vielfältiger Untersuchungen, doch all diess Bemühen war fruchtlos und ohne Ergebniss, denn bis jetzt kann noch über diese Punkte in ihrer Gesammtheit keine vollständig genügende, allseits befriedigende Theorie aufgestellt werden. Insofern der Act der Entstehung selbst ins Auge gefasst wird, ist man zu der Annahme genöthigt: „die Krystallogenesis ist der unter günstigen Umständen ausgeführte Uebergang eines Stoffes aus dem Zustand labilen Gleichgewichtes in die stabile Gleichgewichtslage."

Welches der Grund hievon ist, welche Ursachen diese gesetzmässige Gruppirung der Molecüle bewirken, welche Principien hiebei befolgt werden, ist nicht genau bekannt; wir müssen uns mit der Kenntniss der vielen bekannten, jede Krystallogenesis begleitenden Thatsachen und andererseits mit Hypothesen und Theorien begnügen. Während ersteren vorliegendes Kapitel, ist letzteren das nachfolgende bestimmt.

Gelegenheit, Krystallbildung zu beobachten, bietet meist sich nur dann dar, wenn wir dieselbe veranlassen, von den in der Natur vorkommenden können wir daher nur durch Analogie schliessen, dass sie unter ähnlichen Bedingungen vor sich gegangen sind.

Hieraus ergibt es sich, dass man zur Erörterung der morphologischen Bildung der Mineralien die Beispiele der Chemie benützen muss;

da die von ersteren bekannten Vorkommnisse nicht genügend sind, um alle möglichen Fälle durch dieselben zu erläutern. Dieser Vorgang wurde auch in diesem Kapitel eingehalten, wodurch es gelang, die Verhältnisse der Krystallogenesis vollständig besprechen zu können.

§. 12. Ob allen anorganischen Verbindungen und Substanzen Krystallisirbarkeit zukommt, ist längere Zeit der Gegenstand von Controversen gewesen, da in der Natur amorphe Mineralien eingebürgert sind; allein die neuesten Untersuchungen[1]) haben es höchst wahrscheinlich gemacht, dass jeder Substanz die Fähigkeit, in Krystallen zu erscheinen, zukomme, wenngleich die Bedingungen hiezu oft schwierig zu erfüllen sind, so dass diess nur in selteneren Fällen beobachtet werden kann.

Die Bedingung, damit Krystallogenesis, das ist ein Uebergang aus dem labilen in den stabilen Gleichgewichtszustand eintreten kann, ist vor Allem, dass die Substanz in tropfbar flüssigem oder ausdehnsam flüssigen, d. i. labilen Aggregationszustande gegeben sei. Diess ist der Fall sowohl, wenn der Stoff für sich durch Wärme in einen dieser Zustände versetzt worden ist, als auch, wenn er in Verbindung mit einem anderen Stoffe, mag letzterer nun wirkliche chemische Verbindung oder bloss Suspension der kleinsten Theilchen — Lösung — sein, tropfbar oder ausdehnsam flüssig erscheint. Beim Uebergang aus dem flüssigen in den festen Zustand, also entweder durch Entziehung *A*) der Wärme oder *B*) der Substanz, welche den flüssigen Zustand bedingt, tritt Krystallisirung ein.

Die Umstände, welche eine Krystallbildung unter den erwähnten Fällen begleiten, soll im Nachfolgenden besprochen werden.

*A*) Wenn ein Körper durch den Zufluss von Wärme aus dem Zustande des stabilen Gleichgewichtes gebracht und tropfbar oder ausdehnsam wird, so tritt natürlich bei Abnahme der Wärme der entgegengesetzte Fall ein. Hiebei ist es nun möglich, dass die Körpermolecüle, wenn sie der ruhigen Entwicklung überlassen sind, sich in gesetzmässigen Formen gruppiren. Die Substanz krystallisirt.

Die Metalle krystallisiren beispielsweise aus dem Zustande des Geschmolzenseins, Salmiak aus dem des Dampfes, während hingegen Schwefel, Jod, Kampher sowohl aus ersterem, alz auch aus letzterem in Krystallen abgeschieden wird, sobald hinreichende Erkaltung eintritt.

Bei manchen Substanzen aber, welche durch Erkaltung aus dem flüssigen in den festen Zustand unter Krystallbildung übergehen, tritt die Erscheinung auf, dass man sie bei Erfüllung gewisser Bedingungen unter ihren Schmelzpunkt erkalten kann, unter jenen Temperaturgrad, bei welchem sie bei Temperaturerhöhung flüssig und andererseits bei Erkaltung fest werden.

[1]) Ebelmen, Daubrée, St. Claire Deville.

Diese Bedingungen sind: vollkommene Ruhe und Verschluss der Gefässe, in welchen die Erkaltung geschieht; Erschütterung, Oeffnung des Gefässes, Berührung mit einem krystallinischen, oder nur mit irgend einem festen spitzen Körper bewirkt die Krystallbildung dann augenblicklich; die Temperatur erhebt sich hiebei, während der Körper fest wird, bis zu jenem Grade, welcher dem Schmelzpunkte entspricht.

Ein allbekanntes Beispiel hiefür ist Wasser; ähnlich verhält sich höchst concentrirte Essigsäure. Im offenen Gefässe erstarrt diese schon bei + 13° C.; im verschlossenen hingegen kann man sie bis zu — 12° erkalten, ohne dass sie fest würde. Wird aber bei dieser Temperatur dann das Gefäss geöffnet und erschüttert, so krystallisirt die Essigsäure sogleich, und zwar geschieht diese Krystallbildung von oben nach unten, auch dann, wenn die in das Gefäss einströmende Luft wärmer wäre, als die Flüssigkeit. Eine Menge Stoffe verhält sich ähnlich, sowie auch die später betrachteten Lösungen von Salzen in Wasser, z. B. schwefelsaures Natron.

Im Allgemeinen wird bei Flüssigkeiten, welche durch Erkalten krystallisiren, diess erleichtert und herbeigeführt: durch Offenhalten des Gefässes und dadurch ermöglichten Zutritt der äusseren Luft, durch Bewegung, besonders wenn die Erkaltung in einem offenen Gefässe geschah, wiewohl auch in verschlossenen Gefässen Krystallbildung durch Schütteln veranlasst werden kann, durch Berührung mit einem festen Körper, wobei indess zu bemerken ist, dass dieser mit der heissen Flüssigkeit nicht zugleich erkalten darf, und dass er feucht oder vorher erwärmt in die Substanz gebracht ebenfalls wirkungslos bleibt.

*B*) Im Gegensatze zu diesen betrachteten Fällen ist es aber möglich, dass die Substanz nicht für sich allein flüssig gemacht wurde, sondern erst diess durch Vermengung mit einem zweiten Stoffe ward, im Allgemeinen also durch Auflösung. Wird dieser zweite lösende Stoff wieder entzogen, also die Bedingung des flüssigen Zustandes weggeschafft, so wird unter günstigen Umständen Krystallbildung auftreten. Das Wegschaffen des Lösungsmittels kann aber auf zweierlei Weise vor sich gehen, durch Kälte sowohl als durch Erhitzung.

Betrachten wir den ersten Fall, so ist bekannt, dass jedes Lösungsmittel bei einer gewissen Temperatur nur eine gewisse Quantität eines Stoffes aufnehmen kann, und nach Aufnahme dieser Quantität gesättigt heisst. Nach Sättigung mit einem Stoffe können aber noch von einem zweiten oder dritten Stoffe bestimmte Quantitäten von demselben Lösungsmittel aufgenommen werden.

Die Löslichkeit nimmt im Allgemeinen mit der Temperatur zu; aus einer erkaltenden Lösung wird daher nur diejenige Quantität des

aufgenommenen Stoffes ausgeschieden und krystallisirt, um welche das Lösungsmittel bei der niedrigeren Temperatur weniger als bei der früher höheren zu lösen vermag. Wenn man z. B. kochend heisses Wasser auf Salpeter giesst, das Gemenge so lange umrührt, als noch Salpeter aufgelöst wird, sodann die Lösung filtrirt, abgiesst und in Ruhe langsam erkalten lässt, so krystallisirt daraus derjenige Antheil des Salpeters, welchen das kochend heisse Wasser mehr als das kalte zu lösen vermag[1]).

Im Gegensatze zu dieser Krystallbildung durch Erkaltung steht jene durch Erhitzung. Es beruht diese Methode darauf, dass durch Verdampfung eines Theiles des Lösungsmittels die noch vorhandene verringerte Flüssigkeit nicht mehr im Stande ist, den aufgelösten Stoff in seiner ganzen Menge suspendirt zu erhalten. Es kommt hiebei besonders darauf an, dass nicht zu wenig und nicht zu viel von dem Wasser durch das Abdampfen weggetrieben wird. Ist das erstere der Fall, so schiessen die Krystalle nur in geringer Menge und langsam an, hat das Andere stattgefunden, so erfolgt das Festwerden schnell, und die Krystalle können sich nicht gehörig ausbilden, so dass nur eine compakte Masse von krystallinischem Gefüge gewonnen wird.

Ist der aufgelöste Stoff nicht hydroskopisch, so erkennt man die rechte Concentration an der Bildung eines Krystallhäutchens an der Oberfläche. Es versteht sich von sich selbst, dass bei einem Auflösungsmittel, welches zu seiner Verflüchtigung keiner hohen Temperatur bedarf, auch schon bei gewöhnlicher Temperatur die nöthige Concentration eintreten kann, wie diess bei Lösungen mittelst Weingeist geschieht.

Die Verdunstung kann dadurch befördert werden, dass man über der Lösung einen luftverdünnten Raum erzeugt, oder mindestens durch Schwefelsäure die gebildeten Wasserdämpfe absorbiren lässt.

Die Krystalle werden desto grösser und desto vollkommener, je langsamer die Zurückführung eines Stoffes aus dem flüssigen in den festen Zustand geschieht. Man muss desshalb bei Krystallbildung durch Entziehung des Lösungsmittels diese nur nach und nach vor sich gehen lassen. Geschieht die Erkaltung zu schnell, so erhält man, wie bei zu starker Concentration durch Erhitzung in grösserer Menge kleine, unansehnliche, unvollkommene Krystalle, welche oft kleine Mengen Mutterlauge einschliessen, und sich bei fortgesetzter Bildung zu einer krystallinischen Masse verbinden.

---

[1]) Hier verdient ein merkwürdiger von Lowitz beobachteter Fall nähere Erwähnung. Aus einer heiss bereiteten Auflösung von Salpeter und Glaubersalz krystallisiren beide Salze wirr durcheinander und gleichzeitig, wenn die Lösung sich selbst überlassen erkaltet. Bringt man jedoch einen Krystall von Salpeter oder Glaubersalz in die Lösung, so krystallisirt in dem ersten Falle bloss Salpeter, im zweiten bloss Glaubersalz, während die übrigen Theile der Lösung erst allmälig zu Boden fallen.

Ausser diesen beiden erwähnten Fällen ist ein dritter möglich, welcher aber für die praktische Anwendung minder wichtig ist. Das Entziehen des Lösungsmittels kann auch dadurch bewerkstelligt werden, dass man das Hilfsmittel der chemischen Affinität benützt. Krystallisation muss nämlich stattfinden, wenn das Lösungsmittel mit einem anderen Stoffe gemengt wird, der sich mit ihm zu einer Flüssigkeit verbindet, in welcher der zu krystallisirende Stoff nur wenig oder gar nicht aufgelöst wird.

Beispielsweise krystallisiren Salpeter und Kupfersalmiak dann aus einer wässerigen Lösung, wenn man Alkohol in letztere bringt, andererseits Kampher aus einer alkoholischen Lösung, wenn dieselbe mit Wasser gemischt wird.

§. 13. Nach der Betrachtung der Verhältnisse, welche den Process der Krystallbildung ermöglichen, und welche — obwohl den Erfahrungen mit künstlichen chemischen Producten abstrahirt — auch für die Entstehung der Mineralien ihre allgemeine Giltigkeit haben, sind jetzt einige der Erscheinungen zu erörtern, welche die Krystallisation zu begleiten pflegen.

Bei der Bildung der Krystalle pflegt Wärme entwickelt zu werden, und in einzelnen Fällen zeigt sich sogar Licht. Die Temperaturerhöhung ist eine Folge des Umwandelns des bis dahin flüssigen Körpers in einen festen, wobei die den Flüssigkeitszustand bedingende latente Wärme frei werden muss. Ihr Auftreten ist besonders auffallend, wenn nach einer künstlichen Erkaltung Krystallisation eintritt.

Die erwähnten Lichterscheinungen, welche bei der Krystallbildung von schwefelsaurem Kali, salpetersaurem Strontian, schwefelsaurem Kobalt und Fluornatrium beobachtet wurden, können elektrischen Ursprungs sein, obgleich diese Erklärung nur hypothetisch ist. Es scheinen nämlich Veränderungen im Aggregationszustande der Körper von elektrischen Zuständen begleitet zu sein. Nach Grotthuss[1]) wird Wasser, welches bei einer niedrigen Temperatur in einem Glase, das aussen metallisch belegt ist, oder in einem Blechgefässe schnell gefriert, positiv elektrisch, wird es dagegen geschmolzen, negativ. Jul.-Fontenelle[2]) hat analog hiemit eine schon früher von Pontus gemachte Bemerkung bestätigt, dass Wasser in einem Kölbchen, das äusserlich mit Baumwolle umgeben und mit Aether benetzt ist, durch Evacuiren der Luft zum Gefrieren gebracht wird, und dass wenige Momente vor dem Erstarren ein Funke aus dem Halse springt. Poggendorff[3]) knüpft

[1]) Grotthuss. Schweiger Journal. vol. IX.
[2]) Jul.-Fontenelle. Journ. de chim. méd. 1833. pag. 429.
[3]) Poggendorffs Annalen vol. 28. pag. 637.

hieran die Bemerkung, dass man daher auch die beim Krystallisiren auftretenden Lichtphänomene, sowie das eben erwähnte für elektrischen Ursprung halten dürfe.

§. 14. Vom allgemeinen Gebiete der Krystallogenesis kann man übergehen zur Betrachtung der Erscheinungen des Bildens und Fortwachsens der einzelnen Krystallindividuen, so weit es den Forschern geglückt ist, diese selbst bis in die ersten Anfänge mit dem Mikroskope zu verfolgen und zu beobachten.

Wichtig sind in dieser Beziehung die Untersuchungen von Tellkampf[1]) und Ehrenberg[2]), die ausführlichsten Studien hat aber auf diesem Gebiete Frankenheim[3]) angestellt, welche über die Fragen von Zwillingsbildung, Fernwirkung der Krystalle, Orientirung und Ausbildung der Flächen vielfaches Licht verbreiten und desshalb auch jeder künftigen Untersuchung zu Grunde gelegt werden müssen.

Die Untersuchungen über die Art der weiteren Ausbildung der Krystalle vom Beginne der Entstehung an können verschiedene Zielpunkte haben. Sie können sich auf die Totalität des Krystalls oder auf die regelmässige Gruppirung von Individuen zu Zwillingen beziehen, oder andererseits nur zu erklären versuchen, wie die variable Flächenentwicklung, mag diese nun gestört oder gegenüber anderen unregelmässig sein, vor sich geht. Für beide Fälle wird das Mikroskop immer ein verlässliches Hülfsmittel bleiben, da es möglich ist, hier im Gesichtsfelde die durch Verdunstung eines Tropfens bewirkte Krystallisation in ihren Stadien zu verfolgen.

Wohl mag es kaum nöthig sein, mit dürren Worten zu erklären, dass es bisher noch keinem Forscher gelungen ist, den Act der Krystallbildung bis zu jenem Momente zu verfolgen, wo die Gruppirung der Substanzmolecüle zu einem Individuum stattfindet. Im Gesichtsfelde des Mikroskopes erscheint nur der fertige Krystall, im tausendfach verjüngten Massstabe das Bild des künftigen grossen Individuums. Die Molecüle werden ewig unsichtbar bleiben, vielfältigen Hypothesen freien Spielraum lassend.

Trotzdem dass aber das Mikroskop uns nicht den Bildungsact der Individuen vor Augen führt, gewährt dasselbe dennoch viele wichtige Aufschlüsse. Vor Allem soll jetzt die unvollkommene Flächenausbildung besprochen werden.

Es ist selbstverständlich, dass, wenn unter dem Mikroskope in einem Tropfen Krystalle entstehen, dieselben, da sie ja keinen Störungen

---

[1]) Tellkampf. Physikalische Studien. Hannover 1854. pag. 35.
[2]) Ehrenberg. Pogg. Ann. vol. 36.
[3]) Frankenheim. Pogg. Ann. vol. 37. vol. 111.

ausgesetzt sind, von allen Seiten gleichmässig ausgebildet erscheinen. Fehlt es jedoch zur vollständigen Ausbildung an Stoff, so pflegt sich bei schneller Krystallisation die Oberfläche des schon gebildeten Krystalls mit kleinen Individuen zu bedecken, welche, da die letzten Theile einer verdampfenden Flüssigkeit wegen des Procentgehaltes an Verunreinigung oft von der ursprünglichen Mutterlauge abweichen, wohl parallele Lage, aber andere Flächenausbildung zeigen.

Ist die Verdampfung allmälig, so werden keine besonderen Individuen entstehen, hingegen wird die allseitige Ausbildung des Krystalls durch den Mangel an Mutterlauge in der Weise gehemmt, dass nur einzelne Theile, welche noch bedeckt sind, mit ihr fortwachsen, während die anderen zurückbleiben. Da jeder Krystallisationsprocess aber nicht continuirlich, sondern momentan — namentlich für das Mikroskop — vor sich geht, so muss hiedurch eine treppenförmige Gestalt bewirkt werden.

Oft sind diese Treppen so fein, dass sie beinahe eben zu sein scheinen, und nehmen die Gestalt von Scheinflächen an. Da nun wegen der immer variablen Verdunstung die Stufen der Treppen keinem Gesetze unterworfen sind, so hat Hessenberg[1]) Recht, wenn er behauptet, dass an solchen Scheinflächen sich die Neigung derselben mehrmals ändern kann, und dass daher bei der Bestimmung von neuen Flächen eine grosse Sorgfalt herrschen muss, um nicht solche Scheinflächen als wirkliche Krystallflächen zu bezeichnen.

Ein scheinbarer Gegensatz zu der eben erwähnten Ansicht scheint das häufige Vorkommen der treppenförmigen, gestreiften Flächen in der Natur zu bilden, welche sich gewiss unter Umständen gebildet haben, wo ihnen nicht der Stoff gemangelt hat, die Treppen auszufüllen.

Jene Furchen entstehen aber, wie aus mikroskopischen und physikalisch-optischen Untersuchungen hervorgeht, nicht bloss durch die unvollständige Ausbildung des Krystalls, sondern auch durch die zwillingsartige Verbindung zweier Individuen. Aber in solchen Furchen ist die Krystallisationskraft beinahe aufgehoben, und dieselben bilden sich allmällig zu Zwillingen aus.

Frankenheim sagt: „Eine Streifung oder Rauheit an der Oberfläche, die als Regel gilt und nicht Folge einer Pseudomorphose oder einer Verbindung mit isomorphen Krystallen ist, kann man fast mit Sicherheit als ein Zeichen von Zwillingsbildung ansehen."

Das Mikroskop gibt aber nicht bloss bei den Fällen einer treppenförmigen Flächenentwicklung, sondern auch, wenn eine der letzteren künstlich verstümmelt wird und nachwächst, Erklärung. Hiebei tritt

[1]) Hessenberg. Mineralog. Notizen I.

nämlich der Fall ein, dass diese einzelnen verstümmelten Partien schneller als die unversehrten Krystallmasse ansetzen, man könnte daher sagen, den übrigen in die Stufe des Bildungsprocesses, aus welcher sie künstlich gebracht wurden, nachzueilen bestrebt sind, um hiedurch die Symmetrie herzustellen.

Wie es schon Pasteur[1]) und in weitläufigen Arbeiten C. Hauer[2]) gezeigt haben, wächst der verletzte Theil bedeutend schneller nach und ersetzt in kurzer Zeit den Verlust. Dieses Phänomen lässt sich wohl erklären, wenn man bedenkt, dass keine solche künstliche Ebene vollkommen glatt ist; jeder Bruch, selbst der leicht spaltbare, weist sich unter dem Mikroskope als splittrig dar; es werden nämlich entweder parallel den Spaltungsrichtungen oder den Krystallflächen die Schenkel der einspringenden Winkel laufen. Da nun das Fortwachsen des Krystalls sicher nur durch die Attraction der kleinsten Theilchen an dem schon bestehenden Krystalle bewirkt wird, und da diese Kraft, sowie jede Molecularkraft der Oberfläche proportional ist, so wird durch die Unebenheiten und durch die doppelte Wirksamkeit der Seiten der einspringenden Winkel ein verstärkter Impuls zur Krystallisation gegeben.

Da ferner die wirklichen Krystallflächen, als der Anordnung der Molecüle entsprechend, glatt und eben sind; während solche Spaltungs- und Bruchflächen, wenn sie durch Menschenhand hervorgerufen werden, immer von der Richtung, welche die Molecüle für eine homolog liegende Fläche anzeigen, abweichen, so kann man sicher annehmen, dass immer ein Bestreben der Molecüle eintreten wird, diese unnatürliche Lage zu verbessern und sich wieder zu ergänzen.

Hiezu muss auch dann das der Substanz inhärirende Vermögen gezählt werden, gewisse Flächen auf Kosten aller übrigen zu bevorzugen, ein Vermögen, welches, wie vielfältige Beobachtungen lehren, vorhanden, aber noch nicht genügend berücksichtigt und gar nicht aufgeklärt ist. Die krystallogenetischen Beobachtungen von C. Hauer werden in dieser Beziehung reiches Material zu theoretischen Untersuchungen liefern.

§. 15. Nachdem bisher die krystallogenetischen Verhältnisse, namentlich in Beziehung auf die Flächenentwicklung ins Auge gefasst worden sind, könnte auf die Entwicklung des Krystallindividuums selbst übergegangen werden. Wohl ist es bekannt, dass sich die specielle Krystallbildung eines Individuums gleichsam als momentaner Act der Beobachtung entzieht, allein manche Entwicklungsformen scheinen erst im späteren Stadium der Krystallogenesis aufzutreten, und solche mussten

---

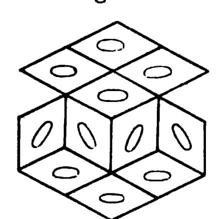
[1]) Pasteur. Compt. rend. 43. pag. 797.
[2]) C. Hauer. Wien Ac. Sitzungsb. 1860.

daher der sorgfältigen Untersuchung unterzogen werden. Hieher gehören namentlich die Angaben über Zwillingsbildung und Fernwirkung der Krystalle.

Ueber Zwillingsbildung existiren einige Angaben, welche behaupten, dass Zwillinge entstehen können, wenn zwei in einer Flüssigkeit frei schwebende Krystalle sich nach Zwillingsgesetzen aneinander legen. Vielfältige Beobachtungen der neueren Zeit haben diess jedoch als falsch erklärt: Die Zwillingsformation entsteht immer im werdenden Krystall, entweder in seinem ersten status nascens, so dass er, sobald er im Mikroskop sichtbar wird, bereits Zwillingsgestalt hat, oder es zweigt sich später ein Ast ab, dessen Axenwinkel man ganz gut bestimmen kann; beide wachsen fort und bilden so den Zwilling. Eine häufig auftretende Thatsache ist es, dass diese Abzweigungen sich rasch wiederholen und sich so dendritische oder concentrisch faserige Bildungen einstellen, welche sicher nur Zwillingsformen sind.

Diese Beobachtungen deuten darauf hin, dass sich im Momente der Bildung ein Molecül um 180° gedreht an die übrigen anlegt und hiedurch Veranlassung wird, dass sich an dasselbe, gleichsam als ein selbstständiges Krystallisationscentrum, Molecüle anlegen und zum Zwillinge entwickeln, wie diess in nebenstehender Fig. 13 angedeutet erscheint. Dieser Vorgang ist wahrscheinlicher, als dass fertige Krystalle Einfluss auf einen anderen fertigen Krystall zu äussern vermögen würden, einen so kräftigen Einfluss, um ihn zu einer Drehung von 180° und fester Verbindung zu zwingen. Diess würde wahrlich gegen das grossartige Gesetz der Natur sprechen, alles mit den einfachsten Mitteln zu erreichen. Ferner ist der von Lavoisier aufgestellte Satz, dass die Krystallbildung auf der Wirkung von Molecularkräften beruht, wohl durch zahllose Versuche und dadurch bewiesen, dass das ganze jetzige System der Krystallophysik darauf basirt ist, und man wird gut thun, diesen Satz nicht umstossen zu suchen, sondern vielmehr erst die Wirkungen und weiterhin die Ursachen dieser Kräfte zu erforschen.

Fig. 13.



Anziehung zwischen gleichartigen Krystallen findet in keiner anderen Weise statt, als zwischen heterogenen Körpern. Die festen Körper, die sich treffen, bleiben an einander hängen, sie legen sich, sie mögen gleichartig sein oder nicht, am leichtesten mit den grossen Flächen aneinander. Bei sorgfältigen Beobachtungen von Krystallisirungen in dicken Tropfen wird man wohl sehen, dass sowohl Krystalle als auch andere schwebende Theilchen sich nähern und wieder entfernen, ja auch an einander legen, aber Verwachsungen fertiger

Krystalle weder in paralleler noch verwendeter Stellung wird man nicht beobachten.

Ob fertige Krystalle einen krystallogenetischen Einfluss besitzen, darüber sind mehrfache Versuche, aber immer mit negativem Einfluss angestellt worden.

Frankenheim liess in neuerer Zeit, um hierüber zu genauem Aufschluss zu gelangen, auf Krystallen Tropfen anderer Krystalle auskrystallisiren und erhielt ebenfalls negative Resultate, nur von den Substanzen Jodkalium, Chlorkalium, Bromkalium und Salpeter konnte er beobachten, dass sich auf frisch gespaltenem Glimmer die Krystalle regelmässig anlegen. Aber ungeachtet dieser 4 Stoffe ist es dennoch sicher, dass nicht der krystallographische Character, sondern nur die Ebene oder die Adhäsion eine wichtige Rolle spielt.

Dass wie hier erwähnt, die Adhäsion von Einfluss ist, zeigen mehrere Versuche. Auf einer Firnissschichte, welche vom Wasser nicht gut benetzt wird, tritt die Krystallisation weit später ein, als auf einem gut benetzten Körper. Ein Tropfen einer Lösung zieht sich von dem gefirnissten Theile der Glasplatte zurück und bildet auf dem freien grössere Krystalle. Hieher gehört auch das bekannte Factum, dass wenn man den Boden der Abdampfschale der Mutterlauge mit einem Stäbchen reibt, dort sich kleine, zahlreiche Krystalle absetzen.

Sucht man hiefür die Ursachen, so können dieselben nur darin liegen, dass sich die Krystalle leichter an eine rauhe, als an eine glatte Fläche anlegen, indem ihnen eine grössere Oberfläche dargeboten wird, ferner dass dann, wenn die Berührung mit der Unterlage nicht gehindert ist, die kleinen Kryställchen zu Boden fallen, während sie sonst durch den Meniscus getragen in der Flüssigkeit schweben, bis sie durch ihre Schwere diesen Widerstand überwinden.

Es ist daher leicht erklärlich, warum sich zahlreichere Krystalle an irdenen Gegenständen als an Glas ansetzen, warum die im Gefässe ausgespannten Fäden auf die Krystallbildung so befördernd wirken, warum auf den fein gestreiften Quarzflächen sich die Krystalle so zahlreich und regelmässig lagern.

§. 16. Bisher wurde über die Entstehung der Krystalle als Individuum gesprochen und die Thatsachen erörtert, die mit Zuhülfenahme des Mikroskopes hierüber gewonnen wurden; wir haben nun schliesslich der fortschreitenden Entwicklung unsere Beobachtung zu widmen.

Die Krystalle sowohl der Kunst als der Natur haben ihre Eigenthümlichkeiten; betrachten wir letztere, so sehen wird an den Mineralien tausendfältige Beispiele: der Baryt von England und Ungarn, der Rutil von Nordamerika und Südamerika, wie sehr sind dieselben ver-

schieden. Wohl ist die Substanz identisch, wohl das Krystallsystem, die physikalischen Eigenschaften; allein die Entwicklung der Krystalle geht in jedem Falle anders vor sich und bildet für jeden Fundort beinahe einen bestimmten Habitus, durch welchen der Fundort oft selbst sicher und genau bestimmt und erkennbar ist.

Analoge Verhältnisse hiermit gibt es bei den künstlichen Krystallen, so dass unter gewissen Umständen die Krystalle immer in einer bestimmten Stufe der Entwicklung vorzukommen pflegen.

Im Beginne der Krystallisirung wird natürlich die Bildung so symmetrisch vor sich gehen als nur möglich, damit alle Flächen in dem durch die Form bedingten Gleichgewichte stehen, eine Störung dieses Gleichgewichtes durch ein überwiegendes Ausbilden einer Fläche und dem Zurückbleiben der übrigen kann nur dem späteren Entwicklungsstadium des Krystalls angehören, wobei nicht mehr wie anfänglich ein Centrum der Gravitation für die Molecüle stattfindet, sondern wo bereits die grössere Krystalloberfläche attractiv wirkt.

Die Fragen also, welche sich auf die allmälige Ausbildung der Form, auf das Vorkommen einer und derselben Substanz in verschiedenen Habitus beziehen, schliessen sich den Untersuchungen und Beobachtungen über Krystallogenesis auf das innigste an. Zur Beantwortung derselben haben die Beobachtungen von Marbach, Pasteur, Frankenheim, Senarmont und C. Hauer einiges Materiale geliefert.

Als leitender Grundsatz zur Beantwortung dieser Fragen kann mit absoluter Gewissheit angenommen werden, dass nicht der Stoff selbst, sondern nur die Verhältnisse, welche während seiner Krystallisation auf ihn einwirken, die Ursache sein können für die Bildung von Varietäten oder verschiedenen Habitus der Ausbildung einer und derselben Species. Diess folgt wohl unmittelbar aus dem oben aufgestellten Principe der Krystallogenesis, dass jeder Substanz eine ihr bestimmte eigenthümliche Krystallgestalt zukomme.

Betrachtet man also die begleitenden Umstände und Verhältnisse als Ursachen der wechselnden Flächenentwicklung, so können dieselben mannigfach sein und entweder Einfluss bloss auf die Krystallisation oder andererseits auf das Individuum selbst besitzen.

Als Ursachen der ersteren Art pflegt man meist den Grad der Sättigung der Mutterlauge und die Geschwindigkeit der Bildung zu bezeichnen. Wohl beide — mindestens in den meisten Fällen — mit Unrecht. Der Grad der Sättigung kann doch nur beim Beginne der Krystallisation wirksam sein, gleichsam als ein Zustand der Uebersättigung, und es werden daher, wäre letzterer vorhanden, beim Beginne der Krystallisation zahlreiche Krystalle ausgeschieden werden, allein hiedurch wird in der

kürzester Zeit der Gleichgewichtszustand für die Flüssigkeit hervorgerufen, so dass dieselbe während des ganzen Processes des Ausscheiden der gelösten Stoffe immer gesättigt bleibt.

Zu bemerken ist nur der Fall des Vorhandenseins von Beimengungen, denn von diesen wird mit dem allmäligen Erschöpfen der Lösung durch Krystallisation ein immer grösserer Rest zurückbleiben und möglicherweise einen solchen Percenttheil der Lösung bilden, dass dadurch der ganze chemische Charakter der Mutterlauge verändert und daher auch die Varietäten erzeugt werden.

Die Geschwindigkeit, mit der die Bildung vor sich geht, kann jedoch von grösserer Wirkung auf die Ausbildung der Form werden; geschieht die Erkaltung oder Erhitzung und das hiedurch hervorgerufene Concentriren der Lösung sehr rasch, so werden gleichzeitig viele Gravitationscentra für die Krystallbildung erzeugt, und letztere geht rasch und gestört vor sich, unterschieden von dem langsamen, gesetzmässigen und freiwilligen Ausscheiden.

Durch Beschleunigung der Krystallogenesis hat man in der Macht, statt weniger grossen Gestalten mehrere kleinere zu erzeugen; ob aber hiedurch auch ein so bedeutender Unterschied in den Formen hervorgerufen wird, um auch eine Bildung von Varietäten erklären zu können, darüber fehlen alle Beobachtungen, ja es existiren selbst negative Resultate, da mehrere Fälle zeigten, dass schnell präcipitirte, künstliche Krystalle dieselbe Form wie die von der Natur langsam erzeugten besitzen, und dass andererseits Krystalle, die durch jahrelange Sublimation entstanden, idente Form mit anderen, aus Lösung gefällten haben.

Aus einem früher erwähnten Grunde ist es höchst wahrscheinlich, dass bei langsamer Krystallisation durch einen eintretenden Mangel an Stoff sich Abstumpfungsflächen der Ecken und Kanten bilden. Diess kann aber nur stattfinden, wenn sich die Mutterlauge qualitativ verändert hat. Haben sich neue Flächen gebildet, so hat sicherlich, wie bereits oben erwähnt, der Ueberrest der Flüssigkeit, gleichsam erschöpft, als eine andere Substanz gewirkt; oder es sind andererseits diese Flächen nur scheinbar, nach Art der früher erwähnten Treppenlagerung — und letzteres kann vielleicht die von Becquerel[1]) beobachteten Thatsachen erklären.

Eben so wenig wie diese zwei besprochenen Ursachen kann auch die Temperatur, unter welcher die Krystalle gebildet werden, auf die Entwicklung der Varietäten von Einfluss sein — ihre Wirksamkeit ist anderer Art: sie vermag aus einer und derselben Lösung verschiedene

---

[1]) Becquerel. Ann. d. chim. XII. 38. Le Blanc. Journ. de phys. 1788. vol. 33, 374.

Stoffe anszuscheiden. Es ist nämlich eine bekannte Thatsache, dass die meisten Substanzen oder Mineralien, welche aus einer wässerigen Lösung entstanden sind, einen Theil des Wassers zurückbehalten haben als einen integrirenden Bestandtheil, und letzterer ist für dieselbe Substanz ein constanter Procenttheil. Allein aus einer Lösung ist es möglich, durch Wechsel der Temperatur Stoffe abzuscheiden, welche verschiedene Gewichtsantheile von Krystallwasser haben. Beispiele mögen sein: Schwefelsaures Natron und Chlornatrium (Kochsalz); aus der wässerigen Lösung scheidet sich ersteres bei + 15° wasserhältig, bei + 30° wasserfrei ab; letzteres krystallisirt bei — 10° wasserfrei und verliert bei 0°, selbst im Wasser, sein Krystallwasser.

Allein nicht bloss durch ihren Wasserantheil sich unterscheidende Stoffe erzeugt die Variation der Temperatur, sondern selbst genetisch verschiedene Stoffe; ich erwähne Kalkspath und Arragonit, für welche die Untersuchungen G. Rose[1]) lehrten, dass Kalkspath bei + 30°, Arragonit bei + 60° aus einer reinen Lösung von kohlensaurem Kalke fällbar sind.

§. 17. Zur Erklärung des Auftretens neuer Formen und neuer Flächen bleiben nach obigen nur wenige Erklärungsmittel übrig, und diese sind: künstliches Herstellen neuer Flächen, und der Einfluss von Beimengungen.

Ob es möglich ist, durch Anschleifen an einem Krystall neue Flächen zu erzeugen, ist der Gegenstand vielfacher Untersuchungen und Controversen gewesen. Beobachtungen und Theorien haben wir über diesen Gegenstand von Le Blanc[2]), Pasteur[3]), Wackernagel[4]), Marbach[5]), Hauer[6]), Senarmont[7]), Frankenheim[8]).

Beobachtet ward, dass es möglich sei, an Krystallen, welche durch Anschleifen verstümmelt wurden — namentlich wenn die Schnittfläche nahezu parallel einer Krystallfläche ist — spiegelnde Flächen zu erzeugen, die sich im Allgemeinen von Krystallflächen nicht unterscheiden lassen.

Messungen an solchen Formen liegen aber nicht vor, und daher ist der Einwurf von Frankenheim zu beachten, welcher nur zugibt, dass diess Scheinflächen wären, welche sich nicht in vollständig symmetrischer Lage befinden; allein als Uebergangszustände müssen dieselben ihre vollständige krystallographische Berechtigung haben.

---

[1]) G. Rose. Berlin. Acad. Monatsber. 1858. 1860.
[2]) Le Blanc. Journ. de Physique 1788. vol. 33. pag. 374.
[3]) Pasteur. Pogg. Ann. 1857. vol. 100. pag. 161.
[4]) Wackernagel. Karsten Archiv vol. 5. pag. 294.
[5]) Marbach. Pogg. Ann. 1857. vol. 99. pag. 459.
[6]) C. Hauer. Wiener Acad. Sitzungsb. 1860.
[7]) Senarmont. Pogg. Ann. 1857. vol. 100. pag. 158.
[8]) Frankenheim. Pogg. Ann. 37, Cohäsionslehre 1837. pag. 357. Pogg. Ann. vol. III.

Vergleicht man alle über diesen Gegenstand angestellten Versuche, namentlich die von Marbach an chlorsaurem Natron — er erhielt durch Anschleifen diejenigen Flächen, welche den optischen Charakter des Krystalls, die Drehung der Polarisationsebene angeben — mit den bisher über Krystallogenesis entwickelten Grundsätzen, so drängt sich der Gedanke auf, dass, da jeder Substanz eine gewisse Form und Formentwicklung eigenthümlich ist, eine Fläche, die durch Anschleifen dem Individuum aufgedrungen ist, sowohl durch das eben angeführte, formbildende Streben der Substanz, als auch durch den schnellen Wachsthum an verletzten Stellen bald zum Verschwinden gebracht wird, wenn sie auch vollständig symmetrische Lage hätte. Während des Regenerationsprocesses wird man daher solche Kunstflächen in einem Stadium der Entwicklung beobachten, in welchem sich bereits ein Uebergang zu der prädominirenden Gestalt zeigt.

Während dieses Ueberganges kann man sogar vollständig neue, dem Krystalle nicht eigenthümliche Flächen auftreten sehen, wenn dieselben den Uebergang von der verstümmelten zur normalen Form mit dem geringsten Materialaufwand zu bewerkstelligen im Stande sind.

Das Bestreben, die ursprüngliche Gestalt herzustellen, wird aber in keinem Falle vernichtet.

Wichtiger, namentlich für die Erzeugnisse der Natur, sind die der krystallisirenden Substanz oft zufällig beigemengten Stoffe, welche wegen ihrer unvermeidlichen chemischen Wirksamkeit Aenderungen hervorzubringen im Stande sind, die dem Charakter von Varietäten genügen; wollte man ein Beispiel herausheben, so ist es eine allgemein bekannte Thatsache, dass manche Substanzen aus alkoholischen Lösungen mit ganz anderen Formen gefällt werden, wie aus wässerigen.

Diese Wichtigkeit der Beimengung erklärt es daher auch, warum die verschiedenen Lagerstätten der Mineralien auch meist verschiedene Typen der Ausbildung hervorrufen, da ja in ihrem Charakter und in dem Wechsel der mit vorkommenden Mineralien die Andeutung der möglichen Beimengungen gegeben ist.

Die Frage nach der Einwirkung der Lagerstätten würde wohl in der Mineralogie eine grössere Beachtung verdienen, als derselben meist geschenkt wird. Seit den Untersuchungen von Beudant[1]) im Jahre 1816 wurden diesem Gegenstande wenige Untersuchungen gewidmet, und erst in der neueren Zeit gelangt er wieder zu einer Bedeutung; allein der Beobachtungen sind zu wenig, um den Einfluss von Beimengungen für jeden speciellen Fall bereits im voraus aus gegebenen Daten bestimmen zu können.

[1]) Beudant. An. des Mines 1816.

Lässt man die Berzelius'sche Formeltheorie fallen, so muss und kann man auch den Beimengungen — welche oft in nachweisbarer Menge vorhanden sind — selbst in der chemischen Formel einen Platz einräumen.

Vielleicht würde hiedurch vielfach den Intentionen der Natur nachgekommen, welche jedem Stoffe seine eigenthümliche Gestalt und analog hiemit für jede bestimmte Beimengung auch eine bestimmte Varietät vorgezeichnet zu haben scheint.

Schliessen wir mit den eigentlichen genetischen Beobachtungen, so haben wir bisher die Entwicklungsstadien des Krystalls vom Beginne seiner mikroskopischen Bildung bis zu jener Grösse verfolgt, wo er den physikalischen Untersuchungen anheimzufallen beginnt, und es bleibt uns nur noch übrig, auf jene Ansichten einzugehen, welche sich auf die Gruppirung der Molecüle zu Krystallen beziehen.

Viele Hypothesen sind über diesen letzteren Gegenstand veröffentlicht worden; man hat mit richtigem Tacte hervorgehoben die Idee, dass sich aus den Anordnungen der Molecüle die Krystallgestalt und deren physikalische Verhältnisse leicht und ungezwungen ableiten lassen müssen; aber so sehr man auch die Annahmen erweiterte, um sie gleichsam allen Relationen anzupassen, so führten sie doch bis jetzt nur zu einzelnen Lichtpunkten, noch nicht zur geschlossenen Theorie.

# IV. Kapitel.

## Theorien der Krystallogenesis.

§. 18. Betrachtet man den physikalischen Charakter eines Krystalles, so kann man ihn darin suchen, dass jeder endliche Theil, der von der Oberfläche so weit entfernt ist, dass der Einfluss desselben verschwindet, dem anderen gleicht, dass daher eine Kraft, die ein Theil des Krystalles wirkt, nicht abhängig ist von seiner Stellung, sondern ausschliesslich von der Richtung, in der die Kraft wirkt und mit dieser sich verändert.

Alle Untersuchungen an krystallisirten Körpern haben bisher zu diesem Resultate geführt, dass jeder Theil eines Krystalles gleiche Wirksamkeit und gleiche physikalische Eigenschaften wie der ganze besitzt, dass somit diese Eigenschaften nicht bloss der geschlossenen Form, sondern vielmehr den einzelnen bildenden Bestandtheilen inhäriren müssen und nur durch die Form insoweit bedingt wären, als dieselben ebenfalls eine genau bestimmte, innere Anordnung der kleinsten Theilchen voraussetzt.

Bei fast allen Erscheinungen, deren Erklärung es nothwendig macht, auf die Elemente des Körpers zurückzugehen, wird vorausgesetzt, dass diese aus Molecülen bestehen, welche durch Zwischenräume getrennt sind.

Wie am Schlusse des vorigen Kapitels erwähnt, wurde bereits mehrfach versucht, den Aufbau der Krystalle aus diesen kleinsten Theilchen zu erklären; doch die Molecüle müssen so geordnet werden, dass sich aus der Configuration derselben nicht bloss die geometrische Anordnung, sondern auch die allgemeinen physikalischen Eigenschaften ableiten und in Einklang bringen lassen.

Man hat es meist nur versucht, die rein geometrischen Verhältnisse der Körper abzuleiten von einer willkürlich gewählten Lagerung der Molecüle. Will man die Frage nicht weiter verfolgen, als bis zur Krystallographie, so wird man wohl, da das zu Suchende stillschweigend

als Grundbedingung angenommen wird, leicht Complicationen der Molecüle finden, welche in ihrer Symmetrie die Krystallsysteme repräsentiren können; allein hiedurch ist für die wirkliche Erklärung der Krystallogenesis kein Fortschritt gewonnen, da solche Hypothesen einerseits mit den physikalischen Eigenschaften meist im Widerspruche stehen, andererseits aber auch die Frage nicht berücksichtigen, warum bestimmten chemischen Verbindungen bestimmte Formen zukommen.

Die Gruppirung der Molecüle aus den Elementen zum Krystalle soll nicht nur erklären, wie morphologische Symmetrie entstehe, sondern vielmehr, wie es komme, dass dieser oder jener chemischen Verbindung gerade diese oder jene Form zukomme, und dass die physikalischen Eigenschaften der Elemente durch die Gruppirung der Molecüle dieser letzteren die von uns beobachteten krystallo-physikalischen Phänomene erzeuge.

Die Erklärung der Krystallogenesis fällt zusammen mit dem Erkennen des Causalnexus zwischen Materie, Form und physikalischen Eigenschaften, und bildet gleichsam den Gipfelpunkt aller Bestrebungen der Krystallophysik.

Die Gesammtheit der hier aufstossenden complicirten Fragen ist noch weit entfernt, eine befriedigende Lösung erfahren zu haben. Wenn auch bereits seit Beginn der krystallographischen Studien der Frage nach der Bildung vielfache Untersuchungen gewidmet sind, so stehen wir doch erst an der Schwelle der Erkenntniss.

Die meisten Versuche beschränken sich darauf, eine oder die andere der eben gestellten Bedingungen für die Krystallgruppirung zu erfüllen; während die physikalisch-optischen Verhältnisse bisher beinahe unberücksichtigt blieben, gaben einzelne Hypothesen eine allgemeine theoretische Gruppirung der Molecüle ohne Rücksicht auf den chemischen Charakter zur Erklärung der Krystallsysteme, andere hingegen fassten weiter schreitend die Möglichkeit auf, durch Gruppirung der Elementaratome in symmetrische Molecüle aus der chemischen Formel die Krystallgestalt ableiten zu können.

Diese beiden Richtungen müssen in der nachfolgenden Untersuchung berücksichtigt werden, da wir, um die verschiedenen Ansichten kennen zu lernen, auf die einzelnen Arbeiten der Autoren zurückkommen werden; erst am Schlusse sollen einzelne Punkte einer allgemeinen Hypothese, welche aus dem Zustande der heutigen Krystallophysik sich bereits ableiten lassen, erörtert werden.

**§. 19.** Die Hypothesen, welche bloss die morphologische Seite der Krystallogenesis erörterten, unterscheiden sich von denjenigen, die auch die chemischen Bedingungen hinzuziehen, im Wesentlichen dadurch,

dass die ersteren gleichsam die Krystalle aus Molecülen aufgebaut denken, welche alle analog dem Gesammtkörper bereits aus dem Complex der Elementaratome dargestellt sind. Die Frage selbst, wie diese Molecüle aus den Atomen aufgebaut werden, kommt hiebei kaum zur Erörterung.

Im Wesentlichen treten bei dieser morphologischen Richtung dennoch zwei verschiedene Anschauungsweisen bezüglich dieser eben erwähnten Atomgruppirung zu Molecülen auf. Während Bravais die Atome und ihre Lagerung im constituirenden Molecül untersucht, haben die Mehrzahl der übrigen Autoren die Atome selbst als die Form bildenden Molecüle betrachtet.

Die letztere Hypothese ist wohl die einfachste und am leichtesten deducirbare, ihr gehören auch die ersten Untersuchungen auf diesem Gebiete an, wozu wir Huyghens zählen können, auf dessen Ideen gleichsam gestützt, wir Haüy, Dana, ja selbst theilweise Frankenheim die Lösung der Frage versuchen sehen.

Wie bereits in dem Kapitel II erwähnt wird, versuchte Huyghens die Doppelbrechung des Lichtes dadurch zu erklären, dass er für die Körpertheilchen „elliptisch - sphäroidische“ Gestalt annahm; analog hiermit begründete er seine Vorstellung der Bildung des Rhomboeders, welchen er aus denselben Elementen (Fig. 14) gleichsam aufgebaut dachte. Die Spaltung, welche er am Kalkspath in Varietät Doppelspath beobachtete, scheint ihn hierzu geleitet zu haben.

Fig. 14.

Wohl führte er seine Hypothese einer Krystallbildung nicht des ferneren aus, allein die Theorien von Haüy und Dana sind diesem Grundgedanken analog. Haüy's Decrescenzen haben wir bereits betrachtet, als diess zur Erklärung seiner theoretischen Morphologie nöthig war; allein dieselben geben zugleich Zeugniss über die Anschauungsweisen des Autors bezüglich der Krystallbildung. Wohl werden die Sphäroide von Huyghens durch die sieben Grundgestalten ersetzt, allein die Theorie kleinstér Theilchen von für jedes System verschiedenen Formen wird beibehalten, und die Ableitung aller Formen durch Juxtaposition dieser Partikeln theoretisch durchgeführt.

Dana[1]) hat die Hypothesen Haüy's und Huyghens zu vereinen versucht. Er postulirt Molecüle von sphäroidischer Form, deren Axen und conjugirte Diameter den Parameterverhältnissen des Krystalls entsprechen. Das Molecül des tesseralen Systems wird daher eine Kugel, die des pyramidalen ein Umdrehungsellipsoid, die des prismatischen ein

[1]) Dana: Americ. Journ. of Science 1836. vol. XXX. pag. 375.

Ellipsoid mit drei ungleichen Axen sein. Hiedurch wird aber im Wesentlichen die morphologische Bedingung der Systeme bereits im vorhinein adoptirt und nicht wie nöthig aus der Gestalt abgeleitet.

Fig. 15.

Den Aufbau der Gestalten lässt Dana nach den Gesetzen Haüy's (Fig. 15) durch allmälige Aufschichtung vor sich gehen und gelangt hiedurch ebenfalls zur nöthigen Gestaltentwicklung.

Die Untersuchungen Frankenheim's[1]) auf diesem Gebiete gehören wohl zu der Gruppe, welche die Krystalle aus homologen Molecülen gebildet betrachtet, allein von den vorerwähnten unterscheiden sie sich durch andere Annahmen der Symmetrie. Während erstere die Krystalle aus Molecülen entstanden und hierbei den Molecülen die systematische Symmetrie bereits inhärirend denken, hat hingegen Frankenheim nicht die Form der Molecüle, sondern ihre Lage im Raume als das die Systeme trennende Moment angenommen, wobei sich seine Methode auf das von Delafosse angegebene Netzsystem stützt.

Seine Grundsätze sind in Kurzem folgende: In einem homogenen Körper sind die Molecüle nebst ihren Kräften einander gleich, in einem Krystalle sind sie überdiess parallel gelagert, so zwar, dass, wenn eine Linie zwei Molecüle verbindet, jede andere derselben parallele Linie ebenfalls von einem Molecül ausgehend, in gleicher Entfernung ein zweites treffen würde. In einer geraden, durch zwei Molecüle gehenden Linie, Molecularlinie, folgen sich also bis zur Grenze der Krystalle die Molecüle in gleichen Intervallen; in einer durch drei, nicht in einer geraden Linie liegenden Molecüle gehenden Ebene sind diese netzartig vertheilt, so dass man in derselben zwei Molecularlinien als Axen wählen und die Lage der übrigen durch Coordinaten ausdrücken kann.

In der Ebene reicht es zur Congruenz zweier Molecularlinien hin, dass ihre Intervalle gleich sind; geht man aber zu den Bedingungen des Raumes über, so reicht diese erwähnte Gleichheit nicht hin, da hiedurch noch immer die Lage zu den ausserhalb der Ebene gelegenen Molecülen unbestimmt bleibt. Es erübrigt also, um die Molecularlinien des Raumes zu bestimmen, dass ihre Lage gegenüber den Coordinaten des Raumes ermittelt ist. (Diese Bedingung ist nun der der Krystallographie analog.) Die Betrachtung aller möglichen congruenten Molecularlinien führt daher zu 6 Fällen: dem Mangel an Congruenz oder der Congruenz 2, 4, 6, 8, 24 Linien.

---

[1]) Frankenheim. Pogg. Ann. 1837. 97.

Hieraus schliesst Frankenheim, dass es nur 6 Molecularsysteme[1]) (ident mit den Krystallsystemen) gibt und dass bei einer netzartigen Anordnung der Molocüle dies die einzig möglichen sind[2]).

Da die Hypothese Frankenheim's sich auf die bisher erwähnten Sätze der morphologischen Verhältnisse beschränkt und nur noch den Satz in sich schliesst, dass vermöge dieser Anordnung die Spaltbarkeit parallel den Molecularlinien mit kleinsten Distanzen vor sich gehen müsse; so ist hierdurch ersichtlich, dass diese Theorie für die wirkliche Krystallbildung aus den Elementen keinerlei Erklärung abzugeben vermag, wenngleich die Betrachtungsmethode der netzförmig vertheilten Molecüle in derselben am vollständigsten durchgeführt erscheint.

Während die erwähnten Autoren die Krystalle aus Molecülen zusammengesetzt betrachten und deren Symmetrieverhältnisse ermitteln, hat Bravais nach Haüy'schen Principien den Krystall aus Elementarmolecülen construirt, welche selbst wieder aus vielgliedrigen, symmetrischen netzartig verbundenen Atomen bestehen. Bravais verbindet Frankenheim's Betrachtungsmethode mit der Decrescenzen-Theorie von Haüy.

Bravais[3]) theilt über seine Ansichten mit, dass die Anwendung der Theorie der netzförmigen Zusammenfügungen und die Inbetrachtnahme der Axen, Flächen und Mittelpunkte der Symmetrie in Bezug auf die Polyeder, welche in den krystallisirten Substanzen die konstituirenden Atome eines jeden Massentheilchens aus dem Mittelpunkte ihrer Schwere bilden, ihn zu einigen Resultaten führte.

Die Anordnung der Atome erfolgt netzweise. Man nehme an, dass 3 Reihen von Flächen so geordnet sind, dass die verschiedenen Flächen einer Reihe unter sich parallel und gleichweit entfernt sind, ohne je zu denen einer andern Reihe parallel zu werden, so werden die Punkte, unter welchen sich alle diese Flächen schneiden, ein Netzsystem bilden und zugleich geeignet sein, die Mittelpunkte der Massentheilchen darzustellen. Bravais prüft die allgemeinen Eigenschaften der Netze, beweist, dass die Knoten eines gegebenen Netzes zugleich die Knoten anderer Netze sind, deren Fäden sich unter verschiedenen Winkeln schneiden; analog hiermit können auch die Knoten eines Netzsystems auf verschie-

---

[1]) Vergl. Note pag. 16.

[2]) In einer Note zu seiner oben erwähnten Abhandlung fügt Frankenheim hinzu: „Der Beweis für diese, wie für verwandte Sätze habe ich in Crelle: J. f, Mathemat. 1832. VIII. 172 gegeben. Es war diess, wie ich glaube, der erste Versuch einer analytischen Behandlung der Krystallographie."

[3]) Etudes cristallographiques. Paris 1351. (Sep. aus Journ. polytechn.) Compt. rend. 1849. XXIX. 443. L'Institut 1849. XVII. 274.

dene Arten geliefert werden durch die abwechselnden Kreuzungen dreier Reihen von Parallelflächen, welchen Elementarparallelepipede von verschiedenen Formen aber gleichem Volumen entsprechen. Symmetrieaxe eines Netzsystems nennt Bravais eine gerade Linie, welche so gewählt ist, dass es genügt, dem Systeme eine, durch einen gewissen Winkel gemessene Rotation, um diese Axe einzuprägen, um die verschiedenen Knoten einander zu substituiren. Auch ist es leicht einzusehen, dass jede durch einen Knoten gehende Symmetrieaxe entweder mit einer der Kanten des Elementarparallelipipeds, welche diesen Knoten zum Scheitel hat, oder mit einer der Diagonalen entweder des Körpers selbst oder einer seiner Seiten zusammenfällt. Hieraus leitet Bravais sieben Krystallsysteme ab.

Wir sehen aus diesem Abrisse, dass die angeführten Hypothesen Zusammenstellungen von Verhältnissen sind, welche hinreichen, eine krystallographische Aehnlichkeit hervorzubringen. Sie lösen aber nicht das Problem, aus gegebenen Molecülen die Krystallgestalt zu construiren, sondern wählen den entgegengesetzten Weg, gleichsam aus der Symmetrie der Systeme die der Atome ableiten zu wollen. Letzteres kann aber beinahe kein Gegenstand der Erörterung sein, da die Gleichheit und Analogie beider bereits durch den Begriff Krystall selbst gegeben ist; den Uebergang zu finden von den gestaltlosen und sphäroidischen Elementen zu der regelmässigen Form ist ihnen nicht gelungen, da selbst das Einschalten der Atome die Hypothesen Bravais nicht erweiterte, denn im Gegensatze hierzu fasst er die Molecüle als Grundgestalt auf.

§. 20. Der bisher betrachteten Methoden vorzüglichster Mangel ist das vollständige Ignoriren des chemischen Charakters; das Ausseracht-lassen der Relation zwischen den Grundstoffen und der Form der Verbindung, man versuchte durch die symmetrische Lagerung der Molecüle und Atome wohl die Systeme, allein nie die vielfachen wechselnden Grundgestalten eines jeden Systemes zu erklären; letztere sind aber analog den physikalischen Eigenschaften eine Function der Elemente.

Hypothesen, welche die Krystallogenesis auch von dieser höheren Stufe des Causalnexus zu erklären versuchten, sind nur von Delafosse und Gaudin gegeben worden.

Wohl hat Delafosse das bereits bei Bravais erörterte Netzsystem einer genauen Untersuchung gewürdigt[1]), allein für unsern Gegenstand ist von bedeutender Wichtigkeit eine kurze Notiz[2]), worin er seine Gedanken über den Einfluss der chemischen Verbindung auf die

---

[1]) Delafosse. L'Institut XXIV. 252.
[2]) Delafosse. Compt. rendus. XXVI. 90.

Gruppirung der Atome zu Molecülen ausspricht. Diese sind: die Bestandtheile einer chemischen Verbindung bilden zum Theil den Kern, znm Theil die Hülle eines Krystallmolecüls und die Form desselben hängt zusammen mit der Anzahl der Kern- und Hüllatome. Im tesseralen Systeme kommen einfache holoedrische Formen vor mit 6, 8, 12, 24, 48 Flächen; ein Beispiel wäre der Alaun: er enthält 24 HO, welches Hüllenatome sind, so dass jedem Atom eine Fläche des Krystallmolecüls entspricht. Aehnlich fasst Delafosse die Krystallform pyramidaler und hexagonaler Krystalle auf, doch entwickelt er die sich ergebenden Sätze nicht und gibt auch keine Anwendung.

Wichtiger sind noch die Meinungen Gaudin's, wohl nicht wegen ihrer formellen Richtigkeit, als wegen der hierbei behaupteten Allseitigkeit.

Gaudin[1]) nimmt an, dass die Molecüle aus Atomen zusammengesetzt sind, welche letzteren den in der Verbindung vertretenen Aequivalenten der Grundstoffe analog sind. Die Form der Molecüle — also indirect die Anzahl und die Art der Atome — bedingen die Krystallform. Beispielsweise würden 3 Atome *A* eine gleichseitige dreieckige Basis, 2 Atome *B* dazu eine durchgestreckte Axe vorstellen.

Die hier in Betracht kommenden Principien[2]) für die Bildung der Molecüle aus den Atomen lassen sich durch folgende Punkte charakterisiren.

Ausser den vieratomigen Molecülen einiger einfacher Körper sind ohne weitere Ausnahmen alle Molecüle aus Fäden von Atomen gebildet, die der reellen oder fingirten Axe des Molecüls parallel sind. Mit Ausnahme des tesseralen Systems sind alle Krystalle ohne Ausnahme aus solchen Molecülen gebildet, deren reelle oder fingirte Axen mit einander parallel sind, d. i. parallel den Atomfäden, die das Molecül ausmachen.

Die Molecüle der ersten Ordnung, d. i. Molecüle, worin ein Atom einer Art in gerader Linie zwischen zwei Atomen einer andern Art liegt, sind das erzeugende Element für alle zusammengesetzten Molecüle, die ein Centrum haben.

Somit sind Kieselsäure $Si\Theta_2$ und Wasser $H_2\Theta$ analog dem erwähnten Molecüle erster Ordnung und die Analogie zeigt sich in der rhomboedrischen Form. Eben solche Anordnung haben Zinnsäure, $SnO_2$, Kohlensäure $C\Theta_2$, schwefelige Säure $S\Theta_2$.

[1]) Gaudin. Compt. rendus. XXV. 664.
[2]) Gaudin. Archiv d. Pharm. LXXI. 172.
[3]) H = 1 O = 16.

Ausser diesen Axen mit drei Atomen gibt es welche mit fünf und mit sieben Atomen, auch sie werden lineare Molecüle bilden.

Aus einer Gruppirung dieser Molecularaxen nun zu einem höheren Complex sucht Gaudin die Symmetrieverhältnisse zu bilden, die der Form der Krystalle entsprechen, und man kann sich denken die Molocu-largruppen, die dann gleichsam die Grundgestalt liefern, aus Axen erster, zweiter, dritter Ordnung zusammengesetzt. So enthält beispielsweise (Fig. 16) das wasserhaltige Calciumchlorür $\mathrm{Ca\,Cl_2} + 6\mathrm{H_2O}$ und krystallisirt in hexagonalen Prismen. Das Calciumchlorür ist eine Axe der ersten Ordnung und der Hauptaxe; das Gesammtmolecül besteht aus sieben parallel gestellten Axen, womit sich gleichsam die Analogie mit dem sechsseitigen Prisma von selbst ergibt.

Fig. 16.

Diese aufgeführten Sätze und Beispiele mögen genügen, um die Gaudin'schen Hypothesen richtig würdigen zu lernen. Wenn man auch mit diesen Ansichten nicht vollständig einverstanden sein kann — sie sind ferner vom Autor nicht auf die höchste Stufe der für sie möglichen Entwicklung gebracht — so zeigen sie doch von dem richtigen Bestreben, nicht wie die früheren, aus krystallographischen Theorien die Gestalt ableiten zu wollen, sondern unabhängig hiervon aus der chemischen Formel einen Schluss auf die übrigen Verhältnisse zu versuchen. —

Erwähnen wir noch schliesslich die Ansicht Scharff's [1]), dass die Molecüle sich in der Richtung der Axen aneinanderlegen und dann erst die Zwischenräume ausfüllen, also eigentlich die Axen wachsen, so haben wir die hauptsächlichsten Theorien über die Krystallogenesis besprochen. Dass dieselben nicht genügen, dass sie das vorliegende Problem der Natur nicht gelöst haben, ist wohl aus dem angeführten mehr als hinlänglich ersichtlich; ja noch mehr, sie haben nicht einmal ihre Vorarbeiten so weit gefördert, dass es möglich wäre, in Folge des Fortschrittes der Wissenschaft auf den bisher betretenen Pfad auch nur einen Schritt vor zu machen.

§. 21. Im Nachfolgenden soll nun keine vollständige Hypothese gegeben werden, da die Wissenschaft noch nicht auf den Standpunkt angelangt ist, diese Frage zu lösen; sondern nur einzelne Notizen sollen dazu dienen, den Weg zu erläutern, der bei der Untersuchung auf diesem Gebiete der allein richtige sein kann.

Da es unzweifelhaft ist, dass alle physikalischen und morphologischen Eigenschaften nur eine Function der Materie sind, da sie nur mit

[1]) Scharff. Krystall und Pflanze.

ihr wechseln, so müssen beide gleichmässig aus Einer Anordnung der Molecüle ableithar sein. Es ist daher nothwendig, all' die Gesetze der wechselseitigen Beziehungen zwischen Materie, Form, Theilbarkeit, Dichte, optischen und magnetischen Verhältnissen zu kennen.

Wohl haben wir uns viele Kenntniss der quantitativen Werthe auf diesem Gebiete verschafft, allein es fehlt das belebende Princip bei den meisten, die Erkenntniss des Gesetzes, welches sie beherrscht, somit ist es auch unmöglich, die Frage der Krystallogenesis erschöpfend zu ermitteln. Erst in neuester Zeit sind einige Vorarbeiten hiezu geschehen.

Wollen wir aber, dessungeachtet auf dies Kapitel eingehen, so lässt sich mit Sicherheit sagen, dass Scharff Unrecht hat, wenn er den Krystallen eine gleichsam selbstständige Kraft zuschreibt. Nicht Leben liegt in den leblosen Gebilden der Chemie und Mineralogie, bloss die Gesetze der Natur in ihrer abstracten Form; gleich wie die Welten leblos in ihren Bahnen dahin kreisen, ein Zeugniss gebend von der Allmacht der Gesetze, so baut sich still und geräuschlos aus den Atomen ein Krystall in der leblosen Welt.

Die Atome der Ruhe überlassen, beginnen sich zu sondern aus ihrer Mutterlauge, in welcher sie suspendirt waren, der labile Gleichgewichtszustand wird verlassen und es tritt für die Substanz das stabile Gleichgewicht ein.

Nach dem Charakter der Substanz, welche die Grundstoffe unter der Einwirkung ihrer Affinität und der bei der Krystallisation wirkenden Momente zu bilden genöthigt sind, verbinden sich die Elementar-Atome zu Complexen — Molecülen — durch welche der chemische Charakter gegeben wird; aber diese Molecüle werden zugleich je nach der, den chemischen Eigenschaften entsprechenden Anzahl von Atomen verschiedene Form und auch Dichte besitzen. Jedes Molecül wird dadurch zu einer dem System sowohl als dem speciellen Körper entsprechenden Grundgestalt.

Mit dieser Grundgestalt ist aber auch zugleich die Dichte[1]) gegeben, da dieselbe von der Gruppirung der Atome im Molecül abhängig gedacht werden kann. Da die optischen Eigenschaften ferner nicht nur eine allgemeine Function der chemischen Eigenschaften, sondern auch der Dichte sind, so enthält die oben gegebene Annahme sie ebenfalls. Die Summirung der optischen Eigenschaften aller im Molecül enthaltenen Atome

[1]) Die Dichte von der Gruppirung der Molecüle zum Krystalle abhängig zu machen, ist wohl im Allgemeinen nicht möglich, indem ja das specifische Gewicht als eine allgemeine Eigenschaft des Stoffes bereits den Molecülen inhäriren muss — wie wäre es sonst möglich, dass die vielen isomeren Stoffe der organischen Chemie bei gleicher Atomanzahl und gleicher Temperatur und überdiess im labilen Gleichgewichte des Flüssigkeitszustandes verschiedene Dichten besässen.

gibt das Brechungsvermögen der Substanz; die Dichte — hiermit eingeschlossen die Krystallgestalt — modificirt dasselbe für die drei Coordinaten des Raumes.

Fig. 17.

In Figur 17 sei ein Schema der Anschauungsweise gegeben. Während im ersten Falle die Atome im Molecül symmetrisch sechsseitig gruppirt sind, der Krystall gleichmässige Dichte des Molecüls, daher auch gleiche optische Phänomene besitzt, ist im zweiten Fall die Dichte und das optische Verhalten analog der Form einseitig verschoben. —

Diese wenigen Betrachtungen mögen genügen als Andeutung der Methode für weitere Forschungen auf diesem Gebiete, sie zeigen zugleich, wie schwer es ist, auf Grund aller vorhandenen Bestrebungen Schritt für Schritt auf diesem Gebiete vorzudringen.

Hier ist der Fall vorhanden, dass alle Eigenschaften zugleich auftreten, und wir uns sinthetisch Bahn zur Erkenntniss brechen müssen. Direct werden wir trotz manchen Visionen nie Krystallbildung zu sehen bekommen und so müssen wir geduldig der Zeiten harren, wo des Physikers Geist den Causalnexus erfasst und es ihm gelingt, aus Atomen sich eine Welt im Kleinen zu bauen.

# V. Kapitel.

## Ueber Allotropie und Isomerie.

§. 22. Während die vorhergehenden Untersuchungen von der Ansicht geleitet wurden, dass jeder chemischen Verbindung gleichsam als einem bestimmten Complex von Grundstoffen eine eigenthümliche, dieselbe genau charakterisirende Krystallgestalt zukomme, müssen jetzt diejenigen Fälle erörtert werden, wo diess Gesetz seine Giltigkeit verliert und der Gegensatz zu demselben Anerkennung und Berechtigung gefunden hat.

Die hier erwähnten Ausnahmszustände sind zweifacher Art: entweder treten gleiche chemische Verbindungen in mehreren Krystallformen auf, oder mehrere chemische Verbindungen in einer Krystallgestalt; ersteren Fall nennt man Polymorphismus, der zweite umfasst hingegen Isomorphismus und Pseudomorphosen.

Diese Ausnahmszustände von dem eigentlichen Grundgesetze der Krystallographie erregten bei ihrem ersten Bekanntwerden Zweifel an ihrer Richtigkeit; das hervorragendste Beispiel des ersten Falles — die polymorphen Zustände des kohlensauren Kalkes als Arragonit und Kalkspath — rief vielfache Hypothesen zu seiner Erklärung hervor, bevor die Möglichkeit einer Ausnahme vom Gesetze zugegeben ward. Zuerst wurde die Krystallgestalt des Arragonits von der des Kalkspathes abgeleitet, — diess versuchten Haüy und Bournon — da erstere Form eine nahe orthohexagonale Symmetrie besitzt, so hielt man diess für hinreichend, um die Hypothese darauf begründen zu können; da schliesslich die Krystallographie diess Auskunftsmittel verwarf, war man erfreut, als eine Analyse des Arragonits einen Gewichtsantheil von Strontium darin nachwies, gleichsam um für das Aufgeben der krystallographi-

schen Hypothese eine chemische Erklärung des abnormen Zustandes zu gewinnen.

Mit der Ausbreitung der organischen Chemie wurden diese Ausnahmsfälle zahlreich und mussten dieselben endlich als ebenfalls einem Gesetze unterworfen angenommen werden.

In diesem Kapitel sollen die Verhältnisse des Polymorphismus erörtert werden, in den beiden nächstfolgenden die des Homöomorphismus (Isomorphismus) und der Pseudomorphosen.

Wenn alle Körper polymorph genannt werden, welchen bei gleicher chemischer Zusammensetzung verschiedene Krystallgestalten zukommen, so lassen sich dieselben in zwei Gruppen trennen. Die polymorphen Substanzen können entweder, im amorphen Zustande betrachtet, eine gleiche, nicht unterscheidbare chemische Verbindung bilden, oder auch im Zustande der Amorphie verschiedene und trennbare Stoffe darstellen; ersteren Fall nennen wir Allotropie, letzteren Isomerie.

§. 23. Die Allotropie, meist unter dem speciellen Namen Dimorphismus betrachtet, ist wohl derjenige Zustand, welcher als wahre Polymorphie Einer Substanz aufgefasst werden könnte.

Denn die chemische Analyse vermag die Stoffe nicht zu unterscheiden, selbst für dieselben keine bestimmten — wenn auch geringfügige — Beimengungen sicherzustellen, so dass für dieselben die Identität der Substanz (mindestens für den Zustand, in welchem sie der Untersuchung vorliegt) angenommen werden muss.

Wohl wurde, wie oben erwähnt, Arragonit durch die Beimengungen als verändert erklärt und in jüngster Zeit[1]) analog hiemit Rutil; allein wenn auch früher (Kap. III.) die Beimengungen als derjenige Factor hingestellt wurden, welcher fähig ist, Abweichung vom Habitus und Varietäten zu erzeugen, so dürfte derselbe hingegen kaum genügen, um ein vollständiges Verlassen der Krystallgestalt und des Krystallisationssystemes hervorzurufen.

Die gewichtigsten Gründe, welche gegen die letztere Hypothese sprechen, sind in neuester Zeit gegeben worden[2]). Zwar variiren bei allotropen Substanzen alle jene Eigenschaften, welche Function der Gestalt sind, Härte, specifisches Gewicht und allgemeine optische Phänomene; allein nachdem eine Function entdeckt ward, welche den Zusammenhang der optischen Eigenschaften mit der chemischen Zusammensetzung erklärte, wurde bald erwiesen, dass die allotropen Medien chemischgleiche Verbindungen seien, da sie gleiche Einwirkung auf die Fortpflanzung des Lichtes ausüben.

[1]) Tschermack. Wien. Ac. Sitz. 1863.
[2]) Schrauf. Pogg. Ann. 1863.

Nach diesen Erörterungen bleiben von den versuchten Erklärungen der Thatsache, dass für eine und dieselbe Substanz mehrfache Gestalten möglich sind, nur zwei Hypothesen übrig.

Die erste derselben nimmt an, dass die Verhältnisse, unter welchen die Krystallbildung vor sich gegangen ist, z. B. die Temperatur der Mutterlauge, Ursache von der geänderten Molecüllagerung sei; einige der später erwähnten Beispiele geben hiezu Belege; die zweite derselben leugnet die Allotropie in so weit, dass sie die polymorphen Formen der Natur nicht einer Substanz zuschreibt, sondern mehreren, welche aber durch chemische Umwandlungen schliesslich ident wurden. Wir hätten somit nur im ersten Falle eine geänderte Atomgruppirung, da ja im zweiten, als einer chemisch-mechanischen Metamorphose, kein Grund hiezu vorhanden ist; aus dieser Betrachtung ergäbe sich dann zugleich, dass für letztere eine Gleichheit der optischen Phänomene und deren Unabhängigkeit von der Krystallgestalt zu fordern möglich wäre, ein Faktum, welches bei Rutil, Brookit und Anatas nicht vorhanden und bei Pseudomorphosen nicht ermittelbar ist.

Nach diesen Versuchen, die Gründe der Erscheinung im allgemeinen anzugeben, heben wir aus den vorhandenen Beispielen einige der wichtigeren heraus.

Die erste entschiedene Hinweisung auf diesen Gegenstand gab Mitscherlich, indem er zeigte, dass der Schwefel, wenn er aus dem Zustand des Geschmolzenseins krystallisire, monoclinische Krystallformen habe, während er aus einer Schwefelkohlenstofflösung gefällt im prismatischen Systeme krystallisire. Unter den Grundstoffen ist ferner Kohlenstoff allotrop: orthohexagonal als Graphit, tesseral als Diamant; unter den Metalloxyden Kupferoxydul, tesseral als Rothkupfererz und orthohexagonal als Kupferblüthe; ferner Titansäure als Rutil, Anatas und Brookit.

Diese drei letztgenannten Mineralien, für welche eine und dieselbe chemische Formel angegeben wird, krystallisiren in zwei Krystallsystemen. Brookit ist prismatisch, Rutil und Anatas pyramidal, allein selbst die Formen der beiden letzteren sind nicht auf einander reducirbar und haben daher getrennte Grundformen. Es ist dies ein Beispiel einer Trimorphie im Mineralreiche. An dieser Gruppe hat Volger[1]) die Hypothese einer Metamorphose angewendet. Er erklärt die Formen als übrig gebliebene Spuren von verschwundenen chemischen Verbindungen, die aus ihrer Gestalt verdrängt und durch eine andere ersetzt wurden. So wären also Rutil, Anatas, Brookit durch drei Titanverbindungen erzeugt worden

[1]) Volger. Entwicklungsgeschichte der Mineralien.

die sich aber durch ihre Oxydations- oder Hydratstufe unterschieden hätten und erst durch chemische Umwandlung Titansäure geworden wären.

Eine Verbindung der Fälle von Isomorphie und Polymorphie geben arsenige und antimonige Säure. Die Krystallgestalten beider sind gleich, allein beide Substanzen krystallisiren sowohl im tesseralen als prismatischen Systeme.

Die interessantesten Beispiele für das Verhalten allotroper Körper bieten Quecksilber-Jodid und kohlensaurer Kalk dar.

Quecksilberjodid krystallisirt sowohl aus Lösungen als auch bei Sublimation in nicht hohen Temperaturen in rothen Tafeln, die dem pyramidalen Systeme angehören; hingegen bei Sublimation in sehr hoher Temperatur in gelben prismatischen Formen. Die rothen Tafeln werden beim Erhitzen jedesmal gelb und beim darauffolgenden Erkalten wieder roth — die gelben hingegen behalten wohl ihre Farbe bei sorgsamen Erkalten, allein bei der schwächsten Reibung oder Berührung färbt sich der berührte Punkt roth und diese Färbung setzt sich durch den ganzen, so weit continuirlich, Krystallhaufen fort. Es bleibt hier nach dieser eingetretenen Metamorphose wohl die äussere Form der gelben Krystalle erhalten, allein die Molecüle haben sich anders gelagert und dieselbe Gruppirung wie im rothen allotropen Zustand angenommen, da diese Umwandlungsproducte (man pflegt ähnliche Umwandlungsproducte Paramorphosen zu nennen), gleich den wirklichen Krystallen beim Erwärmen gelb, beim Erkalten roth werden.

Analog hiemit verhält sich der kohlensaure Kalk; als Kalkspath gehört er dem orthohexagonalen, als Arragonit dem prismatischen System an; im ersten Falle ist seine Dichte 2.731, im zweiten 2.931. Aus einer Auflösung des kohlensauren Kalkes im Kohlensäure haltigen Wasser scheidet sich derselbe bei einer freiwilligen Verdunstung in Calcitrhomboedern aus, bei der Siedhitze hingegen in Arragonit-Krystallen. In neuester Zeit hat G. Rose[1]) vielfache Untersuchungen hierüber angestellt, welche ergaben, dass Arragonit sich nur bei einer Temperatur von ungefähr $+ 40^0$ bilden könne, und dass bei mässigerer Wärme immer Calcitkrystalle erzeugt werden. Allein trotzdem, dass Arragonit bei so bedeutender Wärme erzeugt wird, vermag er doch nicht höheren Temperaturen zu widerstehen; er zerfällt bei schwacher Glühhitze, ohne Gewichtsverlust zu einem weissen und undurchsichtigen Pulver von der Dichte des Kalkspaths. Er besitzt somit durch die Temperatur bestimmte Grenzen seiner Existenzfähigkeit.

§. 24. Diese bisher erwähnten Beispiele waren alle dem Gebiete der Mineralogie entnommen, oder waren unorganische chemische Verbin-

[1]) G. Rose. Berlin. Ac. Mon. Ber. 1860.

dungen; allein nicht auf diese Fälle ist der Polymorphismus der Substanzen beschränkt, sein ungleich häufigeres Vorkommen bieten die organischen chemischen Verbindungen dar, obgleich er hier als specieller Fall nur unter dem Namen der Isomerie bekannt ist.

Insofern letztere manche Aufklärungen über allotrope Zustände darbietet, muss sie selbst in der physikalischen Mineralogie ihre Berücksichtigung finden.

Wenn wir isomere Körper diejenigen nennen, welche bei gleicher chemischer Constitution verschiedene Formen bilden, so können diese unterschieden werden in metamere und polymere, je nachdem die Gewichtsantheile der Grundstoffe absolut gleich, oder multipla sind.

Als Repräsentanten der Metamerie können uns gelten: Propionsäure, ameisensaures Aethyl, essigsaures Methyl, alle drei gebildet nach der atomistischen Formel $C_3H_6O_2$ [1]), Essigsäure und ameisensaures Aethyl sind $C_2H_4O_2$ — Zucker, Stärke, Dextrin ist $C_6H_{10}O_5$ — Weinsteinsäure und Traubensäure $C_4H_4O_5$. Beispiele für die Polymerie geben namentlich die zahlreichen Kohlenwasserstoffverbindungen.

Für diese erwähnten Stoffe nun sind nicht bloss die chemischen Eigenschaften, sondern auch die physikalischen, soweit sie ermittelbar sind, verschieden, ungeachtet sie eine entweder absolut oder relativ idente Verbindung der Grundstoffe darstellen. Die Chemie ging daher bereits seit Anfang von dem Bestreben aus, einigermassen die Unterschiede auch bereits in der Formel ersichtbar zu machen.

**Berzelius** hat die hypothetischen näheren Bestandtheile angegeben, während die neuere Typentheorie die moleculare Constitution berücksichtigt und den Unterschied der Verbindungen in der verschiedenen Gruppirung der Elemente zu secundären Bestandtheilen begründet.

Dieses Bestreben der Chemie ist darauf gerichtet, aus den chemischen Eigenschaften der Körper auf ihre molecularen Verhältnisse Schlüsse zu ziehen.

§. 25. Betrachten wir nach diesen Erörterungen die Verhältnisse der Allotropie und Isomerie, so finden wir in beiden gleichmässig ein und dasselbe Factum: dass mehrere idente chemische Verbindungen verschiedene Eigenschaften besitzen; wir können daher — obgleich für die isomeren Körper, wie oben gesagt, die Chemie verschiedene Formeln einführt — beide unter einem Gesichtspunkt betrachten. Auf diesem Gebiete wurden zwei ähnliche Erklärungen versucht.

Polymorphismus einer Verbindung kann nur dadurch möglich sein, wenn die einzelnen constituirenden Bestandtheile oder die Grundstoffe

[1]) $H = 1$ $O = 16$ $C = 12$.

selbst verschiedene Eigenschaften erlangen — in Betracht wurde hieher gezogen die Dichte und die Lichtfortpflanzung.

Bödeker[1]) versucht die Dichtigkeitszustände der allotropen Körper durch die Annahme abzuleiten, dass die Grundstoffe das Vermögen besitzen, je nach dem Charakter der Verbindung — in verschiedenen Dichtigkeitszuständen aufzutreten. Aus mehreren hundert Daten werden nun jene specifischen Gewichte ermittelt, welche die Grundstoffe, um den Beobachtungen zu genügen, besitzen müssen; es resultirt, dass beinahe jeder derselben zwei oder mehrere allotrope Zustände mit verschiedenem specifischen Gewichte besitzt. Wohl führten diese Untersuchungen bisher zu keiner absoluten Gesetzmässigkeit, allein die vollste Beachtung verdient der Fortschritt, den Fall in Betracht gezogen zu haben, dass ein und derselbe Grundstoff in einer Verbindung mit verschiedener Dichte, also auch geänderten Molecularzuständen auftreten kann.

Die bekannten allotropen Zustände einiger Grundstoffe selbst erweisen die Möglichkeit dieser Annahme.

Während die Untersuchungen Bödeker's bloss auf die Dichte sich bezogen, bestrebten sich neuere Untersuchungen[2]), die optischen Phänomene und namentlich die quantitativen Werthe der Lichtfortpflanzung zur Ermittlung der Atomistik zu benützen, und es gelang, viele wichtige Theorien aufzustellen: im nachfolgenden sollen die Hauptpunkte als Erklärung des Polymorphismus zusammengefasst werden.

Diese Untersuchungen stützten sich auf die ermittelten Zahlen, welche für allotrope und isomere Körper die Einwirkung der Atome auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes angibt. Das Resultat der Vergleichung ergab, dass allotrope und metamere Körper ein identes, hingegen die Mehrzahl der polymeren ein von der Gruppirung der Atome abhängiges Refractionsvermögen besitzen, woraus folgt, dass in den beiden ersteren die Grundstoffe mit gleichen Eigenschaften und daher gleicher Atomistik auftreten, während bei den letzteren die Grundstoffe verschiedene Eigenschaften in jeder der polymorphen Verbindungen hat.

Man kann daher sagen: die Stoffe besitzen die Fähigkeit, sich aus einer gewissen Anzahl von Atomen, mit bestimmter Gliederung derselben zu Molecülen und hiedurch bestimmten physikalischen Eigenschaften zu constituiren. Diese Anzahl der Atome ist aber unter gewissen Bedingungen und innerhalb gewisser Grenzen variabel und daher möglich, dass der Atomcomplex andere Functionen in mehreren Fällen hervorruft.

---

[1]) Bödeker. Bezieh. zwischen Dichte und Zusammensetzung 1860.

[2]) Schrauf. Ueber den Einfluss der Dichte und chemischen Zusammensetzung auf die Fortpflanzung des Lichtes. Pogg. Ann. vol. 116 und vol. 119.

Da die optischen Eigenschaften der allotropen und metameren Körper ident sind, müssen die Grundstoffe in der gleichen Zahl der Atome auftreten, hingegen ist in denselben die Gruppirung der Atome selbst zu Molecülen eine verschiedene. Durch die Bedingungen, unter welchen der Körper sich bildete oder krystallisirte, wird wechselnd durch dieselben Atome andere Molecüle mit anderen physikalischen Eigenschaften gebildet. Wollte man diese Molecularbildung in solchen Substanzen durch ein Beispiel darstellen, so könnte man sagen, ein Stoff enthält in einem Molecül die halbe Anzahl der Atome, welcher der zweite ihm isomere besitzt.

Die polymeren Körper sind hingegen — in ihrer Mehrzahl — nicht von einander ableitbar durch ein einfaches Multiplum ihrer physikalischen Atome, sondern nur erklärbar durch die Annahme verschiedener physikalischer Atome ihrer Bestandtheile. Beispielsweise erfordert die Berechnung des Brechungsvermögens der polymeren Stoffe Parasorbinsäure $\text{Є}_6\text{H}_8\Theta$ und benzoesaures Amyl $\text{Є}_{12}\text{H}_{16}\Theta_2$ für erstere die Combination der physikalischen Atome $6\text{Є}'$; $8\text{H}$; $\Theta$, für letztere $20\text{Є}'$; $2\text{Є}''$; $16\text{H}$; $2\Theta$ — wo die Eigenschaften und daher die physikalischen Atome selbst von $\text{Є}'$ und $\text{Є}''$ verschieden sind (vergl. Schrauf. Pogg. Ann. 119. pag. 558 und 569). Im Einklange hiermit stehen auch manche chemische Gründe. Ich erwähne die Erklärung der Allotropie des kohlensauren Kalkes von Tschermak (über Feldspathe. Wien. Acad. 1865) durch die Annahme der Formeln $\text{Єa}\text{Є}\Theta_3$ und $\text{Єa}_3\text{Є}_3\Theta_9$ für Arragonit und Kalkspath — sowie andererseits die bekannten drei Modificationen der Phosphorsäure, welche wohl genügend für die Möglichkeit des Vorkommens physikalisch verschiedener Atome eines Grundstoffes sprechen.

Die allotropen und metameren Körper sind daher Verbindungen gleicher Stoffe — in multiplen Verhältnissen — mit verschiedener Dichte und Form, die polymeren hingegen meist verschiedene Verbindungen verschiedener Stoffe; erstere müssen gleiche Atome und durch die Atomzahl verschiedene Molecüle — letztere bereits verschiedene Atome enthalten.

# VI. Kapitel.

## Theorien des Homöomorphismus.

§. 26. Vielfache Beobachtungen haben nachgewiesen, dass verschiedene Stoffe in Formen krystallisiren, welche sich in ihren morphologischen und physikalischen Eigenschaften unendlich nahestehen. Man hat dieses Factum anfänglich mit dem Namen Isomorphismus belegt, da man — durch die damals annähernd genauen Messungen verleitet — glaubte, dass die Formen sammt allen ihren Eigenschaften vollkommen ident sind. Doch mit dem Fortschritte der Untersuchungen auf diesem Gebiete fand man, dass die Identität keineswegs vollständig sei, und man ward geneigt, die Theorie des Isomorphismus zu beschränken oder vollständig fallen zu lassen — diess wohl mit Unrecht; denn wenn auch nicht absolute Identität, so herrscht doch sicher Analogie und Aehnlichkeit, und viele Untersuchungen haben zur Genüge erwiesen, dass wirklich Reihen von analogen Stoffen vorhanden sind, welche wegen ihrer physikalischen und morphologischen Aehnlichkeit homöomorph genannt werden können.

Während im vorhergehenden Kapitel jene Verhältnisse erörtert wurden, welche entstehen, wenn einer chemischen Verbindung mehrere Krystallformen eigen sind, so soll im vorliegenden der dort angedeutete zweite Fall erörtert werden, dass mehrere, aber ähnliche Verbindungen eine nahezu gleiche Form besitzen, die Analogien in ihrem physikalischen Verhalten müssen einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben.

Gehen wir nun auf die genetische Entwicklung der Theorie des Homöomorphismus über, so ist es unläugbar, dass durch die von Mitscherlich[1]) aufgestellten Theorien des Isomorphismus ein Schritt versucht ward, welcher über den Zusammenhang zwischen Krystall-

[1]) Mitscherlich. Poggendorf Annalen.

gestalt und chemischer Constitution einige Aufklärung zu geben beabsichtigte — er bewies, dass es Stoffe von chemisch verschiedener Beschaffenheit, aber gleich gebauter Formel, atomistischer Zusammensetzung und Krystallgestalt gibt, welche einander im Verhältniss ihrer Aequivalente vertreten können, ohne dass die Krystallform der betreffenden chemischen Verbindung dadurch sich wesentlich ändert.

Betrachtet man die Forschungen der früheren Gelehrten, so findet man wohl bei einzelnen bereits Andeutungen, dass auch sie in dieser Beziehung einen Zusammenhang zwischen ähnlichen Verbindungen vermutheten[1]), allein der Nestor der Krystallographie, Haüy, verfocht immer noch siegreich gegen sie seine Meinung: dass die Krystallgestalt durch die chemische Zusammensetzung so sehr bedingt ist, dass jede Aenderung in letzterer auch erstere modificire.

Erst durch die Bemühungen Mitscherlich's gelang es, das Gesetz der Analogie der chemischen und morphologischen Aehnlichkeiten aufzuklären und durch zahlreiche Beispiele zu beweisen. Seine Versuche ergaben, dass die Verbindungen von Phosphorsäure oder Arsensäure, Schwefel- und Selensäure, Mangan- und Chromsäure, Ueberchlor- und Uebermangansäure mit einer Basis in gleichen Gestalten krystallisiren, dass ferner auch durch Substitution eines Aequivalent einer solchen isomorphen Säure in die andere analoge Substanz die Form keine Veränderung erleidet. Wie hier die Säuren gleichsam die Isomorphie vermitteln, so ist es auch möglich, dass Basen dieselbe Rolle zufällt. Baryt, Strontian, Bleioxyd sind beispielsweise solche isomorphe Basen, wie die kohlen- und schwefelsauren Verbindungen die Mineralien Baryt, Anglesit, Cerussit deutlich zeigen.

Nach diesen Anschauungen der Isomorphie können sich die isomorphen Körper derselben Gruppe theilweise ersetzen, d. h. es können mehrere derselben in einem Krystalle zugleich auftreten, ohne dass die Form eine andere wird, als wenn nur einer derselben vorhanden wäre.

Man hoffte daher auch aus der Isomorphie von Verbindungen auf die Isomorphie der Bestandtheile schliessen zu können. Man dachte, sind die Summen der Bestandtheile $a + b + c$ und $a + b + d$ isomorph, so müssen auch $c$ und $d$ isomorph sein, um auf diesem Wege den Isomorphismus und daher annähernd die Krystallgestalt von Substanzen zu ermitteln, die man für sich nicht krystallisirt erhalten kann.

Mit dem Fortschritte der krystallographischen Bestimmungen der chemischen Producte wurden immer mehr Fälle bekannt, in welchen Formgleichheit herrscht. Es überschreitet die Grenzen vorliegenden

[1]) Fuchs. Schweigg. Journ. 1815. XV. 382.

Werkes, die isomorphen chemischen Substanzen anzuführen [1]), und beschränke mich, die wichtigsten mineralogischen Vorkommnisse zu erwähnen. Pyramidal: Zinnstein und Rutil; Scheelit, Stolzit, Wulfenit. Orthohexagonal: Apatit, Pyromorphit, Mimetesit; Calcit, Natronsalpeter, Magnesit, Mesitin, Sphärosiderit, Diallogit, Smithsonit; Titaneisen, Eisenglanz, Corund. Prismatisch: Baryt, Coelestin, Anglesit; Arragonit, Cerussit, Witherit, Strontianit, Kalisalpeter.

Mehrere von diesen Vorkommnissen gehorchen nun dem von Mitscherlich aufgestellten Gesetze, dass sich die Gleichheit der Gestalt durch die Variirung eines Aequivalents der Bestandtheile erklären lassen; allein einige hievon sind Ausnahmen und lassen sich nicht durch dasselbe erklären; beispielsweise Arragonit $CaO\,CO_2$ und Kalisalpeter $KO\,NO_5$, Kalkspath $CaO\,CO_2$ und Natronsalpeter $NO\,NO_5$; Leucit und Analcim; Anatas und Apophyllit.

Diese und ähnliche unerklärbare Vorkommnisse erschütterten immer mehr den Glauben an die sogenannte Substitutionshypothese des Isomorphismus, man wandte sich von derselben ab und versuchte manche Erklärungsgründe. Und hiemit beginnt die theoretische Entwicklung des Homöomorphismus, da für jede seiner Grundbedingungen Erweiterungen und Veränderungen vorgeschlagen wurden.

§. 27. Für die oben erwähnten Fälle versuchte sowohl Schaffgotsch[2]) als auch Nickles[3]) die Identität der Gestalt mit den Variationen des chemischen Stoffes in Einklang zu bringen; doch vergeblich; ermöglicht war diess nur durch die Einführung einer neuen chemischen Function statt der Aequivalentformel.

Kopp[4]), Schröder[5]) und Dumas haben zuerst darauf hingewiesen, dass isomorphe Körper gleiches Atomvolumen und gleiche Atomzahlen besitzen, und dass somit die Bedingung für die gleiche Gestalt nicht so sehr in einer Analogie der chemischen Formel zu suchen sei, sondern eben in einer gleichen Grösse der Atome und in einer gleichen Anzahl der die Verbindung bildenden Atome. Dadurch würden nun auch jene Fälle erklärt, welche nicht, wie z. B. $SO_3KO$, $SeO_3KO$ durch Permutation eines Aequivalentes eines Stoffes mit dem eines anderen entstanden sind.

Die Atomzahl gibt die Anzahl der Atome der verschiedenartigen Substanzen in gleichem Raume an, das Atomvolumen hingegen die rela-

---

[1]) Nahezu vollständige Anführungen von isomorphen chemischen Substanzen finden sich in Frankenheim: System der Krystalle, und in Buff, Kopp, Zamminer: Lehrbuch der physikalischen und theoretischen Chemie.

[2]) Schaffgotsch. Poggend. Ann. 48, pag. 335.

[3]) Nickles. Erdm. J. f. pr. Ch. 45. pag. 374.

[4]) Kopp. Pogg. Ann. 47. pag. 133. 52. pag. 243, 262. Ann. d. Chimie. 36. pag 18,

[5]) Schröder. Pogg. Ann. 50. pag. 552.

tive Grösse der Atome der verschiedenen Stoffe: ersteres wird gebildet durch den Quotienten der Atomgewichte in die Dichte, letzterer dagegen durch den Quotienten der Dichte in die Atomgewichte

$$\text{Atomgewicht} = \frac{d}{a} \qquad \text{Atomvolum} = \frac{a}{d}.$$

Beispiele mögen für die Atomvolumina von

Au = 128, MgO = 78 Fe = 44 Zn = 58
Ag = 130, CuO = 78 Mn = 44 Ti = 56

und analog hiemit ist das Atomvolumen bei zusammengesetzten Verbindungen entweder gleich oder mindestens nahezu gleich. Kopp hat es sogar versucht, nur auf diese Differenzen basirt, nachzuweisen, dass die Unterschiede in dem Rhomboederwinkel der isomorphen Gruppe der Kalkspathe mit der verschiedenen Grösse der Atomvolumina in einem verkehrt progressiven Verhältnisse stehe. Die gewonnenen Zahlen sprechen in der That hiefür.

| | Hauptaxe | Atomvolum |
|---|---|---|
| Calcit $CaO, CO_2$ | = 0·854 | 632 : 2·73 = 231 |
| Dolomit $(Ca,Mg)O, CO_2$ | = 0·833 | 583 : 2·88 = 202 |
| Diallogit $MnO\ CO_2$ | = 0·822 | 722 : 3·59 = 204 |
| Sphärosiderit $FeO\ CO_2$ | = 0·819 | 715 : 3·8 = 188 |
| Mesitin $(Fe, Mg)O\ CO_2$ | = 0·815 | 625 : 3·36 = 186 |
| Magnesit $MgO, CO_2$ | = 0·812 | 535 : 2·95 = 181 |
| Smithsonit $ZnO, CO_2$ | = 0·807 | 779 : 4·45 = 175 |

Das Atomvolumen nimmt gleichmässig mit der Grösse der Hauptaxe ab. Aehnliche Zusammenstellung mit nahezu gleichem Resultat hat man auch bei mehreren anderen Reihen homöomorpher Substanzen versucht.

Doch das Atomvolumen ist nicht in allen Fällen des Isomorphismus ein gleiches, es existiren Stoffe, welche unläugbar gleiche Form besitzen und deren Atomzahl und Volumen ein genetisch verschiedenes ist.

Solche Fälle sind zweierlei Art. In dem ersten verhalten sich diese Functionen zu einander wie die einfachsten Zahlen der natürlichen Zahlenreihe. Z. B. Natrium und Kalium wie 1 : 2; Arsenik und Antimon wie 2 : 3, oder im zweiten Falle ist das Verhältniss ein allgemein unbestimmtes, allein die Zahlen werden gleich, wenn beide Functionen durch die Zahl der in der Verbindung enthaltenen Zahl der Atome dividirt werden. Auf letztere Bedingung der Gleichheit hat Dana[1]) aufmerksam

[1]) Dana. Sillim. Journ. 1850. IX. vergleiche Dana Sill. Journ. 1854. On the Homoeomorphism of Mineral species, in welchen er eine Zusammenstellung der dem krystallographischen Habitus zufolge isomorphen Species aus dem prismatischen Systeme gibt.

gemacht, und wahrlich, durch die Einführung derselben würden mehrere isomorphe Körper als dem Gesetze der Atomvolume folgend eingereiht werden können.

Es würden sich für einige Mineralien entweder Zahlen ergeben, die gleich sind oder doch die Reihen mit einfachen Multiplicatoren bilden.

Ersteres ist beispielsweise der Fall bei

$$\text{Olivin} \quad \frac{1327}{3{\cdot}35} = \frac{390}{10} = 39$$

$$\text{Chrysoberyll} \quad \frac{2284}{3{\cdot}9} = \frac{617}{16} = 39$$

letzteres hingegen sowohl bei homöomorphen Substanzen des rhomboëdrischen, als auch prismatischen Systems. Es verhalten sich bei Kalkspath, Natronsalpeter und Pyrargyrit die modificirten Atomvolumina wie 2 : 3 : 5, hingegen bei Arragonit, Kalisalpeter und Bournonit wie 1 : 2 : 2, wenn folgende Berechnungsmethode adoptirt wird:

$$\text{Kalkspath} \quad \frac{230}{5} = 46$$

$$\text{Natronsalpeter} \quad \frac{485}{8} = 61$$

$$\text{Pyrargyrit} \quad \frac{1180}{10} = 118$$

$$\text{Arragonit} \quad \frac{214}{5} = 43$$

$$\text{Kalisalpeter} \quad \frac{651}{8} = 81$$

$$\text{Bournonit} \quad \frac{1037}{11} = 94$$

Doch man erkennt bereits, dass in dieser Fassung das Gesetz viel zu umfassend ist und manche Fälle einbeziehen könne, welche nicht isomorph sind. So könnte man Quarz und Schwerspath, Turmalin und Skorodit, Staurolith und Zinkvitriol für isomorph erklären, da diesen Gruppen je 54 — 48 — 44 als Atomvolumen zukommt.

Durch diese Untersuchungen ward wohl ein weiterer Schritt zur Erkenntniss gethan, allein die erhaltenen Gesetze erwiesen sich immer als von ungleichem Umfange mit den Beobachtungen. Die Gesetze würden mehrere Substanzen für isomorph bestimmt haben, welche diess nicht sind, so wie anders manche isomorphe Substanzen — beispielsweise die wichtigsten Fälle $CaO\ CO_2$ und $KO\ NO_5$ nicht zu erklären vermocht haben.

In neuester Zeit ward für diese Ausnahmsfälle auch eine Erklärung gefunden, und zwar durch die Einführung der Atomformeln statt der bisher in der Chemie und Mineralogie gebräuchlich gewesenen Aequivalentformeln.

Marignac[1]) machte in seinen Untersuchungen aufmerksam, dass sich die absolute Isomorphie der zwei Verbindungen

$Cu\ Fl\ Ti\ Fl_2$
$CuO\ WO_3 + Cu\ Fl\ W\ Fl_3$

durch die Einführung der Atomformeln

Ꞓu Ŧi $Fl_6$
Ꞓu W̶ $Θ_2$ $Fl_4$

vollkommen erklären lassen, da der allgemeine Habitus der Formel und daher auch die moleculare Anordnung erhalten bleibe.

Kopp[2]) führte diese Entdeckung weiter aus, und fand, dass sich durch dieselbe die morphologische Aehnlichkeit mancher chemischen Verbindungen erklären lasse, welche eine ganz verschiedene Aequivalentformel haben. Mehrere der wichtigeren Fälle folgen hier angeführt, mit Angabe der Aequivalent- und der Atomformel und des Atomvolumen.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Kalkspath | $CaO, CO_2$ | Ꞓa Ꞓ $Θ_3$ | 36·8 |
| Salpetersaures Natron | $NaO, NO_5$ | Na N$Θ_3$ | 37·9 |
| Kohlensaurer Baryt | $BaO, CO_2$ | Ƀa Ꞓ $Θ_3$ | 45·8 |
| Salpetersaures Kali | $KO, NO_5$ | K N $Θ_3$ | 47·9 |
| Ueberchlorsaures Kali | $KO, ClO_7$ | K Cl $Θ_4$ | 54·6 |
| Uebermangansaures Kali | $KO\ Mn_2\ O_7$ | K Mn $Θ_4$ | 58·3 |
| Kupferglanz | $Cu_4\ S_2$ | Ꞓu Ꞓu S̶ | 27·8 |
| Silberkupferglanz | $Cu_2\ Ag\ S_2$ | Ꞓu Ag S̶ | 32·8 |

Die Methode[3]) ermöglicht auch die allbekannten Analogien zwischen den Feldspathen, welche, ohne streng isomorph zu sein, doch in ihren Zonen und Winkeln sehr nahe stehen, aus dieser Aehnlichkeit ihrer chemischen Formeln abzuleiten; es ist

| | | |
|---|---|---|
| Adular | $KO, 3SiO_2 + Al_2\ O_3\ 3SiO_2$ | $K_2\ Al_2\ Si_2\ Si_4\ Θ_{16}$ |
| Albit | $NaO\ 3SiO_2 + Al_2\ O_3\ 3SiO_2$ | $Na_2\ Al_2\ Si_2\ Si_4\ Θ_{16}$ |
| Anorthit | $CaO\ SiO_2 + Al_2\ O_3\ SiO_2$ | Ꞓ$a_2\ Al_2\ Al_2\ Si_4\ Θ_{16}$ |

Diese Anwendung der Atomformeln führte also in vielen Fällen zur Aufklärung des Homöomorphismus, indem durch sie in Verbindung mit

[1]) Marignac: Ann. de chim. 1862. LXIX. 5.
[2]) Kopp. Ann. Chem. Pharm. 1863. CXXV. 371.
[3]) Vergleiche Tschermack. Ueber die Feldspathe. Sitz. d. Ac. Wien 1865.

der Bedingung der Gleichheit des Atomvolumen mindestens eine Grenze der Existenz der morphologischen Aehnlichkeit aufgefunden ist; die Kenntniss der zweiten Grenze fehlt jedoch noch, indem Fälle vorkommen, in welchen Atomvolumen und Formel gleich sind, ohne eine Isomorphie zu erzeugen, in welchen daher eine Substitution der Atome in Folge der ungleichen physikalischen Eigenschaften der letzteren eine Aenderung der Gestalt erzeugt.

§. 28. Durch die bisherigen Betrachtungen wurde dargethan, dass die Theorien des Isomorphismus in ihrer ursprünglichen Einfachheit immer den beobachteten Verhältnissen genügten, ohne sie vollständig zu umfassen, und dass hingegen jede Erweiterung derselben wieder Facta einbezog, welche der Theorie nicht zugehören.

Durch diese eigenthümlichen Schwierigkeiten einer Erklärung ward man immer mehr versucht, dem Wesen des Isomorphismus vielseitige Modificationen zuzuerkennen. Diess geschah namentlich vor der Entdeckung der Abhängigkeit vom Atomvolum und der atomistischen Formel, welche die Hypothesen endlich vereinfachte.

Während den bisher genannten Forschern der ursprüngliche Gedanke Mitscherlich's vorschwebte, zwischen der bestimmten Krystallgestalt und der atomistischen Zusammensetzung einen Connex zu finden, führte das allzu verschleierte Auftreten desselben zu immer kühneren Ansichten und Hypothesen, welche sich entweder von den strengen Anforderungen der Krystallographie oder Chemie freizumachen suchten.

Die Bestrebungen Jener, welche die krystallographischen Grundbedingungen des Isomorphismus zu ändern suchten, liefen vor allem dahin, die Beschränkungen zu beseitigen, welche Identität der Form verlangen. Man versuchte den Isomorphismus aufzufassen, nicht als eine vollkommene Gleichheit der Gestalt und der Systeme, sondern vielmehr als die Identität gewisser sich nahe stehender Winkelwerthe — wie Zehme[1]) sagt: Isogonismus — ohne dass hiedurch die Bedingung eines Systems erfüllt wäre. Gründer dieser Ideen ist Laurent[2]), dessen Bestrebungen auch dahin gerichtet waren, den Uebergang der Krystallsysteme ins helle Licht zu setzen und die Möglichkeit eines solchen zu beweisen. Delafosse und Pasteur sind theilweise Anhänger der Laurent'schen Hypothese geworden.

Während durch diese Erweiterungen des Isomorphismus zum Isogonismus die krystallographischen Bedingungen Mitscherlich's geändert wurden, traten andererseits analoge Veränderung auf chemischem Gebiete

[1]) Zehme. Schulprogramm: Hagen. 1850.
[2]) Laurent. Compt. rend. vol. 27. 134.

:ch die von Scheerer begründete Polymerie und Hermann's nerie.

ie anfängliche Theorie des Isomorphismus war, wie oben erwähnt, ıne die Form zu ändern, ein Aequivalent eines Stoffes gegen ein lent des isomorphen vicariiren können. Scheerer[1]) und bereits Mosander[2]) erweiterte diesen Satz insofern, dass nicht bloss ıivalent, sondern ein von dem Charakter der Substanz abhän- ltiplum der Aequivalente vicariiren könne.

heerer ward durch die Untersuchung talkartiger Mineralien zu rpothese geführt worden, da sie bei schwankender chemischer ɜnsetzung gleiche Form hatten. Aehnliche Verhältnisse treten Turmalin, Glimmer auf. Seine Erklärung für die ersten Ver- war die, dass Wasser und Magnesia vicariirende Bestandtheile ndungen in der Art sind, dass 3HO und 1MgO sich gegenseitig können.

ıhl haben mehrfache Analysen von ihm zu diesem Behufe unter- für die Richtigkeit seiner Ansicht gesprochen, allein gegen die- oftmals als wichtiger Grund geltend gemacht worden, dass alle ersuchten Mineralien nicht den Charakter der Ursprünglichkeit ragen, sondern selbst schon vielleicht manche chemischen Meta- :n durchgemacht haben.

ɜser Einwurf entkräftet wohl theilweise die Scheerer'sche ıe, allein dieselbe hat immerhin in Verbindung mit der Theorie ıvolumen so viel Richtigkeit in sich, um als mögliche Erwei- ɜr chemischen Theorie des Homöomorphismus aufgefasst zu

ährend nun die Polymerie die vicariirenden Bestandtheile in zieht, ist die von Hermann[3]) aufgestellte Hypothese der erie eine Widerlegung eines zweiten Grundsatzes der Isomorphie: isomorphe Verbindungen in beliebiger Quantität gemischt eine e Mischung geben.

Untersuchung der Glimmer, Turmaline, Granaten u. s. w. Hermann zu der Hypothese, dass diese Mineralien nicht eine e Verbindung, sondern vielmehr durch die Mischung isomorpher heile erzeugt sein müssen, da sie dieselbe Gestalt zeigen, obgleich nischen Bestandtheile schwankend in ihren Verhältnisszahlen e chemischen Factoren sind daher als isomorph angenommen, ob- : chemische Formel nicht auf dieses Verhalten hinweisen würde.

heerer. Poggend. Annal. vol. 68. 319.

sander. Pogg. Ann. 1829. vol. 19 erklärt die Isomorphie von Titaneisen mit Eisen- l.

rmann, Heteromeres Mineralsystem. Moskau 1856. Moskau 1850.

Hermann nennt daher heteromere Verbindung diejenige, welche durch das Zusammenkrystallisiren zweier Substanzen von gleicher Form, aber verschiedener chemischer Constitution erzeugt werden können.

Auf diese Idee gestützt, hat Hermann eine Revision der Mineralien vorgenommen und in seinem heteromeren Mineralsystem zusammengestellt, wobei er namentlich jenen Mineralien seine vollste Aufmerksamkeit zuwendet, welche ungeachtet ihrer schwankenden Zusammensetzung eine Form zeigen, und daher auch meist eine Species ausmachen.

Delafosse hat jene Verhältnisse, die Hermann Heteromerie nennt, mit dem Namen Plesiomorphie bezeichnet.

§. 29. Während nun Scheerer, Hermann und Laurent die Bedingungen und den Begriff des Isomorphismus auf das weiteste auszudehnen versuchten, bildeten sich im Gegensatze zu denselben auch jene Ansichten aus, welche der Isomorphismus nur in seiner strengsten Bedeutung, und selbst da unter Beschränkungen als richtig anerkennen. Verfechter dieser letzteren sind Frankenheim vom krystallogenetischen Standpunkte aus, vom physikalischen Senarmont und Grailich.

Frankenheim negirt besonders das Zusammenkrystallisiren und Vertreten isomorpher Stoffe, wenn diess selbst als ein wesentlicher Begriff des Isomorphismus aufgestellt wird, und erklärt solche Verbindungen als Gemenge oder als Schichtenbildung. Diese seine Meinung stützt sich auf die im Folgenden gegebenen Ausführungen [1]).

„Man hält oftmals isomorphe Verbindungen insoweit für molecular, dass sich die Bestandtheile so vertreten können, dass sich in jedem Theilchen des Krystalls, gleichwie in einer Lösung beide Theile vorfinden. Allein dieser Ansicht steht die Thatsache entgegen, dass die Verbindungen isomorpher Körper niemals homogen sind, sondern immer den Charakter eines Gemenges an sich tragen, dessen Bestandtheile nicht unmessbare Theilchen, sondern Körper von merklichem Umfange sind.

Weit entfernt, einer Mischung, Auflösung ähnlich zu sein, verhalten sich die aus isomorphen Körpern zusammengesetzten Krystalle ganz wie die, deren Bestandtheile nicht isomorph sind.

Letzteres ist sogar der Fall bei Krystallen des tesseralen Systems, denn es reicht beispielsweise eine kleine Beimengung von Ammoniakalaun hin, dass Kalialaun die physikalische Eigenschaft der Lamellarpolarisation erhält [2]).

Diese lamellare Polarisation des Lichtes ist nur eine Folge der Schichtung, und kann daher nur auf einem Wechsel des Stoffes in dem

[1]) Frankenheim. Poggend. Ann.

[2]) Biot. Mémoir. d'Institut. 1822. vol. 18.

obigen Falle beruhen, so dass sich also die isomorphen Körper nicht gleichzeitig molecular verbunden, sondern allmälig Schichte nach Schichte, bis jedesmal die Umgebung erschöpft war, abgelagert haben.

Was bei regelmässiger Lagerung der Bestandtheile die lamellare Polarisation hervorbringt, das führt zur Diffusion des durchgehenden Lichtes, wenn die Einlagerung unregelmässig ist. Es ist eine für Mineralien fast allgemeine Regel, dass die krystallisirten Mischungen isomorpher Körper trübe oder ganz undurchsichtig werden, auch wenn ihre Bestandtheile für sich ganz durchsichtig sind. Die kohlensauren Metalloxyde von der Form des Kalkspaths, Arragonits sind im reinen Zustande ganz durchsichtig; aber von den in der Natur vorkommenden sind es auch nur die kleine Anzahl der reinsten Varietäten, alle anderen sind mehr oder minder durchsichtig.

Dass sich diese Mischungen wie Gemenge verhalten, folgt auch aus ferneren Beobachtungen.

Der Arragonit verliert durch Auflösen seinen Kalkgehalt, aber nichts, oder wenig von Strontian, der Cölestin wird durch Verwitterung reicher an Baryt.

Bei den nicht tesseralen Krystallen ergibt sich der Einfluss der Mischung auch in der Gestalt. Diese ist für isomorphe Körper niemals identisch, wenigstens hat sich überall, wo man die Krystallform bis auf wenige Minuten bestimmen konnte, ein Unterschied gefunden, der bald Minuten, bald Grade beträgt; zwei isomorphe Krystalle werden daher niemals denselben Raum einnehmen können und ein aus beiden Arten bestehendes Aggregat wird in seinem Innern Höhlungen enthalten und an seiner Oberfläche Rauhheiten, welche nur da der Beobachtung sich entziehen werden, wo die Gemengtheile selbst der Grenze der Sichtbarkeit nahe treten.

Man findet in grossen Sammlungen unter den zahlreichen Krystallen der Gruppe Spathe, in denen ein Theil des kohlensauren Kalkes durch ein isomorphes Salz vertreten ist, oft kein einziges Exemplar, an dem sich nicht sehr deutlich Zeichen einer gestörten Bildung nachweisen liessen.

Die isomorphen Körper lagern sich zwar regelmässig übereinander, aber wenn ein Flächenpaar aufeinander fällt, und auch die übrigen einander so nahe kommen, als es der Unterschied der Winkel erlaubt, so ist doch eine vollständige Deckung meist unmöglich. Wenn auch eine Spaltungsrichtung durch alle Schichten hindurchgehen sollte, so wird diess bei einer zweiten und dritten nicht stattfinden, sie wird matt, unterbrochen, und wenn die Schichten, wie es oft der Fall ist, sehr dünn sind, gekrümmt und schwer zu erlangen sein. Unter denselben Umständen müssen auch die Krystallflächen wohl in einzelnen Richtungen glatt, in

den übrigen aber, oder in allen rauh, gestreift und gekrümmt sein. Es werden daher auch die Winkel sowohl innerhalb desselben Krystalls, als bei verschiedenen Krystallen noch mehr von einander abweichen, als bei reinen Individuen.

Die Winkel, die Art der Spaltung und die Härte, die bei rauher Oberfläche ebenfalls unregelmässig wird, d. h. die Hauptcharaktere, auf welche man sich neben der chemischen Zusammensetzung, vornemlich bei der Bestimmung einer Species stützt, verlieren daher bei den aus isomorphen Bestandtheilen gemischten Krystallen ihre Zuverlässigkeit. Ihre Eigenschaften halten keineswegs die Mitte zwischen denen der reinen Krystalle, sie sind Gemenge.“

Diese Ansichten wurden mehrmals von Frankenheim ausgesprochen, und sie sind, so sehr sie auch anfänglich befremden, gegenüber jenen Theorien des Homöomorphismus, welche alle ähnlich gebauten Krystalle als zusammenkrystallisirend betrachtet, gewiss richtig.

Auch Rammelsberg[1]) bekennt sich zu denselben und hält Mischungen von isomorphen Bestandtheilen nur insofern zulässig, als sie dem Gesetze der bestimmten Aequivalente entsprechen, und hält das Entgegengesetzte nur für mechanische Beimengungen.

§. 30. Analoge Beschränkungen der Isomorphie ergaben auch die Untersuchungen, welche von physikalischer Seite auf diesem Gebiete unternommen wurden. Es sind diess namentlich die bereits erwähnten Arbeiten von Senarmont und Grailich, welche durch optische Versuche zu eruiren strebten, ob den isomorphen Körpern auch absolut ähnliche physikalische Eigenschaften zukommen.

Die in dieser Beziehung erlangten Resultate waren theilweise und insofern negativer Natur, als in vielen Fällen von einfacheren Verbindungen die geometrischen und optischen Eigenschaften nicht absolut und unmittelbar — analog den Bedingungen der Isomorphie — ident sind.

Diess negative Resultat würde aber, wie Untersuchungen neueren Datums zeigen, mannigfache Modification erlitten haben, wären sie mit Kenntniss des Abhängigkeitsgesetzes zwischen Materie, Form und optischen Constanten durchgeführt worden, und die erwähnten Forscher hätten dann nicht Aussprüche gethan, welche gewagt zu nennen sind, nicht wegen der Idee, sondern weil sie die Existenz eines Causalnexus läugnen, welchen sie nicht finden konnten.

Senarmont[2]) sagt wohl noch sehr gemässigt: „Die Versuche gestatten den Schluss, dass die mechanischen Ursachen, welche die

---

[1]) Rammelsberg. Mineralchemie. 1860. pag. 57. Vergl. C. Hauer. Wien. Ac. Sitzb. 1860. über das Uebereinanderkrystallisiren isomorpher Stoffe, Episomorphie genannt.

[2]) Senarmont. Ann. de chim. 1850. T. XXXIII.

geometrische Form bedingen, von anderer Ordnung sind, als diejenigen, welche die doppelbrechenden optischen Eigenschaften bestimmen, weil die Form in ganzen Gruppen isomorpher Substanzen dieselbe bleibt, während die optischen Eigenschaften in ihren wesentlichen Elementen nicht allein quantitative Abänderungen, sondern eine vollständige Umkehrung ihrer Grösse erleiden."

Grailich[1]) spricht sich am Schlusse eines Cyclus von Untersuchungen noch präciser aus; er stellt zuerst einige abgeleitete Grundsätze auf und gibt schliesslich das Resumé seiner Ansichten: Erstere sind: „Die optische Orientirung ist im allgemeinen um so verschiedener, je einfacher die Verbindung, d. i. je geringer die Menge der gemeinschaftlichen Bestandtheile, und je geringer die Anzahl der gemeinschaftlichen Radicale ist" — „dass der krystallographischen Isomorphie der Kalium- und Ammoniumverbindungen keine optische Aehnlichkeit entspricht, dass vielmehr der Grund der optischen Aehnlichkeit der complicirteren Verbindungen in der Menge der gemeinschaftlichen Bestandtheile zu suchen ist, welche die Verschiedenartigkeit der Wirkungen von Kalium und Ammonium decken."

Sein Resumé ist folgendes: „Der Schluss, zu dem alle diese Betrachtungen führen, ist nun der, dass die optischen Verhältnisse viel näher durch die atomistische Beschaffenheit bedingt sind, als die morphologischen. Verschiedene Grundstoffe können sich im Molecül vertreten, ohne die Form desselben, von welcher die Krystallgestalt abhängt, wesentlich zu ändern; aber dabei wird der optische Charakter um so tiefer afficirt, je grösser die Aenderung in der Constitution des Molecüls ist. Wir glauben daher, wegen aller in diesem Abschnitte angeführten Thatsachen zu dem Schlusse berechtigt zu sein, dass der Grund der Doppelbrechung nicht in der Anordnung der wägbaren Molecüle, sondern in der Disposition der Aetherpartikelchen innerhalb des Molecüls zu suchen sei.

Diese muss zwar ähnliche Symmetrie wie der Krystallkörper zeigen, denn die Symmetrie der letzteren hängt von der Form seiner Molecüle ab, aber es kann gar kein directer Zusammenhang bestehen zwischen den optischen und solchen Verhältnissen, die nur auf verschiedenartiger Vertheilung der Molecüle beruhen, wie Spaltbarkeit, Härte, magnetische Orientirung."

Dass ein Physiker vom Range Grailich's auf Grund unvollständiger Versuche an der Möglichkeit zweifeln konnte, einen Connex zwischen Materie, Form und allen physikalischen Eigenschaften zu finden, ist unerklärlich.

---

[1]) Grailich. Sitzungsb. d. Wiener Acad. 1856—1859.

Während nun, wie oben gesagt, Laurent, Scheerer, Hermann die Ideen des Isomorphismus so viel wie möglich zu verallgemeinern strebten, sind hingegen Frankenheim, Senarmont, Grailich Anschauungen dahin gerichtet, den Isomorphismus als mehr oder minder beschränktes Problem der mechanischen Aequivalenz der Molecüle hinzustellen.

§. 31. Versucht man die vielfach abweichenden Ansichten und Theorien über den Isomorphismus zu vereinigen und zum theoretischen Abschluss zu bringen, so wird es nöthig sein, nebst der unparteiischen Würdigung aller bekannten Facta auch die neuesten physikalischen Untersuchungen[1]) zu Hilfe zu ziehen, um zur Darstellung des physikalischen Connexes einige Anhaltspunkte zu gewinnen.

Alle Beobachtungen sowohl auf dem Gebiete der Chemie als Mineralogie haben unwiderlegbar dargethan, dass es gewisse Formen der Ausbildung gibt, welche nicht bloss einer Substanz, sondern auch mehreren zukommen können: es existirt Homöomorphismus.

Eine vollkommene Uebereinstimmung der Krystallformen chemisch verschiedener Stoffe kommt nur bei Körpern vor, welche im tesseralen Systeme krystallisiren; bei demselben ist jedoch der Homöomorphismus von geringerem Interesse, weil für solche Krystallreihen die Dimensionsverhältnisse verschwinden. In den übrigen Systemen besteht der Homöomorphismus darin, dass die Grundformen nahezu gleiche Dimensionen und Winkel haben, und auch die Ausbildung einander nahekommt. Da hier nie volle Gleichheit der Formen erreicht wird, so ist der genauere Name Homöomorphismus gewählt worden.

Dieser Homöomorphismus darf jedoch nicht wie eine mathematische Abstraction behandelt werden, so dass man alle Krystalle als isomorph betrachtet, deren Flächen sich ohne das Gesetz der Rationalität der Indices zu verletzen, auf nahezu gleiche Grundformen zurückführen liessen. Es würde dann leicht sein, beinahe sämmtliche tetragonale oder orthohexagonale oder prismatische Krystalle von einer Grundform mit nur geringen Variationen abzuleiten.

Die Isomorphie besteht dort, wo ihr Dasein auch nach chemischen Gesetzen unbestreitbar ist, nicht bloss in der Uebereinstimmung der Grundform, sondern auch auf der gleichen Flächen- und Zonenentwicklung, Spaltbarkeit, Härte. Es ist bei diesen Krystallen nicht bloss die äussere Begrenzung gleich, sondern auch die ihr zu Grunde liegende Anordnung der Theile oder das Verhältniss der Cohäsionskräfte nach den verschiedenen Richtungen im Innern des Krystalls, und man wird

[1]) Schrauf. Poggend. Ann. 1860.

nur diejenigen Gestalten als isomorph ansehen dürfen, bei welchen die auf solche Weise bestimmten Grundformen übereinstimmen.

In diesen Fällen entspricht nun der krystallographischen Aehnlichkeit auch die entsprechende Analogie im Baue der chemischen Formel mit Zugrundelegung der Atomzahlen. Es besitzen die isomorphen Körper solche Gliederung der Formel, dass diese wechselseitig durch Variation eines oder mehrerer Bestandtheile erzeugt werden kann, wie bereits im §. 27 diess ausführlich erwähnt ward. Da aber die Gleichheit der Formel noch nicht das Vorhandensein der Isomorphie bedingt, so ist dadurch die Bedingung gegeben, dass die vicariirenden Atome selbst physikalische Analogie besitzen.

Man kann auch die Gleichheit der Form dadurch von chemischer Seite begründen, dass man die gleiche Form vom gleichen Volumen der Atome abhängig darstellt. Da aber das Atomvolumen von der postulirten Aequivalentzahl abhängt, andererseits aber Verbindungen mit ganz verschiedenem Charakter wegen der Willkür der Anzahl der Atome gleiches Atomvolumen haben können, so ist diese letztere Theorie wohl dadurch zu beschränken, dass, um wahrhaft homöomorphe Reihen zu erzeugen, neben der Gleichheit des Atomvolumen eine Aehnlichkeit vorhanden sein muss der gesammten atomistischen Gruppirung und Anzahl — letztere im einfachen multiplen Verhältnisse, wie die Atomformeln der in folgendem begründeten Isomorphie von Chrysolith, Diaspor und Euchroit zeigen.

Gehen wir zu den optisch-physikalischen Bedingungen über, so ist wohl die Orientirung der optischen Elasticitätsaxen nicht absolut ident, allein es tritt trotzdem eine bedeutende Analogie durch gewisse Gesetze bedingt auf. Während bei den einaxigen Körpern die optische Hauptaxe immer eine bestimmte Lage gegen das Grund-Prisma hat, so ist letzteres auch bei den zweiaxigen, namentlich prismatischen Körpern der Fall. Die erste Mittellinie der optischen Axen ist bei den homöomorphen Körpern parallel den Kanten eines und desselben Grundprisma und die Lage der optischen Axen eine ähnliche[1]).

Da nun die Fortpflanzung des Lichtes von der Dichte, diese hingegen von der Atomgruppirung abhängt, so ist dadurch bedingt, dass in diesen isomorphen Körpern die Atome sich gleichmässig um ein Centrum gruppiren. Ebenso folgt aus dem eben erwähnten Causalnexus die Erklärung der Differenz von positiv und negativ des optischen Charakters, da die Atomlagerung, ohne die Winkelverhältnisse zu ändern, eine doppelte sein kann, welche einerseits das Minimum, anderseits das Maximum der Dichte hervorruft.

---

[1]) Die specielle Ausführung der Abhängigkeit der optischen Eigenschaften von der Isomorphie der Körper muss dem betreffenden Kapitel der Krystallphysik vorbehalten werden.

Es sind diess die wichtigsten optischen Momente, welche sich, ohne allzusehr in das Gebiet der speciellen Krystallophysik zu greifen, hier in Betracht ziehen lassen.

Solche Gruppen, welche die drei Bedingungen von chemischer, krystallographischer, physikalischer Aehnlichkeit verdienen, sind als wahrhaft homöomorph zu betrachten. Es beschränkt sich wohl hiedurch bedeutend die Zahl aller bisher angenommenen isomorphen Körper, welche meist nur als morphologisch gleich gedeutet werden können, und welche diess eben nur dadurch sind, weil das Axenverhältniss dieser Gestalten bereits einem der constanten[1]) Verhältnisse $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{5}$ sich zuneigt.

Berücksichtigt man aber auch die physikalischen Verhältnisse, so können als Beispiele der Isomorphie auf mineralogischem Gebiete namentlich folgende Reihen betrachtet werden, bei welchen die Atomformel und die Winkel in der Reihenfolge: Grundprisma (dessen Kanten die erste Mittellinie der optischen Axen parallel lauft), dann die beiden Domen — angegeben sind.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Arragonit | $(Ca_2\ C_2\ O_6)$ | 63° | 98° | 71° |
| Strontianit | $(Sr_2\ C_2\ O_6)$ | 62 | 99 | 71 |
| Kalisalpeter | $(K_2\ N_2\ O_6)$ | 60 | 98 | 70 |
| Alstonit | $(Ba\ Ca\ C_2\ O_6)$ | 118 | 72 | 102 |
| Witherit | $(Ba_2\ C_2\ O_6)$ | 118 | 73 | 102 |
| Cerussit | $(Pb_2\ C_2\ O_6)$ | 117 | 72 | 100 |
| Baryt | $(Ba\ S\ O_4)$ | 74 | 78 | 63 |
| Cölestin | $(Sr\ S\ O_4)$ | 75 | 75 | 62 |
| Anglesit | $(Pb\ S\ O_4)$ | 75 | 76 | 62 |
| Libethenit | $(Cu_4\ P_2\ H_2\ O_{10})$ | 72 | 109 | 92 |
| Olivenit | $(Cu_4\ As_2\ H_2\ O_{10})$ | 71 | 100 | 92 |
| Chrysolith | $(Mg_8\ Si_4\ O_{16})$ | 60 | 115 | 94 |
| Diaspor | $(Al_8\ H_8\ O_{16})$ | 64 | 118 | 93 |
| Euchroit | $(As_2H_{14}\ Cu_4\ O_{16})$ | 62 | 119 | 92 |

Ausser diesen Fällen liessen sich noch viele andere auffallende Beispiele der Isomorphie anführen, allein diese sind gewählt, da an ihnen alle ihre physikalischen Eigenschaften sicher bestimmt sind. In den schiefwinkeligen Systemen ist die bereits früher erwähnte Analogie der Feldspathe von gleicher Wichtigkeit.

Gehen wir nun nochmals alle besprochenen Bedingungen durch, so können wir sagen, die Elemente, welche mit ähnlichen Verwandtschaften

[1]) Vergleiche Dana. On Homöomorphism. Sill. Journ. 1854. Schrauf. Pogg. An. 1860.

begabt und in gleichen Verhältnissen zu Verbindungen vereint sind, werden sich analog zu Molecülen gruppiren, so dass gleichsam die Lagerung der Atome um ein Centrum in allen Fällen eine gleichmässige wird. Diese gleiche Lagerung der Atome erlaubt jedoch das Auftreten von verschiedenen, vom Charakter der Elemente abhängigen Atomdistanzen. Diess modificirt, ohne den geometrischen Charakter der Form zu alteriren, welche nur von der Symmetrie abhängt, die relative Dichte nach den drei Axen und hiedurch die optischen Verhältnisse.

Diese Sätze stehen sowohl im vollen Einklange mit den bisherigen Untersuchungen über die Krystallogenesis, als auch mit den Beobachtungen selbst.

Allein wenn auch diese Gesetze sich eben durch die Allgemeinheit und Einfachheit ihrer Resultate als richtig erweisen, so lange sie beschränkt bleiben auf die unmittelbar beobachteten Thatsachen und auf allgemeine Bedingungen, so ist es doch sehr schwierig, diese Grenze zu überschreiten, denn jeder Schritt weiter führt auf das Gebiet der Hypothese.

# VII. Kapitel.

## Von den Pseudomorphosen.

§. 32. Das Charakterisirende der isomorphen Körper besteht darin, dass zwei verschiedene chemische Substanzen in einer nahezu gleichen Krystallgestalt beobachtet werden, welche letztere denselben aber vollständig eigenthümlich und unter allen Verhältnissen inhärirend ist. Ausser denselben treten jedoch auf dem Gebiete der Mineralogie noch zahlreiche Fälle auf, wo eine Substanz nicht bloss in der ihr zugehörenden Form, sondern auch in Formen beobachtet wird, welche anderen Stoffen und nie ihr selbst eigenthümlich sind. Fassen wir aus den zahlreichen Beispielen eines heraus, so hat Cerussit eine Krystallgestalt, welche isomorph dem Arragonit ist, allein man beobachtet auch Cerussit in Formen, welche ursprünglich nur Bleiglanz, Bleivitriol, Bleihornerz, Leadhillit, Kupferbleierz angehören. Diese letzteren Formen sind also falsch, der Substanz nicht eigenthümlich, sondern nur durch chemische oder mechanische Processe derselben aufgezwungen — wir pflegen dieselben im Allgemeinen Pseudomorphosen zu nennen.

Unter Pseudomorphose versteht man daher eine krystallinische oder amorphe Substanz, welche, ohne den Charakter eines selbstständigen Krystalls zu besitzen, in der — einer anderen Substanz eigenthümlichen Form — beobachtet wird.

Zur Untersuchung der Pseudomorphosen ist immer die Mitwirkung der Chemie nöthig, da einerseits nur sie den Aufschluss über die, die Pseudomorphose bildende Substanz geben kann, zweitens aber sie durch die künstliche Nachbildung Aufklärung über die Processe darbietet, welche die Umwandlung der Substanzen erzeugten. Und wahrlich, vielfache Versuche auf diesem Gebiete haben es ermöglicht, bisher mindestens von den interessantesten mineralogischen Pseudomorphosen künst-

liche Nachahmungen zu liefern, wenn auch der Gang der Natur nicht derselbe gewesen sein musste.

Bedenkt man den möglichen Bildungsgang einer Pseudomorphose, so kann derselbe doppelt sein: entweder steht der pseudomorphosirende Körper mit dem pseudomorphosirten in einem chemischen Zusammenhange, so dass durch langsame Umwandlung je ein Theilchen des letzteren durch eines vom ersten ersetzt wird; oder zweitens, es ist ein solch langsame chemische Umwandlung des ersten Stoffes in den zweiten undenkbar und nur eine gleichsam mechanische Nachbildung vorhanden, wie diess der Fall ist, wenn entweder sich um einen Krystall eine Hülle eines fremden Stoffes legt oder wenn ein Eindruck eines Krystalls in sein Muttergestein später, nach vorhergehendem Wegschaffen desselben, mit einem neuen, unabhängigen Stoffe ausgefüllt wird.

Auf diese Anschauungsweise gestützt kann man daher die Pseudomorphosen in chemische und mechanische (gebildete) eintheilen, — dass auch bei letzteren der chemische Process der Krystallbildung wirkt, darf wohl nicht gegen den Namen sprechen.

Die ersten, chemischen Pseudomorphosen zerfallen nun, da ihr Charakter im allmäligen Umtausche von Molecül des einen Stoffes zum Molecül eines zweiten (dimorphe Körper nicht ausgenommen) besteht in drei Hauptgruppen: *A*) ohne, *B*) mit theilweiser, *C*) mit vollständiger Substanzveränderung. Die Körper der Gruppe *A*) (welche die dimorphen Körper umfasst) werden Paramorphosen, *C*) Verdrängungspseudomorphosen genannt, *B*) hingegen unter dem Namen Umwandlungspseudomorphosen begriffen, die sich wieder in drei Gruppen theilen: *a*) entstanden durch Verlust, *b*) durch Aufnahme *c*) durch Austausch von Bestandtheilen.

Aus dieser Gruppe der chemischen Pseudomorphosen könnten vielleicht die Paramorphosen ausgeschieden, und wie es mehrere Systematiker thun, selbstständig behandelt werden, allein da dieselben — wenn auch noch die Verhältnisszahlen der Grundstoffe erhalten bleiben — doch durch die geänderte Lage der Molecüle einen neuen Stoff erzeugen, so dürfte ihr Platz im Systeme, wodurch eine vollständig geschlossene Reihe erzielt wird, gerechtfertigt sein.

Die zweiten, mechanischen, unterscheiden sich nach der schon oben erwähnten Art ihrer Bildung in 1. Umhüllungs- und 2. Ausfüllungspseudomorphosen.

Diese Eintheilung der Pseudomorphosen umschliesst wohl alle Gebilde, wo ein Stoff die Gestalt eines zweiten direct nachahmt, allein in der Natur muss die Nachahmung meist nicht bloss ein Stadium, sondern mehrere der allmäligen Umbildung durchlaufen; solche sind im

Allgemeinen schwierig zu präcisiren und für jeden speciellen Fall die Aufeinanderfolge der Metamorphosen zu bestimmen.

Die hier durchgeführte Eintheilung würde mancher Aenderung unterliegen, wollte man sie nicht den fertigen Gebilden, sondern mehr den genetischen Vorgängen anpassen. Letzteres musste in diesem — als einem wesentlich anderem Zwecke gewidmeten — Werke unterbleiben, und es kann hier nur auf die vielen trefflichen Arbeiten auf dem Gebiete der chemischen Mineralogie und Geologie hingewiesen werden, welche bestrebt sind, die Paragenesis und die vielfachen Metamorphosen der Gesteine zu betrachten und aufzuklären. Bischof's chemische Geologie und Volger's Entwicklungsgeschichte der Mineralien bilden den Ausgangspunkt für diese Forschungen.

§. 33. Im Nachfolgenden sind nun aus der Reihe der bekannten Pseudomorphosen die wichtigsten hervorgehoben und ohne weitere Rücksicht auf ihren etwaigen chemischen Verwandlungsprocess — bloss mit Rücksicht auf den abgeschlossenen Zustand, in welchem sie beobachtet wurden — systematisch erörtert worden.

### I. Chemische Pseudomorphosen.

#### A) Paramorphosen.

Unter Paramorphosen (I. *A*) verstehen wir jene Umwandlungsgebilde, in welchen eine veränderte Atomgruppirung stattgefunden hat. Sie sind daher nur auf die dimorphen Körper, welche dieser Bedingung genügen können, beschränkt, ihre Verhältnisse daher unmittelbar von jenen dieser letzteren ableitbar.

Bei der Theorie der dimorphen Körper ward daher bereits das Wichtigste über die Bildung derselben und auch über die eintretende Umwandlung beider Phasen in einander gesprochen; es erübrigt daher, nur weniges beizufügen.

Die Paramorphosen gehen meist in der Weise vor sich, dass der mehr labile Gleichgewichtszustand sich in den mehr stabilen verwandelt, die hiebei eintretende Umlagerung der Molecüle beginnt hiebei meist an jenen Stellen, welche der äusseren Einwirkung am meisten ausgesetzt sind, und schreiten von hier aus durch den ganzen Krystall vor. Hiedurch zerfällt der ursprüngliche Krystall in ein mikrokrystallinisches Conglomerat der zweiten, dimorphen Substanz.

Die Paramorphosen erscheinen — wie die chemischen Pseudomorphosen überhaupt — durch diese dem Wesen eines Krystalls widersprechende Gruppirung der kleinsten Theilchen meist undurchsichtig, trübe oder höchstens durchscheinend und das optische Verhalten anormal.

Als Beispiele für diese Paramorphosen können die bereits beim Dimorphismus erwähnten Fälle von Quecksilberjodid und kohlensaurem

Kalk gelten; letzterer als Arragonit und Calcit ist dem Mineralreiche angehörig, und deren Metamorphose durch künstliches Umbilden des Ersteren mittelst Erhitzens zu beobachten. Weitere Beispiele liefern die von geschmolzenem Schwefel künstlich dargestellten Krystalle, welche nach einiger Zeit von selbst oder mit Schwefelkohlenstoff befeuchtet, sogleich in ein Aggregat von rhombischen Krystallen übergehen, ohne jedoch ihre monoclinische Form zu verlieren. Dasselbe ist der Fall mit den Krystallen des rhombischen Nickelsulphats, die sich in einem verschlossenen Gefässe dem Licht ausgesetzt in Aggregate von tetragonalen Pyramiden verwandeln.

Auf dem Gebiete der Mineralogie ist das Vorkommen der — Paramorphosen ähnlichen — Fälle beschränkt; ich erwähne: Hornblende nach Augit[1]), Serpentin nach Chrysolit[2]), Mesotyp nach Nephelin, Epidot nach Wernerit, und auch die Erkenntniss derselben schwierig, da es möglich ist, dass wir von manchem Vorkommniss die eigentlichen, selbstständigen Formen nicht kennen. Manche Mineralien haben sich unter anderen Bedingungen gebildet, als welche jetzt noch herrschen, es ist daher denkbar, dass diese Veränderung der Verhältnisse allmälig eine Paramorphose herbeigeführt hat, welche uns die Krystallform des ursprünglichen Typus bewahrt hat.

Haidinger hat diese Verhältnisse am Natrolith gewürdigt und den Namen Paläonatrolith zur Bezeichnung der Paramorphose vorgeschlagen. Es bestehen nämlich die Krystalle jetzt nur aus einem Aggregat von faseriger Natrolithsubstanz, da diese Substanz nicht mehr unter den bestehenden Verhältnissen selbstständige Krystalle zu bilden vermag — letztere also von einem früher bestandenen Paläonatrolith hergeleitet werden könnten — analog hiermit die Paramorphose Paläotraversellit nach Traversellit.

Schliesslich ist noch die Eintheilung der Paramorphosen von Scheerer[3]) zu erwähnen. In dieser eben citirten Schrift wird der Paramorphismus definirt als das „Zugleichauftreten der beiden Formen eines dimorphen Körpers in einem und demselben Krystall", sowie derselbe auch von chemischen Pseudomorphosen getrennt, da letztere aus dem ursprünglichen Krystalle durch eine chemische Veränderung, nämlich Molecülwanderung, erstere hingegen durch eine physische Veränderung einer Molecül-Umsetzung entstanden ist.

Betrachtet man aber die Pseudomorphosen als den Inbegriff aller Gebilde, welche entweder durch eine moleculare oder mechanische Ver-

---

[1]) Scheerer: Pogg. Ann. 89. pag. 12. vol. 93. 100.

[2]) Scheerer. Pogg. Ann. 93. pag. 109.

[3]) Scheerer. Der Paramorphismus und dessen Bedeutung in Chemie, Mineralogie und Geologie, 1854.

änderung des Stoffes hervorgebracht wurden — wie diess hier der Fall ist — so ist die hier befolgte Eintheilung die consequente Folge hievon.

B) Umwandlungs-Pseudomorphosen.

I. *B*) Zu den Umwandlungspseudomorphosen werden meist alle jene Gebilde gerechnet, welche durch den theilweisen Austausch von einzelnen chemischen Bestandtheilen entstanden sind. Während im vorigen Falle nur ein dimorpher Körper an die Stelle des ursprünglichen Krystalls getreten ist, so ist bei diesen Gebilden der grösstmögliche Spielraum der Stoffänderung gegeben, welcher nur durch den chemischen Process selbst seine Grenzen gezogen erhält. Der Bildungsgang einer solchen Pseudomorphose war im Allgemeinen der, dass durch chemische Einwirkung die Umwandlung der krystallisirten Substanz in eine kryptokrystallinische oder amorphe so langsam und allmälig bewirkt ward, dass letztere in ihrer molecularen Ablagerung noch immer die Form des umgewandelten Krystalls imitirte. In manchen Fällen ist sogar noch die Spaltbarkeit erhalten geblieben. Die pseudomorphosirende Substanz bildet meist ein verworrenes, unregelmässiges Aggregat, wobei die einzelnen kryptokrystallinischen Partikelchen selten eine gesetzmässige Lage zu sich oder der ursprünglichen Gestalt einnehmen.

Da die chemische Umwandlung von aussen nach innen vorschreitet, so ist es möglich, dass im Innern noch ein unveränderter Kern vorhanden bleibt. Man hat diese Kernkrystalle auch unter dem Namen Perimorphosen[1]) begriffen, obgleich letztere auch noch eine zweite Bildungsart besitzen können, nemlich die ursprüngliche Entstehung als ein mechanischer Einschluss, dem der umhüllende Stoff seine Krystallform aufgedrückt.

Die Bildung der Umwandlungspseudomorphosen wurde durch zahlreiche chemische Versuche nachgeahmt und hiedurch wenigstens in den meisten Fällen aufgeklärt, obgleich die Natur bei der langen Dauer ihrer Processe auch noch andere Wege befolgt haben kann. Man pflegt daher nach dem Vorgange von Landgrebe[2]) dieselben je nach einem Verluste, Aufnahme und Austausche von Bestandtheilen einzutheilen, wie diess auch oben angezeigt wurde.

**a) Umwandlungs-Pseudomorphosen, gebildet durch einen Verlust von Bestandtheilen.**

Blum[3]) in seinem umfassenden Werke hat zahlreiche Fälle im Mineralreiche beschrieben; ich hebe nach dem Vorgange Scheerer's

---

[1]) Scheerer. Ueber Afterkrystalle. 1856. pag. 35.
[2]) Landgrebe. Die Pseudomorphosen im Mineralreiche. 1841.
[3]) Blum. Die Pseudomorphosen des Mineralreiches, mit 3 Nachträgen.

diejenigen Beispiele hervor, deren chemische Umwandlung am prägnantesten ist.

1. Antimon Sb nach Antimonblüthe Sb $O_3$.
2. Bleiglanz PbS nach Bournonit $(2PbS + Cu_2S) SbS_3$.
3. Calcit CaO $CO_2$ nach Gaylussit CaO, $CO_2 + NaO, CO_2 + 5HO$.
4. Heteromorphit $2PbS + SbS_3$ nach Plagionit $5PbS + 4SbS_3$.
5. Kupfer Cu nach Rothkupfer $Cu_2O$.
6. Kupferglanz $Cu_2S$ nach Kupferkies $Cu_2S + Fe_2S_3$.
7. Quarz $SiO_2$ nach Heulandit und Stilbit CaO, $3SiO_2 + Al_2O_3$, $3SiO_2 + 5HO$.
8. Silber Ag nach Bromsilber AgBr.
9. Silberglanz AgS nach Rothgiltigerz 3AgS (Sb, As, $S_3$).
10. Willemit 2ZnO $SiO_2$ nach Hemimorphit 2ZnO $SiO_2 + HO$.

Auf dem Gebiete der Chemie lassen sich derlei Umwandlungs-Pseudomorphosen am leichtesten von Substanzen darstellen, deren Krystallwasser durch Erhitzen entweicht. Erhitzt man einen Krystall der rhombischen Zinkvitriole ZnO, $SO_3 + 7HO$ bis zu $40^0$ C., so verwandelt sich derselbe in ein Aggregat von kryptokrystallinischen Nadeln, welche aber monoclinisch sind und der Substanz ZnO, $SO_3 + 6HO$ angehören, da durch Erhitzen ein Aequivalent Wasser verloren ward. Eine analoge Pseudomorphose lässt sich bei kohlensaurem Natron durchführen, welches bei $0^0$ monoclinisch mit 10HO krystallisirt, bei $12^0$ C. verwandeln sich diese Krystalle in ein Aggregat von prismatischen Krystallen von NaO $CO_2 + 5HO$, letzteres verliert bei $38^0$ C. nochmals 4HO und stellt dann eine Pseudomorphose von NaO $CO_2 + HO$ nach NaO $CO_2 +$ 10HO dar.

**b) Umwandlungs-Pseudomorphosen, gebildet durch eine Aufnahme von Bestandtheilen.**

Als die wichtigsten der dieser Abtheilung zuzurechnenden Pseudomorphosen können betrachtet werden.

1. Antimonblüthe Sb $O_3$ nach Antimon Sb.
2. Anglesit PbO $SO_3$ nach Bleiglanz PbS.
3. Gyps CaO, $SO_3 + 2HO$ nach Anhydrit CaO $SO_3$.
4. Brauneisenstein $Fe_2O_3 + HO$ nach Eisenglanz $Fe_2O_3$.
5. Kupferlasur 2CuO $CO_2 +$ CuO HO nach Rothkupfer $Cu_2O$.
6. Malachit CuO $CO_2 +$ CuO HO nach Rothkupfer $Cu_2O$.

Auch auf diesem Gebiete ist es der Chemie bereits gelungen, einige Pseudomorphosen künstlich zu erzeugen; der interessanteste Fall hiefür ist die Pseudomorphose von Schwefelsilber nach Schwefel. Werden nämlich die Schwefelkrystalle in einer ammoniakhaltigen Silberlösung erhitzt, so bildet sich Schwefelsilber, welches allmälig den ganzen Krystall er-

füllt; leicht lässt sich diess namentlich bei den bereits paramorphosirten monoclinischen Schwefelkrystallen darstellen, wodurch zugleich ein doppelter Fall einer Pseudomorphose von Schwefelsilber nach rhombischem nach monoclinischem paramorphosirtem Schwefel erzeugt wird.

### c) Umwandlungs-Pseudomorphosen, gebildet durch theilweisen Austausch von Bestandtheilen.

Aus den zahlreichen Fällen, welche mehr oder minder dieser Gruppe angehören, hebe ich nach Vorgang Scheerer's die vorzüglichsten Beispiele heraus.[1]

1. Antimonblüthe Sb $O_3$ nach Antimonit $SbS_3$.

2. Antimonblende $SbO_3 + 2SbS_3$ nach Antimonit $SbS_3$.

3. Baryt BaO $SO_3$ nach Witherit BaO $CO_2$ — 4) nach Barytocalcit BaO $CO_2$ + CaO $CO_2$.

5. Brauneisenstein $Fe_2$ $O_3$ + aq nach Pyrit Fe $S_2$ — 6. nach Strahlkies Fe $S_2$ — 7. Skorodit $Fe_2 O_3$ As $O_5$ + 4HO — 8. nach Pharmacosiderit $3FeO_3$, 2As $O_5$ + 12HO — 9. nach Sphärosiderit FeO $CO_2$.

10. Dolomit (CaO MgO) $CO_2$ nach Calcit CaO $CO_2$.

11. Bleiglanz PbS nach Pyromorphit PbCl + 3 (3PbO $PO_5$).

12. Calcit CaO $CO_2$ nach Anhydrit CaO $SO_3$ — 13. nach Gyps CaO, $SO_3$ + 2HO.

14. Cerussit PbO $CO_2$ nach Bleiglanz PbS — 15. nach Bleivitriol PbO, $SO_3$ — 16. nach Bleihornerz PbCl + PbO $CO_2$ — 17. nach Leadhillit 3PbO $CO_2$ + PbO $SO_3$ — 18. nach Linarit $PbOSO_3$ + CuO HO.

19. Eisenvitriol FeO $SO_3$ + 7HO nach Schwefelkies Fe $S_2$.

20. Flussspath CaFl nach Calcit CaO $CO_2$.

21. Gyps CaO $SO_3$ + 2HO nach Calcit CaO $CO_2$.

22. Göthit $Fe_2$ $O_3$ HO nach Schwefelkies $FeS_2$.

23. Hausmannit MnO $Mn_2O_3$ nach Manganit $Mn_2O_3$ + HO.

24. Kakoxen $2Fe_2O_3$ $PO_5$ + 12HO nach Sphärosiderit FeO $CO_2$.

25. Kobaltblüthe 3CoO $AsO_5$ + 8HO nach Sphärosiderit FeO $CO_2$.

26. Kupferschwärze CuO nach Kupferglanz $Cu_2S$.

27. Kupferpecherz CuO $Fe_2O_3$ + aq nach Kupferkies $Cu_2S$ $Fe_2S_3$ — 28. nach Fahlerz 4RS ($AsS_3$, $SbS_3$).

29. Kupferindig CuS nach Kupferkies $Cu_2S$ $Fe_2S_3$.

30. Kupferlasur 2CuO $CO_2$ + CuO HO nach Fahlerz.

31. Kupferkies $Cu_2S$ $Fe_2S_3$ nach Fahlerz.

32. Malachit CuO $CO_2$ + CuO HO nach Kupferlasur 2CuO $CO_2$ + CuO HO — 33. nach Kupferkies $Cu_2S$ $Fe_2O_3$ — 34. nach Fahlerz.

35. Molybdänblei PbO $MO_3$ nach Bleiglanz PbS.

36. Opal $SiO_2$ + aq nach Augit RO $SiO_2$.

37. Orthoklas $KO, 3SiO_2 + Al_2O_3, 3SiO_2$ nach Laumonit $CaO\ SiO_2 + Al_2O_3, 3SiO_2 + 4HO$ — 38. nach Leucit $KO\ SiO_2 + Al_2O_3, 3SiO_2$.

39. Prehnit $2(CaO\ SiO_2) + Al_2O_3, SiO_2 + HO$ nach Analcim $NaO, SiO_2 + Al_2O_3, 3SiO_2 + 2HO$ — 40. nach Natrolith $NaO\ SiO_2 + Al_2O_3, 2SiO_2 + 2HO$.

41. Pyrolusit $MnO_2$ nach Manganit $Mn_2O_3 + HO$.

42. Pyromorphit $3(3PbO, PO_5) + Pb\ Cl$ nach Cerussit $PbO\ CO_2$ — 43. nach Anglesit $PbO\ SO_3$.

44. Pyrit $FeS_2$ nach Mispikel $FeS_2 + Fe\ As$ — 47 nach Kupferkies $Cu_2S\ Fe_2S_3$.

46. Scheelit $CaO\ WO_3$ nach Wolfram $(FeO\ MnO)\ WO_3$.

47. Stilpnosiderit $Fe_2O_3 + aq$ nach Vivianit $3FeO\ PO_5 + 8HO$.

38. Stiblith $SbO_3, SbO_5 + 2HO$ nach Antimonit $SbS_3$.

49. Witherit $BaO\ CO_2$ nach Baryt $BaO\ SO_3$.

50. Wismuthoker $BiO_3$ nach Aciculit $3Cu_2S\ BiS_3 + 2\ (3PbS, BiS_3)$.

In diesen angeführten Pseudomorphosen, welchen sich noch eine gleich grosse Zahl vielleicht chemisch minder prägnanter Fälle anreihen liessen, ist die Umwandlung der Substanz so weit gediehen, dass ein oder der andere Hauptbestandtheil noch vorhanden bleibt. Meist werden in diesen Fällen die Schwefelverbindungen in Sauerstoffverbindungen oder umgekehrt verwandelt, oder der Wasser- oder Sauerstoffgehalt der Verbindung geändert. Hätte bei mehreren dieser angeführten Fälle der chemische Process der Umwandlung fortgedauert, so würden vielleicht auch allmälig die jetzt noch restirenden Bestandtheile ausgetauscht worden sein und hiedurch die letzte Form der chemischen Pseudomorphosen, die der Verdrängung entstanden sein.

Auch für diese Gattung der Umwandlungs-Pseudomorphosen hat die Chemie bereits Mittel gefunden, einzelne der interessantesten leicht darzustellen; am leichtesten geschieht diess bei den Schwefelmetallen, welche durch Behandlung mit Schwefelwasserstoff oder Schwefelammonium in die Sauerstoffverbindung verwandelt werden. Analog hiemit dient eine Kalilösung dazu, Pseudomorphosen durch Umtausch der Säuren zu bilden; so verwandelt sich das salpetersaure Bleioxyd in einer Lösung von schwefelsaurem Kali in schwefelsaures Bleioxyd, salpetersaures Silberoxyd in einer Lösung von chromsaurem Kali in chromsaures Silberoxyd.

Nach den Angaben von Delesse[1]) hat sich in neuerer Zeit namentlich Sorby mit der künstlichen Nachbildung von Pseudomorphosen beschäftigt und durch langdauernde Einwirkung der Agentien bereits mehrere der wichtigeren erzeugt.

[1]) Delesse. Ann. des mines. 1859. XVI. 317.

Gyps verwandelt sich bei gewöhnlicher Temperatur mittelst Baryumchlorür in Schwerspath, mittelt Lösung von kohlensaurem Natron in Calcit, Witherit in schwefelsaurem Natron gibt Baryt. Bei einer Temperatur von 100—150° C. hat ferner Sorby die Carbonate von Eisen und Magnesia in Form von Calcit, Arragonit, Witherit; Calcit in Form von Flussspath, Witherit; Witherit und Strontianit in der Form ihrer Sulphate erhalten.

C) Verdrängungs-Pseudomorphosen.

Das Wesen dieser Aftergebilde besteht darin, dass an die Stelle des pseudomorphosirten Körpers bereits eine von denselben vollständig chemisch verschiedene und nicht ableitbare Substanz getreten ist. Diese Gebilde können entstehen, wie oben erwähnt, durch die allmälige Metamorphose der Substanz oder auch durch einen plötzlichen Process der Auflösung und gleichzeitigen Ablagerung, wo die Verschiedenheit der Löslichkeit die Ursache der Umbildung ist; sie schliessen jedoch einen bloss mechanischen Grund der Bildung, ohne vorhergegangene chemische Action aus. Schwierig sind nur jene Fälle zu entscheiden, wo auch der zweite Körper Bestandtheile des ersten besitzt, jedoch es zweifelhaft ist, ob dieselben von letzterem übrig geblieben, oder neu eingeführt worden sind.

Einzelne der wichtigsten Fälle sind:

1. Brauneisenstein nach Calcit — 2. nach Bitterspath — 3. nach Weissblei — 4. nach Rothkupfererz

5. Calcedon nach Datholith? — 6. nach Calcit.

7. Eisenoxyd nach Calcit — 8. nach Bittersalz.

9. Erdkobalt nach Calcit.

10. Göthit nach Calcit.

11. Hausmannit nach Calcit.

12. Kupferlasur nach Dolomit.

13. Malachit nach Calcit — 14. nach Cerussit.

15. Manganit nach Calcit.

16. Manganspath nach Calcit.

17. Prasem nach Calcit.

18. Pholerit nach Wolframit.

19. Pyrolusit nach Calcit — 20. nach Dolomit — 21. nach Willemit.

22. Sphärosiderit nach Calcit — 23. nach Dolomit.

24. Stilpnosiderit nach Dolomit — 25. nach Willemit — 26. nach Rothkupfererz.

27. Speckstein nach Dolomit — 28. nach Spinell — 29. nach Quarz — 30. nach Andalusit — 31. nach Chiastolith — 32. nach Topas — 33. nach Feldspath — 34. nach Glimmer — 35. nach Wernerit —

36. nach Turmalin — 37. nach Staurolith — 38. nach Granat — 39. nach Idokras — 40. nach Augit.

Von diesen angeführten Pseudomorphosen könnten einige derselben auch in die frühere Gruppe *B c* Umwandlungs-Pseudomorphosen mit nur theilweisem Austausch der Bestandtheile eingereiht werden; allein ihre Bildungsweise ist noch nicht mit absoluter Sicherheit[1]) festgestellt.

## II. Mechanische Pseudomorphosen.

II. Die mechanischen Pseudomorphosen sind von der früheren Hauptabtheilung namentlich dadurch scharf getrennt, dass es nie Ein continuirlicher chemischer Process war, der die Verdrängung des ursprünglichen Stoffes und die Neubildung eines zweiten unter einem und zugleich bewerkstelligte, sondern dass immer diese Actionen von mehreren unabhängig wirkenden und sich gegenseitig nicht bedingenden Ursachen abgeleitet werden müssen.

Während daher bei allen früheren die metamorphosirende Substanz nur allmälig Molecül für Molecül erzeugt, und daher immer mikrokrystallinisch sein muss, so ist hier eine freie Krystallisation möglich und als Charakteristikon gegenüber den Verdrängungs-Pseudomorphosen zu beachten.

Wird die Gestalt eines noch vorhandenen Krystalls nachgebildet, so nennt man diess Umhüllungs-, wird hingegen sein Abdruck abgebildet, Ausfüllungs-Pseudomorphose.

II. *a.* Unter Umhüllungs-Pseudomorphosen verstehen wir alle jene Gebilde, welche dadurch entstehen, dass sich über einen vollständig intacten Krystall — ohne chemische Einwirkung auf denselben — auf seiner Oberfläche durch allmäligen Niederschlag und Krystallisirung — eine ihn umschliessende Hülle eines fremden Stoffes bildet. Im Beginne des Processes sind diess also dünne Krusten, welche den inneliegenden Krystall, wie eine Schale umschliessen und deren Oberfläche dessen Form deutlich erkennen lässt. Die nur theilweise eingeschlossenen Krystalle werden jedoch häufig durch spätere Auflösung weggeschafft, wodurch Hohlräume entstehen; die Innenseite der Krusten zeigt dann wie die Aussenseite die Form des ursprünglichen Minerals. Wird nun noch fortdauernd der pseudomorphose Stoff zugeführt, so wird sich derselbe sowohl an der Aussen- als auch Innenseite in Krystallen ansetzen. Die an der Aussenseite gebildeten und divergirenden Krystalle gehören in das Gebiet der Umhüllungs-Pseudomorphosen, die hingegen nach Innen zu concentrisch gerichteten Krystalle sind als Ausfüllungs-Pseudomorphosen (II. *b*) zu betrachten.

---

[1]) Bischof. Lehrbuch d. chem. u. phys. Geol. I. 789. II. 188.

Umhüllungs-Pseudomorphosen sind in der Natur nicht selten, da die so häufig vorkommenden Mineralien, Calcit, Dolomit und Quarz zahlreiche Inkrustationen bewerkstelligen; als auffallendes Beispiel für alle erwähnten Verhältnisse dürfte wohl die Pseudomorphose von Dolomit über Baryt etc. von Přibram erwähnt werden.

II. *b*. Die Ausfüllungs-Pseudomorphosen sind in den meisten Fällen die Folge von vorhergegangenen Umhüllungen und Auflösung des eingeschlossenen Krystalls. Hier sind zwei mögliche Fälle zu unterscheiden, ob der ausführende Stoff ident oder verschieden mit dem umhüllenden ist. Im ersten Falle tritt die Pseudomorphose meist nur mit der obigen (II. *a*) gleichzeitig auf, im letzteren hingegen ist es möglich, dass ein fernerer chemischer Process die Umhüllung auflöste und nur letztere erhalten blieb.

Der Charakter eines solchen Gebildes besteht immer darin, dass die Krystalle nach innen zu convergiren und möglich sogar in der Mitte einen noch unausgefüllten Hohlraum einschliessen.

Ein anderer Weg zur Bildung einer Ausfüllungs-Pseudomorphose wäre, wenn der Hohlraum nicht durch Umhüllung gebildet wird, sondern nur der Abdruck eines später aufgelösten Krystalls in seinem ursprünglichen Muttergestein ist. Wird ein solcher Hohlraum ausgefüllt, so ist die Pseudomorphose für sich allein bestehend. Möglich sind solche Fälle am leichtesten in Erzgängen, wo die eingestreut liegenden Krystalle oft der Umwandlung ausgesetzt sind.

Mit diesen Gebilden wäre zugleich die Betrachtung des gesammten Gebietes der monogenen Pseudomorphosen geschlossen. Alle in der Natur vorkommenden polygenen Fälle können auf eine Combination dieser Bildungsweisen zurückgeführt werden. Wohl ist der Vorgang bei manchen nicht einfach und direct, sondern mehrere Zwischenglieder erfordernd; allein die Kenntniss der möglichen Veränderung wird jedes derselben zu erkennen geben.

§. 34. Schliesslich erübrigt noch, gegenüber Vorstehendem auch die Eintheilungen anderer Autoren anzuführen.

In dem für die Kenntniss der Pseudomorphosen so wichtigen Werke Blum's[1]) werden die Aftergebilde eingetheilt in Umwandlungs-, mit Aufnahme, Verlust, Austausch von Bestandtheilen — und Verdrängungs-Pseudomorphosen.

Landgrebe[2]) registrirt Umwandlungs-Pseudomorphosen 1. ohne, Verlust und ohne Aufnahme, 2. durch Verlust, 3. durch Aufnahme

[1]) Blum. Die Pseudomorphosen des Mineralreiches 1843, 1847, 1852, 1863.

[2]) Landgrebe. Ueber die Pseudomorphosen im Mineralreiche. Cassel 1841.

4. durch theilweisen Austausch, 5. durch vollständigen Austausch (Verdrängung).

Haidinger[1]) kennt anogene und katogene, Dana[2]) hingegen die durch Inkrustation, Verdrängung, chemische Umwandlung und Paramorphismus erzeugten Pseudomorphosen.

Naumann[3]) theilt nach dem Vorgange Blum's die Pseudomorphosen ein in hypostatische und mesosomatische; erstere sind durch den Absatz einer fremdartigen Substanz, letztere durch Umwandlung des Krystalls gebildet. Die hypostatischen zerfallen in exogene, esogene und amphigene.

Scheerer[4]) trennt die Paramorphosen von den Pseudomorphosen und theilt letztere in monogene und polygene — die monogenen weiter in syngenetische und epigenetische.

Die in obigem durchgeführte Eintheilung steht der von Quenstedt[5]) nahe, welcher Pseudomorphosen, entstanden durch chemische, von jenen durch mechanische Veränderung entstandenen trennt. Erstere zerfallen in Paramorphosen, und durch Verlust, Aufnahme, Austausch gebildeten, letztere in Ausfüllung und Umhüllung.

Trotz dieser mehrfachen Abweichungen haben dennoch alle diese Systeme das eine gemeinsame Moment, die Annahme von Umwandlungs-Pseudomorphosen.

Diese spielen auch weitaus die bedeutendste und interessanteste Rolle auf diesem Gebiete, und bedürfen zu ihrer Erklärung nicht bloss Kenntniss der paragenetischen, sondern auch der chemischen Vorgänge.

Die Chemie hat sich auch, wie früher erwähnt, bereits in vielfachen Fällen dieser Gegenstände bemächtigt und die Verhältnisse der Natur nachgeahmt. Wohl ist es auf diesem Wege möglich, viele auch in der Natur nicht vorkommenden Zwischenstufen zu erzeugen und so für manche zweifelhafte Fälle den Bildungsgang zu bestimmen.

Im Mineralreiche verschwinden solche Zwischenglieder in Folge der herrschenden Verhältnisse leicht und bald, und es werden nur die stabilsten Formen häufiger beobachtet. Für die Häufigkeit des Vorkommens hat Delesse[6]) eine Zusammenstellung versucht, aus welcher ich nachfolgende Daten entnehme.

Die einfachen Körper sind selten pseudomorph und entstehen gewöhnlich durch Reduction aus Mineralien, welche dieselben enthalten.

---

[1]) Haidinger. Pogg. Ann. 1844. vol. 62. pag. 161.
[2]) Dana. Silim. Ann. J. 1845. vol. 48. pag. 81. Syst. of Min. 1854. I. 222.
[3]) Naumann. Mineralogie 1862.
[4]) Scheerer. Bemerkungen über Afterkrystalle.
[5]) Quenstedt. Mineralogie 1863.
[6]) Delesse. Ann. d. min. 1859. XVI. 317.

Die Schwefel- und Arsenverbindungen gehen sehr oft aus anderen Schwefel- und Arsenikverbindungen hervor, auch aus Sauerstoffsalzen, niemals aber aus Silicaten.

Die Oxyde bilden Pseudomorphosen der verschiedensten Minerale, während die Silicate am häufigsten aus Silicaten entstehen. Andere Verbindungen, wie Sulphate, Phosphate, Arseniate, Carbonate, Wolframiate und Molybdate sind im Allgemeinen pseudomorph nach Gangmineralien.

Die Pseudomorphosen sind am häufigsten Folge der Umwandlung, weniger der Verdrängung, und letztere gehören besonders den Gängen an.

Pyrit, Hämatit, Limonit, Quarz, die Hydrosilicate, namentlich die Magnesiasilicate sind die am häufigsten als pseudomorphosirende Substanzen vorkommenden Minerale, während nach Fluorit, Steinsalz, Baryt, Anhydrit, Gyps und den Carbonaten die Mehrzahl der Pseudomorphosen beobachtet wird.

# VIII. Kapitel.

## Unregelmässigkeiten der Ausbildung.

§. 35. In den vorhergehenden Kapiteln wurden die wichtigsten morphologischen Verhältnisse der Substanz erörtert, aber wir knüpften alle unsere Betrachtungen an die vollendete Krystallgestalt, welche in allen ihren Theilen ausgebildet ist. In der Natur tritt aber eine solche Regelmässigkeit der Ausbildung, wegen der vielfachen Hindernisse der Krystallisation nicht constant auf, und nur dem Chemiker gelingt es, mit aller Aufmerksamkeit in seinem Laboratorium vollendet schöne Präparate darzustellen. Während die Untersuchungen letzterer selten mit wichtigen Unregelmässigkeiten der Ausbildung zu kämpfen haben, ist der Mineraloge hingegen oft in der Lage, aus einzelnen verstümmelten Theilen eines Krystalls die ganze Form abstrahiren und mindestens in seiner Vorstellung ergänzen zu müssen.

Wie wir bereits bei der Krystallogenesis erwähnten, ist für eine vollkommene Ausbildung die ungehinderte Entwicklung nach allen Seiten nöthig, ohne durch Raumbegrenzung daran gehindert zu sein. Die sogenannten losen Krystalle sind daher auch meist die vollständig und allseitig ausgebildeten; sie haben sich entweder in der Höhlung der sie umgebenden Masse oder auf andere Weise als einzelne Krystalle gebildet und sind durch Zerstörung ihrer Unterlage frei und lose geworden.

Die in Höhlungen gebildeten Krystalle sind aber nicht immer diesen Anforderungen entsprechend, während einer oder der andere vollständig wird, tritt in vielen anderen Fällen oft eine Ueberfüllung des Raumes mit Mutterlauge und daher mit kleinen Krystallen ein, welche endlich ein regellos verworrenes Aggregat darstellen.

Die einzeln aufgewachsenen Krystalle sind andererseits meist nur zur Hälfte ausgebildet, mögen sie sich nun auf einer gleichen oder fremdartigen Masse ausgebildet haben. Nur in einzelnen günstigen Fällen, wo

gleichsam nur eine oder wenige Flächen den Stützpunkt für den aufgewachsenen Krystall bildeten, besitzt derselbe eine nahezu vollständige Ausbildung, und selten — nur in den Schaustücken der Natur, den wahren Repräsentanten der Species — sind die Krystalle der Mineralien das, was sie vorstellen sollen, sowohl ihrer inneren als äusseren Wesenheit nach.

Jeder Krystall soll einen geschlossenen Körper darstellen, vollkommen erfüllt mit einer der Mineralspecies homogenen Masse, dessen Flächen alle mit mathematischer Gleichheit entwickelt sind. Allein beides wird in den wenigsten Fällen erreicht.

Die Raumerfüllung in seinem Inneren ist oftmals gestört; es kommen Höhlungen, leer oder mit fremdartiger Materie gefüllt — Einschlüsse von fremden Mineralien im krystallisirten oder derben Zustande — und Verwachsungen von Krystallen mehrerer Species vor.

Wäre aber auch die Raumerfüllung wirklich vollkommen, so treten doch fast an jedem Krystalle äussere Deformitäten in Beziehung auf die Flächen auf. Die Krystalle sind oftmals gekrümmt und verbogen, die Flächen selbst ebenfalls gekrümmt, gestreift, verzogen.

Alle diese gegen die Regelmässigkeit des fictiven mathematischen Gebildes verstossende Zufälligkeit muss der Mineralog beachten, wenn er nicht durch dieselben getäuscht werden will.

§. 36. Betrachten wir nun die inneren Unterbrechungen der Raumerfüllung, so sind die — oft und namentlich bei Quarz mit freiem Auge sichtbaren — Höhlungen das erste Object.

Zahlreiche Beobachtungen haben erwiesen, dass beinahe jeder Krystall von solchen Höhlungen oder Poren erfüllt ist; die Grösse derselben und ihre Lage im Krystall ist aber schwankend und willkürlich, in den seltensten Fällen erreichen dieselben eine solche Grösse, dass sie sich den Beobachtungen mit freiem Auge darbieten, — Quarz ist hiefür die die Erscheinung am deutlichsten zeigende Mineralspecies — in den meisten Fällen sind sie von sehr geringem Durchmesser, bis zu 0·001 Millimeter herab, aber dann zahllos in dem Raume verstreut. Nicol und Brewster haben wohl die Erscheinung bei Baryt und Topas genauer erforscht, allein erst in der neuesten Zeit durch Sorby[1]) und Zirkel[2]) wurden umfassende Studien mittelst des Mikroskopes angestellt, welche das zahllose unbeschränkte Vorkommen der kleinen Poren erwiesen.

Die Poren sind entweder Hohlräume oder auch zum Theile mit einer Flüssigkeit gefüllt — man erkennt letzteres bei einer Drehung des

[1]) Sorby. Quat. Journ. of the Geol. Soc. 1858, 453.
[2]) Zirkel. Sitz. d. Wien. Ac. 1863.

Krystalls; — allein in den wenigsten Fällen ist man zur genauen Bestimmung der eingeschlossenen Flüssigkeit gelangt, die entweder Krystallwasser, Mutterlauge oder ein fremder Körper sein kann. Brewster[1]) hat in dieser Beziehung schon vor längerer Zeit auf die halb mit Flüssigkeit gefüllten Poren bei Topas hingewiesen, welche nun Simmler[2]) als möglicherweise mit Kohlensäure gefüllt angibt. Die Unterscheidung von hohlen und gefüllten Poren hat aber seit den Untersuchungen von Sorby und Zirkel ein erneuertes Interesse gewonnen durch die sich darin knüpfenden Bedingungen der Petrogenese, da die Flüssigkeitsporen für eine Bildung des Krystalls aus Lösungen, z. B. beim Quarz sprechen.

Die Lage der Höhlungen im Krystalle ist nicht regellos, doch finden sie sich in einzelnen Fällen parallel, gleichsam der äusseren Form eingelagert, so dass sich gewissermassen die Höhlungen an die allmäligen Bildungsstufen des Krystalls anlehnen. An Topas, Bergkrystall und am Eise hat Leydolt[3]) hierauf bezügliche Beobachtungen gemacht, G. Rose am Gypse.

Ausser diesen bisher betrachteten kleinen Höhlungen von runder oder ovaler Gestalt, deren Entstehung das Umschliessen von Luftblasen oder Flüssigkeitstropfen durch die schnell krystallisirende Substanz erklärt, kommen noch viele Fälle von grösseren Raumunterbrechungen durch irreguläre oder krystallähnliche Formen vor. An manchem Krystall des Quarzes hat man nun Gelegenheit, mehrere Vorkommnisse der letzteren Art gleichzeitig zu beobachten — sie sind oftmals alle gleicher Gestalt, allein die einen Hohlräume, während die andere Hälfte mit einem fremdartigen Stoffe oder Krystalle vollständig erfüllt ist.

Die Erklärung bietet sich wohl von selbst; auch die Hohlräume sind, da sie von gleicher Gestalt sind, ehemals erfüllt gewesen und nur durch äussere Einwirkungen geleert worden — beide gehören somit in das Gebiet der Einschlüsse. Unter diesem letzteren Namen werden nun in der Mineralogie alle jene Vorkommnisse zusammengefasst, wo entweder deutliche Krystalle oder nur kleine haar- oder schuppenförmige Partien eines Minerals von einer anderen Species umfasst werden.

Die specielle Theorie der Einschlüsse ist ebenfalls von grosser Wichtigkeit für die Petrogenese, da sie einigen Anhaltspunkt über das relative Alter der Mineralien gibt; denn jedenfalls ist für das specielle Handstück und das durch dasselbe bezeichnete Vorkommen das um-

[1]) Brewster. Edinb. Soc. Trans. 1826.
[2]) Simmler. Pogg. Ann. 105.
[3]) Leydolt. Sitzb. d. W. Acad. 1850.

schlossene Mineral älter als das umschliessende. Hierbei ist jedoch zu bedenken, dass ein und dasselbe Mineral verschiedenem Alter der Bildung anzugehören vermag.

Aus diesem Grunde war auch die Untersuchung der Einschlüsse Gegenstand einer Preisfrage der Harlemer Academie, welche durch Blum, Leonhard, Seiffert und Söchting[1]) gelöst ward und zahlreiche Daten zu Tage förderte.

Die am häufigsten als einschliessende Mineralien vorkommenden sind: Quarz, Calcit, Flussspath, Baryt, Feldspath, Turmalin — umschlossen sind hingegen am häufigsten Kupferkies, Pyrit, Chlorit, Göthit, Amiant.

Die Art des Umschlossenseins ist in allen diesen Fällen sehr mannigfaltig; oft sind vollständig ausgebildete, oft gebogene oder verbrochene Krystalle eingeschlossen und ragen mehrmals aus der Masse hervor oder durch dieselbe durch; oder es sind nur krystallinische Partien entweder im Inneren oder Aeusseren bloss gleichsam aufgestreut und eingewachsen.

Der morphologisch interessanteste Fall ist aber der, wenn diese Einschlüsse nicht ganz regellos, sondern nach einem Gesetze der Lagerung vor sich gegangen sind. Solche symmetrische Verwachsungen sind zweierlei Art beobachtet worden, entweder von Varietäten einer Species oder von verschiedenen Species selbst.

Auf die Verwachsungen von Varietäten einer Species, welche symmetrisch vor sich gegangen sind, hat namentlich Breithaupt[2]) die Aufmerksamkeit gelenkt. Bei Kalkspath und Baryt ist oftmals über dem ursprünglichen Krystall eine Schichte eines zweiten gelagert, der wohl nur als Varietät des ersten zu unterscheiden ist, allein selbstständig krystallisirt und mit dem ersten in symmetrischer Lage ist. Man sieht gleichsam durch den äusseren Krystall den inneren durch. Während bei diesen Mineralien nur eine oder wenige Lagen vorkommen, bilden hingegen die Feldspathe in grösseren Partien nichts als parallele Verwachsungen von zahllosen kleineren Lamellen von Varietäten.

Um diese Erscheinung zu erklären, ist anzunehmen, dass zwischen der Bildung der verschiedenen Schichten chemische Einwirkungen vor sich gegangen sein müssen, welche die Mutterlauge so weit veränderten, dass der Krystall als Varietät erkannt werden muss.

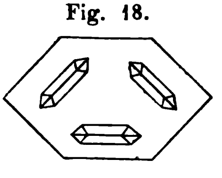
Die zweite Art der Verwachsung ist die zwischen verschiedenen Species. Hier hat jede Einwirkung einer chemischen Affinität geendigt und

[1]) Söchting. Einschlüsse. Berlin. 1861.

[2]) Breithaupt, Berg- und hüttenmännische Zeitung. Freiberg.

nur gewisse Aehnlichkeiten der Form und morphologische Symmetrie kann der Grund derselben sein. Das schönste von den zahlreichen Beispielen dieser Art dürfte das der Verwachsung von Rutil und Eisenglanz sein. Auf den sechsseitigen Hämatittafeln sitzen regelmässig aufgestreut die Rutilkrystalle (Fig. 18), so dass die Seiten des Prisma parallel der dreieckigen Streifung auf der Endfläche des Eisenglanzes liegen. Aehnliche Vorkommnisse von anderen Species sind schon seit länger bekannt; so wurden die Verwachsungen von Kyanit und Staurolith — eine Fläche und eine Axe ist parallel — von Germar, diejenigen von Orthoklas und Albit — grössere Krystalle des ersten sind mit kleinen Krystallen von Albit besetzt — von L. von Buch, diejenigen von Augit und Amphibol — eine Verwachsung von wechselnden Lamellen beider zu dem sogenannten Smaragdit — von Haidinger, die der Feldspathe im Allgemeinen von Breithaupt und Tschermak näher gewürdigt und beschrieben.

Fig. 18.



Allein diese symmetrischen Verwachsungen treten nicht bloss in der dem freien Auge sichtbaren Grösse auf, sondern oft werden die Partien, welche symmetrisch gelagert eingeschlossen sind, nur unter dem Mikroskope wahrgenommen; so enthält z. B. der Labrador kleine Hämatitschuppen in lamellarer Einlagerung, ein Phänomen, das Scheerer mit dem Namen Interponirung ausgezeichnet hat.

§. 37. Alle bisher betrachteten Phänomene betrafen die Abweichungen von einer regelmässigen Raumerfüllung durch eine homogene Masse; ausser dieser treten aber noch Unvollkommenheiten in der Formbildung selbst auf; letztere beziehen sich theilweise auf die ganze Gestalt oder nur auf einzelne Flächen.

Die wichtigste Deformität der ganzen Gestalt wird durch Krümmungen hervorgebracht, welche oftmals bei eingebetteten, nicht selten auch bei aufgewachsenen Krystallen vorzukommen pflegten. Nebenstehende Figur (Fig. 19) zeigt eines der auffallendsten Beispiele von Quarz von Lawrence Cy. U. St. Man könnte glauben, dass die Krystallsäule in mehrere Stücke zerbrochen, diese dann verschoben und wieder auf einander gelegt worden seien. Bei den Antimonit-Krystallen ist diess Vorkommen so häufig, dass selten grössere Krystalle beobachtet werden, welche nicht gekrümmt sind. Auch an Kalkspath, Turmalin, Beryll zeigen sich oftmal Spuren von Krümmungen, gleichsam eine unterbrochene Schichtung.

Fig. 19.

In diesen Fällen ist wohl der krystallographische Charakter der Species nicht alterirt worden, allein bei den Krystallen des Glimmers ist durch die Krümmung der Schichten bereits das Erkennen des Krystallsystems in Frage gesetzt. Die durchgehends beobachtete, dem Glimmer in Beziehung auf die optischen Verhältnisse eigenthümliche Krystallgestalt ist eine dem orthohexagonalen Systeme möglichst nahe stehende Form des prismatischen. Allein alle Krystalle der ganzen Gattung sind nicht compact, alle bilden aus Schichten zusammengesetzte Formen. Da aber diese Schichten nicht symmetrisch gelagert sind, sondern auch Krümmungen unterliegen, und namentlich bei Klinochlor beinahe regelmässig schief verlaufende Uebereinanderlagerung haben, so verzerren sie die prismatischen zu monoklinischen Formen.

Eine fernere Unregelmässigkeit der Gestalt besteht in dem Verzogensein des Krystalls; es wird dieselbe veranlasst durch das überwiegende Ausbilden einer Fläche auf Kosten aller übrigen, so dass der Krystall hierdurch eine übermässige Vergrösserung in die Länge oder Breite erhält, welche der mathematischen Gleichheit und Symmetrie widerspricht. Als einfaches Beispiel möge die so oft (Fig. 20) vorkommende Verziehung des Octaeders dienen. Im tesseralen Systeme sind derlei Verziehungen sehr häufig und auch wichtig, da ihr Vorkommen manchmal das Erkennen der Formen, ja des Systems selbst ohne Winkelmessungen sehr erschwert, besonders wenn noch sonst Unregelmässigkeiten, wie das Fehlen einer Fläche selbst hinzutreten.

Fig. 20.

Diess ebenerwähnte Fehlen einer Fläche gehört gleichfalls unter die allgemeinen Unregelmässigkeiten der Form, steht aber mit den Verziehungen im innigsten Verbande, denn in den meisten Fällen vergrössert sich eine Fläche so sehr auf Kosten einer der übrigen, dass letztere allmälig reducirt und endlich zum Verschwinden gebracht wird. Hiedurch ist schon angedeutet, dass diess regellose Fehlen von einzelnen Flächen — welches also überall möglich — sehr zu unterscheiden von jenem Unentwickeltsein von Flächen, welches regelmässig immer dieselben Flächenpaare trifft und den Charakter der Hemiedrie begründet.

§. 38. Aber nicht bloss die ganze Gestalt leidet unter solchen Anomalien, sondern diese treten oft ganz irregulär bei einzelnen Theilen hervor, und erzeugen hiedurch noch grössere Unbestimmtheit. Hierher gehören die Krümmungen und Streifungen der Flächen.

Die Streifung der Flächen, eine in der Natur sehr häufig auftretende Erscheinung, ist ihrer Entstehung nach eine zweifache: sie kann entweder

erzeugt werden durch die regelmässige, sich wiederholende Juxtaposition mehrerer Krystalle nach einem Zwillingsgesetze, wobei sich dieselben nur lamellar ausgebildet haben; oder sie kann zweitens entstehen durch die treppenförmige Alternation zweier Flächen, wobei sich die Repetition dieses nur sehr schmal entwickelten Flächenpaares über den Raum einer ganzen Fläche ausdehnt. Während nun erstere Bildung gesetzmässig zu nennen ist, muss hingegen letztere diesem Paragrafe eingereiht werden.

Die combinatorische Streifung ist sehr häufig und beinahe jedes Mineral hat bestimmte alternirende Flächenpaare, so dass in jedem Falle eben nur bestimmte Flächen gestreift erscheinen; ich will hier an den allbekannten Fall der Streifung der Prismen des Quarzes erinnern, der durch die Repetition des Prisma mit einer Pyramide gebildet wird. Die Eigenthümlichkeit, dass Flächenpaare zur Streifung bestimmt sind, ist um so mehr zu beachten, als hiezu manchmal Flächen mitwirken, welche ausserdem an der Species nicht beobachtet sind. Ein Beispiel hiefür bietet der Chabasit, an welchem die oscillatorische Streifung der Rhomboederfläche durch die Combination des Rhomboeders mit einem bisher nicht beobachteten Scalenoeder entsteht.

Die Streifung pflegt in vielen Fällen so fein zu sein, dass sie nur bei schärferer Prüfung erkannt wird; es wird hiedurch eine Scheinfläche erzeugt, welche ziemlich eben und ausgedehnt sein und beinahe mit einer wirklichen Krystallfläche vertauscht werden kann. Hessenberg[1]) macht auf dieses Verhältniss bei der Besprechung der zahlreichen Formen des Kalkspaths aufmerksam, deren viele bloss Scheinflächen, vielleicht entstanden durch oscillatorische Combination, sein können. Solche Scheinflächen müssen immer die Tangentialebene der Treppe darstellen, welche die alternirenden Flächen bilden; da aber die Ausbildung der Stufen nicht gleichmässig, diese daher nicht gleich sind, so kann die Lage der Tangentialebene für ein und dieselbe Combination variabel sein und alle Zwischenstadien zwischen gerade und oftmal gekrümmt durchlaufen. Durch diese Streifung können, wie Fig. 21 zeigt, Scheinflächen erzeugt werden, analog den Untersuchungen Scacchi's[2]), die nur gering von wahren abweichen.

Fig. 21.

Wie aus diesem eben Erwähnten erhellt, kann auch die Krümmung der Flächen durch die Flächenalternirung entstanden gedacht werden, wenn die entstehenden Treppen von abwechselnder Grösse, aber immer bedeutender Feinheit sind. Bei mehreren Mineralspecies laufen

[1]) Hessenberg. Mineralogische Notizen. 1856.
[2]) Scacchi, Poliedria Atti d'Ac. Turin 1863.

diese Treppen so ineinander über, dass die Fläche eben nur mehr als gekrümmt betrachtet werden kann. Eine solche wirkliche Krümmung dürfte vorhanden sein bei Diamant, Korund, Gyps, Sphärosiderit und Magnesit.

Ferner kommen noch einzelne Beispiele einer ganz regellosen Krümmung der Oberflächen des Krystalls vor, welche einen Habitus hervorrufen, als wenn der Krystall in Folge einer Schmelzung halb zerflossen oder an Ecken und Kanten abgerundet worden wäre. Der Apatit von Arendal liefert eines der charakterisirendsten Beispiele. Hier haben chemische Einflüsse gewirkt.

**§. 39.** Alle bisher betrachteten Unregelmässigkeiten der Entwicklung haben aber noch zum mindesten dem Gesetze gehorcht, dass jede Unregelmässigkeit, welche auf einer Fläche auftritt, auch auf den übrigen Flächen dieser Form vorkommen kann; allein es lassen sich oft unbestimmte, ganz regellose, durch Erhöhung oder Vertiefung verursachte Unebenheiten der Krystallflächen beobachten, ja, diese Unregelmässigkeiten der Flächen scheinen sich selbst bis auf das wichtigste Element, nämlich bis auf die Lage und Neigung zu erstrecken.

In letzterer Beziehung lehrt fast jede Beobachtungsweise, dass die Winkel nicht absolut constant, sondern insoweit schwankend sind, dass sie für gleichwerthige Kanten gleichsam um einen Mittelwerth auf- und niedersteigen.

Auf Anomalien hingegen hat zuerst Breithaupt[1]) hingewiesen, indem er Messungen veröffentlichte, welche eine Ungleichheit der Pyramidenwinkel im pyramidalen, hexagonalen und selbst tesseralen Systeme dargethan haben. Baudrimont[2]) bestätigt diess durch ähnliche Beobachtungen und erklärt dieselben für so häufig, dass sie Gegenstände specieller Doctrinen — Teratologie — sein könnten.

Wohl haben die späteren Beobachter das Vorhandensein von solchen Anomalien bestritten und nur gesetzlose zufällige Schwankungen um einen Mittelwerh angenommen; allein in jüngster Zeit hat Breithaupt seine früheren Beobachtungen ergänzt, durch analoge auf physikalischem Gebiete bekräftigt und auf solchen Grundlagen alle Abweichungen von den bisherigen 6 Krystallsystemen in 13 in einander verlaufende Systeme untergebracht, wobei letztere gleichsam Unterabtheilungen der ersteren bilden, je nachdem 1, 2 oder mehrere Winkel von dem absolut gerechneten abweichen.

---

[1]) Breithaupt. Handb. d. Mineralogie 1836. Leonhard's Jahrb. d. Min. 1860,

[2]) Baudrimont. Compt. rend. 1847. t. 25, p. 668.

Indessen auf diesem Gebiete sind genaue Untersuchungen anzustellen, um wirkliche Anomalien von bloss zufälligen Winkelschwankungen zu unterscheiden. Letztere werden — nach dem bei der Flächenausbildung Gesagten — vorkommen können und nichts anderes bedeuten, als dass die Flächen nicht normal gebildet sind, und sie müssen sich daher in ihrer Totalsumme aufheben und einen constanten Mittelwerth erzeugen; erstere hingegen würden sich eben nie aufheben, sondern immer eine gleiche Differenz darbieten müssen. Um jedoch mit Sicherheit urtheilen zu können, ist es nöthig, die bisher in solchen Fällen befolgten Untersuchungsmethoden als unrichtig zu verlassen.

Man pflegt bei den Winkelmessungen meist alle — auch an verschiedenen Krystallen — gewonnenen Werthe einer Flächencombination zu vereinen und den Mittelwerth derselben als wahren Werth anzugeben. Die auf solche Weise erhaltenen Resultate sind Mittelwerthe in dem Sinne, dass $\pm$ derselben die in der Natur beobachteten liegen; allein er gibt keine Aufklärung über die Bildung des Krystalls. Letztere können nur ermittelt werden durch die Discussion der Messungen an einem Krystall, welche mit absoluter Genauigkeit an allen seinen Flächen durchgeführt sind; indem nur hiedurch jede Abweichung von der normalen Lage einer Fläche also die Störung in der Lage erkannt werden kann, während andererseits durch das Summiren von allen möglichen — unter sich in keinem Connex stehenden — theils regelmässigen, theils zufälligen Abweichungen das Resultat jeder Beziehung mit der Krystallbildung berauben.

Ein zweiter Fehler mehrerer Beobachter war, über die Anomalie der Winkel aus, die Lage nur ungenügend oder nur theilweise bestimmenden, Messungen beurtheilen zu wollen. Die eventuell anormale Lage einer Fläche *hkl* darf nicht bloss bestimmt werden durch Messung der Winkel von Flächen gleicher Form (*hkl*), sondern durch die Ermittlung der Lage gegen eine, gleichsam axiale Endfläche. Schliesslich dürfen nur jene Krystalle untersucht werden, welche eine so vollkommene Ausbildung zeigen, dass die Lage aller ihrer Flächen mit gleicher und absoluter Sicherheit bis auf Secunden ermittelt werden kann, und alle jene Fälle, wo diess nicht der Fall ist, müssen ausgeschlossen, und können — wenn auch Breithaupt Differenzen von 15 Minuten angibt — nur als zufällige Unregelmässigkeiten gedeutet werden.

Untersuchungen, angestellt nach solchen Methoden, haben die Existenz von — den Werth von 1 Minute nicht übersteigenden — regelmässigen Abweichungen der Lage einzelner Flächen einer Form bestätigt, allein sie führen durch physikalische Gründe unterstützt nicht zu den 13 Systemen Breithaupt's. Es ist nämlich nöthig, diese Anomalien

zu betrachten als Anzeichen, dass die krystallographischen Elemente dieser Species nicht absolut genau bestimmt sind; Abweichungen an einem pyramidalen oder hexagonalen Krystall deuten hierbei auf nichts weiter, als dass derselbe eben nicht diesem Systeme, sondern dem prismatischen angehört u. s. w.; die optischen Phänomene stehen im Einklang. In allen solchen Fällen werden genaue künftige Winkelmessungen lehren, dass man es mit keinem anderen Factum zu thun hat, als mit dem des Verbesserns ungenauer Elemente.

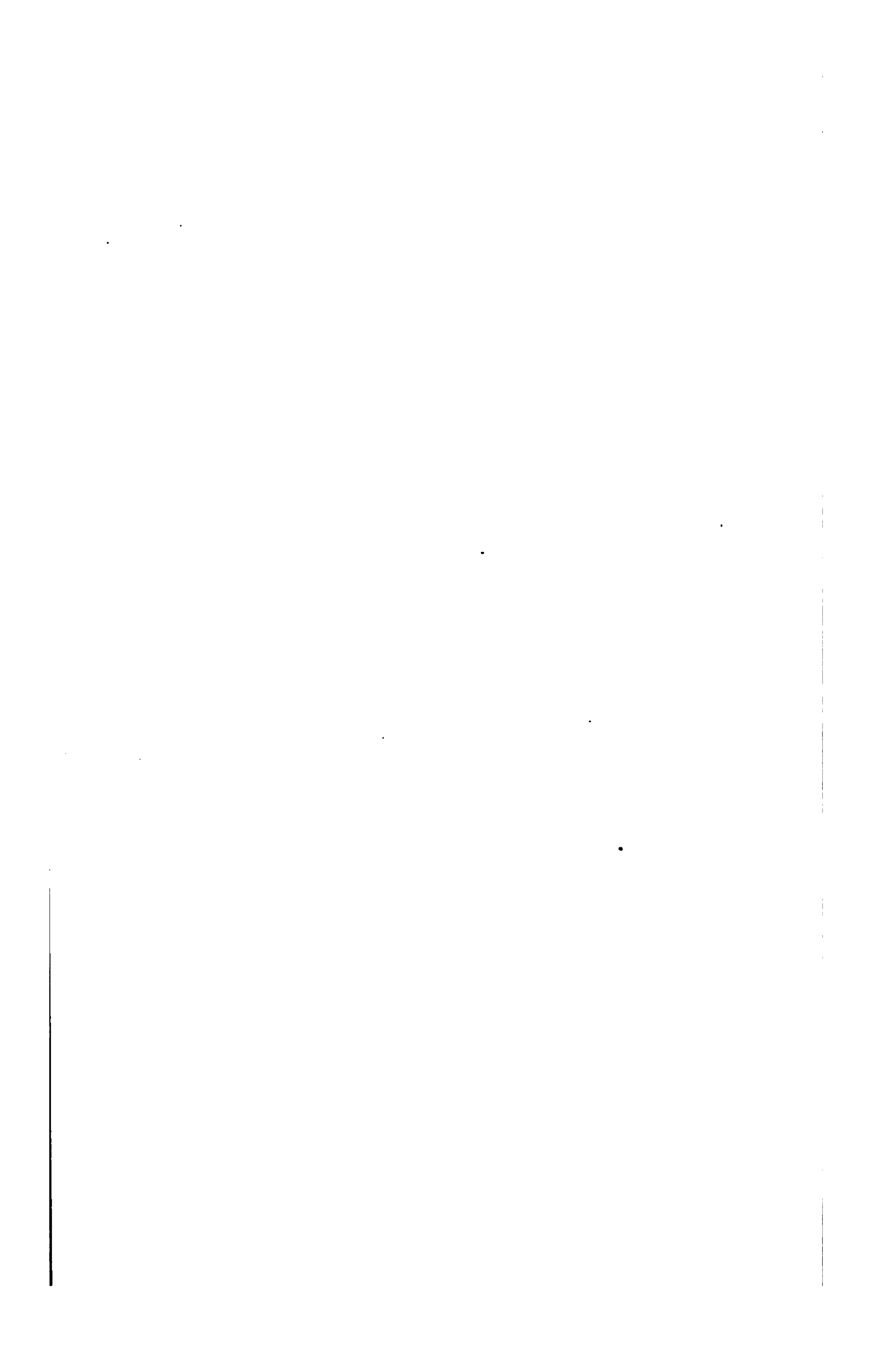
Andere Schlüsse daraus zu ziehen ist wohl unstatthaft, und die Krystallsysteme bleiben ebenfalls hiedurch unberührt, wenn man sie unter jener Form aufstellt (Kap. 1), welche als die allgemeine alle mathematischen Fälle umfasst.

So schwankend also auch die Linear-Dimensionen des Krystalls sein mögen, ihre Angular-Dimensionen sind in der Regel als constante Elemente zu erkennen, weil die relative Lage und gegenseitige Neigung der Flächen durch die angegebenen Unvollkommenheiten wenig gestört wird, sobald nur die Flächen wirklich eben und keiner Krümmung unterworfen sind. Hieraus folgt denn, dass die Kantenwinkel die einzigen sicheren Beobachtungsdaten liefern, welche der Berechnung aller übrigen Elemente zu Grunde gelegt werden können.

Und so schliessen wir auch mit dieser Betrachtung den ersten Theil und folgen dem leitenden Gedankengang, welcher uns unwillkürlich durch alle variablen Elemente zu den einzig sicheren und constanten — den Winkel — geführt hat; diese und ihr mathematischer Connex sei der Gegenstand des nachfolgenden Theiles.

# II. Abtheilung.

## Theoretische Morphologie.



# IX. Kapitel.

## Allgemeine Lehrsätze.

§. 40. Die gegenseitigen Neigungen der Flächen sind einem Gesetze unterworfen, welches bereits im ersten Kapitel angedeutet ward; es besteht diess darin, dass alle Flächen eines Krystalls in einem gewissen Causalnexus stehen, in einem gegenseitigen Abhängigkeitsverhältnisse, welches ihre Lage regelt und vollkommen genau bestimmt. Diess Gesetz lässt sich mit den Worten geben: dass die Coordinaten einer jeden Fläche sich durch einfache Coëfficienten aus der Reihe der natürlichen Zahlen auf den Werth aller übrigen bringen lassen.

Fig. 22.



Seien in Fig. 22 $OX$, $OY$, $OZ$ beliebige Axenrichtungen und $OA$, $OB$, $OC$ die Coordinaten der Fläche, von welcher alle übrigen ableitbar sein müssen, also die Grundgestalt, so müssen die Coordinaten einer zweiten Fläche $OH$, $OK$, $OL$, Multipla von $OA$, $OB$, $OC$ sein

$$h\ OH = OA$$
$$k\ OK = OB$$
$$l\ OL = OC$$

oder allgemein

$$\frac{1}{h}\ \frac{OA}{OH} = \frac{1}{k}\ \frac{OB}{OK} = \frac{1}{l}\ \frac{OC}{OL} \qquad (1)$$

worin $h$, $k$, $l$ positive oder negative Zahlen sind, von denen sogar eine oder zwei der Nulle gleich sein können. Ist eine der Zahlen $h$, $k$, $l$ gleich Null, so wird eine der betreffenden Distanzen $OH$, $OK$, $OL$

unendlich gross und die betrachtete Fläche ist somit parallel dieser Richtung.

*OX*, *OY*, *OZ* bilden nun das Coordinatensystem für den betrachteten Krystall und müssen für denselben als constant betrachtet werden; die Coordinatenabschnitte *OA*, *OB*, *OC* hingegen derjenigen Fläche, auf welche man alle übrigen beziehen will, werden Parameter genannt, ferner die Coëfficienten $h$, $k$, $l$ Indices der Fläche *HKL*, und letztere wird sodann symbolisch durch ihre Indices in der Form $(hkl)$ bezeichnet. Bemerkenswerth ist hier der eingeführte Gebrauch, das Minuszeichen nicht vor den negativen Index zu setzen, sondern über denselben anzubringen.

Die Indices $hkl$ nehmen verschiedene Werthe an und bestimmen dadurch die Lagen der Flächen eines Krystalls, halten sich aber innerhalb mässiger Grenzen und übersteigen, wie die Erfahrung lehrt, wenn die Axen und Parameter passend gewählt sind, selten die Zahl 6.

Aus dem in der ersten Abtheilung erwähnten Grundsatze: dass einer und derselben Substanz eine bestimmte Krystallgestalt zukomme, folgt ferner: dass die Neigungen der Axen und die Verhältnisse der Parameter für alle Krystalle derselben Species dieselben sind; die Symbole der Flächen können hingegen verschieden sein.

Eine weitere Consequenz hievon ist, dass die Winkel

$$\xi = YOZ, \ \eta = XOZ, \ \zeta = XOY,$$

welche die Axen miteinander einschliessen und das Verhältniss der Parameter diejenigen Elemente sind, durch welche eine Krystallspecies charakterisirt wird. In manchen Krystallen lässt sich ein rechtwinkeliges Axensystem auffinden, in anderen wieder Axen, deren zwei senkrecht stehen auf einer dritten, in noch anderen schiefwinkelige Axen; ferner variirt nicht bloss die Lage, sondern auch die Grösse der Parameter, und auf diese Unterschiede in den Axenwinkeln und in den relativen Verhältnissen der Parameter hat man die Eintheilung der gesammten Krystalle in genau präcisirte Gruppen vorgenommen.

Es sind diess:

I. $\pm\xi = \pm\eta = \pm\zeta$ Orthogonale Krystallsysteme.

1. $a : b : c = A : 1 : C$ prismatisch,
2. $a : b : c = \sqrt{3} : 1 : C$ orthohexagonal,
3. $a : b : c = 1 : 1 : C$ pyramidal,
4. $a : b : c = 1 : 1 : 1$ tesseral.

II. $(\pm\xi = \pm\zeta) \gtrless \pm\eta$ Monoklinisches Krystallsystem.

5. $a : b : c = A : 1 : C$.

III. $\pm \xi \gtreqless \pm \eta \gtreqless \pm \zeta$ Klinische Krystallsysteme.

$A) \pm \zeta = 90^0$ diklinisch.

6. $a : b : c = A : 1 : C$.

$B) \pm \zeta \gtreqless 90^0$ triklinisch.

7. $a : b : c = A : 1 : C$.

Nimmt man gleichmässig auf die physikalischen Eigenschaften und geometrischen Symmetrieverhältnisse Rücksicht, so ist die hiermit aufgestellte Eintheilung, welche sich wohl in manchen wesentlichen Punkten von den bisher gewohnten unterscheidet, gewiss die für die Erforschung der stattfindenden Connexe tauglichste[1]).

Aus dem gegebenen Schema ersieht man zugleich, dass zur genauen Bestimmung eines Krystalls immer vor Allem seine Elemente ermittelt werden müssen; es sind diess $\xi$ $\eta$ $\zeta$ und das Verhältniss zweier Parameter zum dritten. Im tesseralen Systeme, das rechtwinkelige Axen und gleiche Parameter besitzt, sind bereits die Elemente bestimmt, hingegen ist im pyramidalen und orthohexagonalen das Verhältniss eines Parameters zu den beiden übrigen constanten ein variables; im prismatischen sind zwei Parameter gegen einen dritten variabel, im monoklinischen sind die Verhältnisse zweier Parameter gegen den dritten und die Neigung der schiefen Axe die drei veränderlichen, im diklinischen und triklinischen sind die Winkel zwischen den Coordinatenaxen und das Parameterverhältniss die fünf zu bestimmenden Elemente.

Um diese wichtigen Daten zu ermitteln, ist es nöthig, Methoden aufzustellen, welche dieselben von den messbaren Winkeln der Krystalle abhängig machen; nach dem allgemeinen Gange jeder Bestimmung von Variablen sind hiezu so viele Winkel zu messen, als in dem vorliegenden Systeme Unbekannte vorkommen, wenn es gelingt: die Winkel je zweier Flächen, deren Symbole bekannt sind, in einfacher concinner Weise als Functionen der Flächenindices, der Neigung der Axen und des Parameterverhältnisses darzustellen.

Diess ist die Aufgabe folgender Zeilen, in welchen die allgemeinen Functionen aufgestellt werden; die hierbei angewendete Methode gründet sich auf die sphärische Trigonometrie nach dem trefflichen Vorgange Miller's, der dieselbe in sein Treatise of crystallography 1839 mit bahnbrechender Ueberzeugung und Genialität zum erstenmale in der theoretischen Morphologie zur Anwendung brachte.

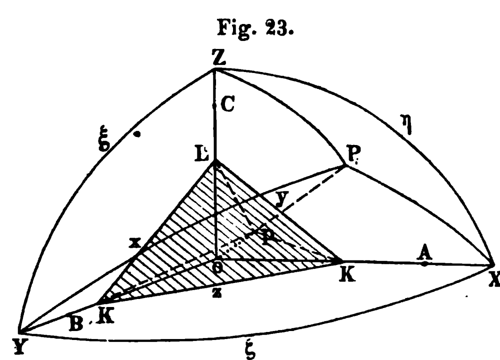
§. 41. Die Winkel, welche die Normale auf eine Fläche mit den Krystallaxen einschliesst, ist als Func-

[1]) Abweichende Theorien und Systeme anderer Schulen, namentlich das rhomboedrische System werden in der dritten Abtheilung erörtert werden.

tion der Flächenindices und der Krystallparameter darzustellen.

Die Lösung dieses Problems ergibt sich mit Hilfe der obigen Gleichung (I). Treffen Fig. 23 die Krystallaxen $OX$, $OY$, $OZ$ eine Kugel, deren Mittelpunkt mit $O$ zusammenfällt, in den Punkten $X$, $Y$, $Z$ der Kugeloberfläche, seien die Parameter des Krystalls $OA$, $OB$, $OC$; zieht man nun auf die Fläche $HKL$, deren Indices $hkl$ sind, vom Mittelpunkte $O$ aus eine Normale, so wird dieselbe die Fläche in dem Punkte $p$ und verlängert die Kugeloberfläche in $P$ durchdringen.

Fig. 23.




Da nun $Op$ die Projectionen bildet von $OH$, $OK$, $OL$, so sind folgende Gleichungen aufzustellen:

$$\frac{Op}{OH} = \cos PX; \frac{Op}{OK} = \cos PY; \frac{Op}{OL} = \cos PZ.$$

Substituirt man nun in Gleichung (1) diese Werthe von $OH$, $OK$, $OL$, eliminirt den Factor $Op$, und führt statt $OA$, $OB$, $OC$ die Symbole $a$, $b$, $c$ ein, so folgt

$$\frac{a}{h} \cos PX = \frac{b}{k} \cos PY = \frac{c}{l} \cos PZ \qquad (2)$$

die Gleichung, auf welcher das ganze theoretische Gebäude der Morphologie aufgeführt ist.

Mit Annahme derselben ist zugleich die Berechnungsmethode bestimmt. Es sind alle Krystallflächen auf die Oberfläche einer Kugel mit Hilfe von Radien, die auf den Krystallflächen senkrecht stehen, zu beziehen und die Berechnungen mittelst sphärischer Trigonometrie durchzuführen, indem man sie auf Ausdrücke anwendet, welche aus der Gleichung (2) ableitbar sind.

Der Punkt, in welchem die Kugel von einem Radius getroffen wird, der senkrecht steht auf einer Krystallfläche, heisst der Pol der letzteren. Eine Fläche und ihr Pol wird in der Regel mit denselben Buchstaben und Indices bezeichnet; die Punkte, wo die Krystallaxen die Kugeloberfläche durchdringen, werden stets mit $X$, $Y$, $Z$ bezeichnet. Um diese Methode noch anwendbarer zu machen, wird die Kugel nicht vollständig

gezeichnet, sondern die Kugelhälfte, auf welche alle Pole bezogen sind, auf die Zeichenebene projicirt, der dadurch entstehende Kreis bildet die Sphäre der Projection.

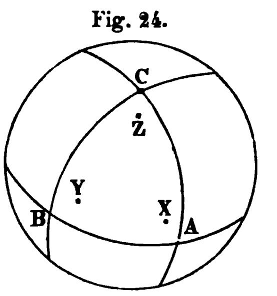
Da diese Methode zuerst von Neumann in seinen Untersuchungen über die thermischen Axen des Gypses[1]) angewendet und von Miller in die Krystallographie praktisch eingeführt ward, so führt sie den Namen Neumann-Miller'sche Kugelprojection.

Bevor zur Anwendung der Gleichung (2) übergegangen werden kann, sind noch einige Bemerkungen nöthig.

Die Winkel $PX$, $PY$, $PZ$, welche in Rechnung gezogen werden, sind die Winkel der Normalen mit den Krystallaxen, sie sind in Folge dessen supplementär zu den Winkeln der Fläche selbst mit den Krystallaxen. Es ist die wichtigste Eigenthümlichkeit der Krystallbestimmungen mittelst sphärischer Trigonometrie, dass sie statt der wahren Werthe der Winkel zweier Flächen (180 — derselben) in Rechnung zieht.

Eine zweite Vorerinnerung betrifft die Anwendung der sphärischen Projection. Jeder grösste Kreis der Kugel wird auf die Ebene projicirt in der Zeichnung näherungsweise durch einen Kreis dargestellt und da für ersteren die Eigenschaft gilt, dass er in allen seinen Theilen von seinem Polpunkte gleich weit entfernt sei, so muss diese Eigenschaft auch seiner Projection erhalten bleiben; sein Name ist Zonenkreis, und man pflegt zu sagen: alle Normalpunkte, welche in einem solchen grössten Kreise liegen, liegen in einer Zone.

Fig. 24.




Nach diesen Betrachtungen ist es möglich, zur specialisirten Anwendung der sphärischen Projection in Verbindung mit Gleichung (2) überzugehen.

In Fig. 24 ist die Projection der Kugel dargestellt; hiebei sind $X$, $Y$, $Z$ die Normalpunkte der Axen, welche in diesem speciellen Falle sehr schiefwinkelig zu einander geneigt angenommen worden sind. Zieht man nun drei grösste Kreise der Kugel, für welche successive $X$, $Y$, $Z$ als Pole gelten sollen, so mögen dieselben in der Projection die Kreise $AC$, $AB$ $CB$ bilden. Letztere sind daher in allen ihren Punkten 90° von den Axennormalpunkten, und zwar $AC$ von $Y$, $BC$ von $X$ und $AB$ von $Z$ entfernt.

Früher war bereits erwähnt, dass die Indices der Flächen beliebige Werthe anzunehmen vermögen, es erübrigt daher die durch dieselbe bedingte Lage im Raume zu erörtern.

[1]) Pogg. Ann. Vergl. Neumann, krystallonomische Beiträge.

Sei analog mit Fig. 23 $PX$, $PY$, $PZ$ die Winkel der Normale der Fläche[1]) $HKL$ mit den Coordinatenaxen und deren Indices $hkl$, so ist bereits die Gleichung (2)

$$(2) \qquad \frac{a}{h} \cos PX = \frac{b}{k} \cos PY = \frac{c}{l} \cos PZ$$

bewiesen worden. Substituirt man in dieselbe specielle Werthe der Variablen $hkl$, so werden sich die jedesmaligen Lagen unzweifelhaft bestimmen lassen müssen.

Da $a$, $b$, $c$ die für einen Krystall constant bleibenden Parametergrössen ausdrücken, so wird jede Aenderung von $hkl$ nur die Winkel $PX$, $PY$, $PZ$ zu verändern vermögen. Aendert sich das Vorzeichen, z. B. von $l$ von positiv in negativ, so bleiben die ersten Glieder von (2) positiv und nur das III. wird negativ, es muss daher auch der cos $PZ$ einen negativen Werth annehmen, und daher $PZ \begin{matrix} > 90^0 \\ < 270^0 \end{matrix}$ sein. In obiger Figur 24 müssen alle Flächen mit positivem $l$ innerhalb des Zonenkreises $AB$ näher an $Z$ zu liegen kommen, diejenigen mit negativem hingegen ausserhalb. Dieselben Deductionen würden für die Indices $h$ oder $k$ Geltung haben. Sind hingegen alle drei Indices negativ, so würde die Gleichung constant bleiben, diese Fläche $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$ ist daher mit $(hkl)$ parallel und ihre Gegenfläche.

Hiedurch ist zugleich die Nothwendigkeit der geometrischen Bedingung erwiesen, dass jeder Krystallfläche mindestens eine Gegenfläche entsprechen muss, deren letzterer Existenz daher bei der nachfolgenden Betrachtung nicht weiter berücksichtigt wird.

Sei nun einer der Indices gleich Null. Unter der Voraussetzung, dass $l = 0$, würde das letzte Glied von (2) unendlich; gegenüber dem endlichen und willkürlichen Werthe der beiden ersten Theile der Gleichung ist es daher nöthig, dass auch cos $PZ = 0$ wird, um so für das 3. Glied die unbestimmte Function $\frac{0}{0}$ zu erzeugen. Die Bedingung cos $PZ = o$ gibt $PZ = 90^0$, in Folge dessen die Fläche, deren Index $(hko)$ ist, von $Z$ $90^0$ entfernt und in Fig. 24 in dem Zonenkreise $AB$ liegen muss.

Es ergibt sich daher, wenn man analog für $h = o$ oder $k = o$, die Verhältnisse betrachtet, dass alle Flächen $hko$ in der Zone $AB$, die Flächen $hol$ in der Zone $AC$, die Flächen $okl$ in der Zone $BC$ liegen müssen. Die Flächen werden Prismen oder Domen genannt.

Wären hingegen zwei Indices gleich Null, so würden die zwei entsprechenden Cosinusse Null werden müssen, und die Fläche $hoo$ würde

[1]) In Figur 23 zu lesen $OHAX$ statt des fehlerhaften $OKAX$.

daher sowohl von der Axe $Y$, als auch $Z$ 90° entfernt sein müssen; *hoo* liege daher, da sie den Zonenkreisen $AB$ und $AC$ gleichmässig angehören muss, in deren Durchschnittspunkte $A$; analog *oko* in $B$ und *ool* in $C$. Diese Flächen werden Endflächen oder Pinakoide genannt.

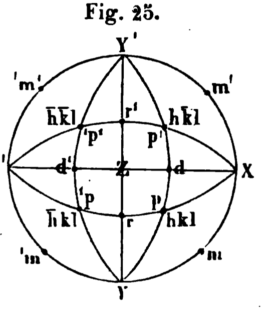
Bei der in der Fig 24 dargestellten Wahl der Axenlage, die schiefwinkelig ist, fallen $A$, $B$, $C$ nicht mit $XYZ$ zusammen; würden hingegen orthogonale Axen gewählt sein, so müsste $A$ mit $X$ coincidiren, da beide von $Y$ und $Z$ 90° entfernt sind, analog $B$ würde mit $Y$, $C$ mit $Z$ zusammenfallen.

Jede andere Form *hkl* wird innerhalb der Axen eine den Winkeln $PX$, $PY$, $PZ$ entsprechende Lage haben.

Oben ward bereits erwähnt, dass jeder Fläche eine Gegenfläche entspricht und beide ein organisches Ganzes bilden, betrachtet man aber die Gleichung (2), so wird noch eine höhere Symmetrie erkennbar, welche aber von der Lage der Axen abhängig ist, da sich dieselbe auf die obigen Sätze bezüglich der negativen Werthe der Indices und der hiedurch bedingten Winkel $PX$, $PY$, $PZ$ stützt.

Für die Fläche $P' = (\bar{h}kl)$ wurde ermittelt, dass $P'X > 90°$ sein muss, und zwar $180° - PX$, diess ist ident mit $P'X'$, wenn $P = hkl$ ist; da ferner $P'Z$, $P'Y$ mit $PZ$, $PY$ gleich bleiben, so würden die Flächen $P$ und $P'$ gleiche Neigung gegen die Axen haben (das positive oder negative Zeichen vernachlässigt); wenn die gegenseitige Neigung der Axen selbst in jedem Quadranten gleich bleibt. Da letzterer Fall bei orthogonalen Axen (Fig. 25) eintritt, so haben in diesen Systemen alle Flächen $P \pm (hkl)$ in den 4 oberen Octanten einerlei Neigung gegen die Axen.

Fig. 25.




In Folge dessen pflegt man diese 4 Flächen sammt ihren parallelen Gegenflächen als eine Form $(hkl)$ zusammenzufassen; letztere besteht daher in den orthogonalen Systemen aus:

$$\begin{matrix} h\,k\,l & \bar{h}\,\bar{k}\,\bar{l} \\ h\,\bar{k}\,l & \bar{h}\,k\,\bar{l} \\ \bar{h}\,k\,l & h\,\bar{k}\,\bar{l} \\ \bar{h}\,\bar{k}\,l & h\,k\,\bar{l} \end{matrix} \qquad (3)$$

und wird Pyramide genannt.

Diese Anzahl der eine Form bildenden Krystallflächen erleidet jedoch noch durch die im obigen Schema aufgestellten Bedingungen der Systeme einige Modificationen.

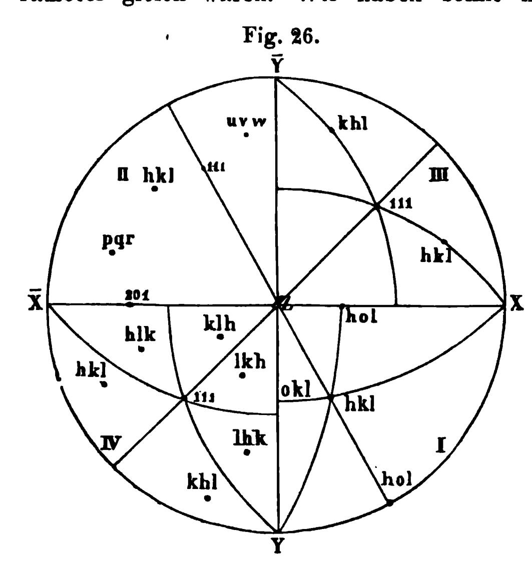
Seien nämlich z. B. die Parameter $a$ und $b$ gleich, also der Krystall dem pyramidalen Systeme angehörig, so wird diese Gleichheit von

$a$ und $b$ durch die Pyramide $hkl$ nicht ausgedrückt, denn da $h$ und $k$ verschiedene Werthe, ebenso $PX$ und $PY$ haben, so muss auch $a$ von $b$ verschieden sein; deren Gleichheit zu erzielen ist nur möglich, wenn ($hkl$) den Winkel $PX$ auch mit $Y$, und analog den Winkel $PY$ mit $X$ macht, d. h. wenn eine zweite Form $P'$ ($k'h'l'$) im Quadranten vorhanden ist, deren Gleichung, wobei $k' = k$, $h' = h$, $l' = l$, dann

$$\frac{a}{k'} \cos PY = \frac{b}{h'} \cos PX = \frac{c}{l'} \cos PZ$$

ist. Ex existiren daher, wenn zwei Parameter gleich sind, in jedem Quadranten 2 Flächen einer Form, welche durch die Permutation der beiden Indices entstehen, ($hkl$) und ($khl$), somit im System 16 Pyramiden-Flächen. Analog würde die Betrachtung sich gestalten, wenn die 3 Parameter gleich wären. Wir haben somit im tesseralen Systeme die Permutation der 3 Indices vorzunehmen, und in jedem Quadranten existiren somit 6 Flächen der Form, nämlich ($hkl$), ($hlk$), ($khl$), ($klh$), ($lhk$), ($lkh$), somit am Krystalle 48 Flächen der Form ($hkl$).

Fig. 26.



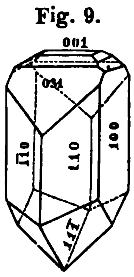

Wir sehen in Fig. 26 mit der Symmetrie der Systeme I, II, III, IV auch die Zahl der Flächen steigen. Im Gegensatze hiermit verringert sich die Symmetrie, wenn die Axen selbst nicht orthogonal sind. Wäre eine Axe schiefgestellt, so würden hiedurch 4 Quadranten kleiner und 4 grösser, als die gleichliegenden in orthogonalen Systemen; die Betrachtung von (2) ergibt, dass, wenn $abc$ und $hkl$ sowohl für positive als negative Quadranten constant bleiben sollen, dass die Werthe $PX$, $PY$, $PZ$ variiren müssen. Im monoklinischen Systeme haben daher von der Form ($hkl$) 4 Flächen gleiche Neigung gegen die Axen, im triklinischen nur 2; im letzteren Falle ist bereits die Symmetrie so sehr reducirt, dass nur mehr die parallelen Gegenflächen auftreten.

Die bis jetzt erörterten Verhältnisse gelten für alle jene Fälle, in welchen die vollständige Entwicklung der grösstmöglichen Anzahl von Flächen auftritt. Allein abgesehen von allen möglichen Unregelmässig-

keiten der Form ist auch oftmals gesetzmässig ein grösserer Bruchtheil der Flächenanzahl von der Entwicklung ausgeschlossen, und die restirenden bilden entweder eine geschlossene Gestalt oder schliessen sich an andere Formen an. Je nachdem die Hälfte der Flächen oder nur der vierte Theil derselben entwickelt ist, werden zur Bezeichnung dieser meroëdrischen Ausbildung die Worte Hemiedrie, Tetartoëdrie gebraucht.

Die gewöhnliche Hemiedrie der Flächen ist aber wohl zu unterscheiden von einer in wenigen Fällen auftretenden Hemiedrie der Gestalt, welche durch physikalische Eigenschaften der Materie hervorgerufen und derselben inhärirend ist. In diesen Fällen haben meist die zwei Endpole der Hauptaxe verschiedene physikalische Eigenschaften und sind enantiomorph verschieden ausgebildet. Fig. 9 gibt die Darstellung der an Kieselzink beobachteten Hemimorphie.

Fig. 9.

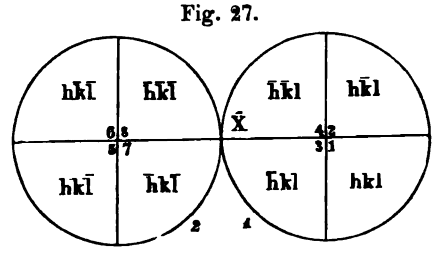


Die hemiedrische Ausbildung der Flächen unterscheidet sich in eine geneigtflächige und parallelflächige. Der Charakter der ersteren besteht darin, dass von den Octanten der Kugelfläche (Fig. 27) nur die gegen einander geneigten zur Ausbildung gelangen.

(1) (4) (6) (7) od. (2) (3) (5) (8)

| | |
|---|---|
| $hkl$ | $h\bar{k}l$ |
| $\bar{h}\bar{k}l$ | $\bar{h}kl$ |
| $\bar{h}k\bar{l}$ | $hk\bar{l}$ |
| $h\bar{k}\bar{l}$ | $\bar{h}\bar{k}\bar{l}$ |

Fig. 27.



also entweder eine ungerade Anzahl positiver oder negativer Indices, erstere, welche vom positiven Quadranten beginnt, liefert eine directe, die letztere eine gewendete, inverse Form.

Die parallelflächige Hemiedrie besteht darin, wenn von jeder Fläche in der oberen Kugelhälfte (1) auch die gegenüberliegende in der unteren (2) auftritt.

Die Formen können dann so zur Entwicklung gelangen, dass entweder in (1) zwei anliegende oder zwei gegenüberliegende Quadranten auftreten.

Im ersteren Falle werden die Flächen der Octanten

(1) (2) (6) (7) oder (3) (4) (5) (6)

ausgebildet, im zweiten die von

(1) (4) (5) (8) oder (2) (3) (6) (7).

Bei grösserer Flächenanzahl kann nicht bloss die halbe Anzahl der Quadranten, sondern auch die Hälfte der Flächen direct ausbleiben.

Das allgemeine Zeichen der geneigtflächigen Hemiedrie ist $\varkappa(hkl)$, das der parallelflächigen ist $\pi(hkl)$.

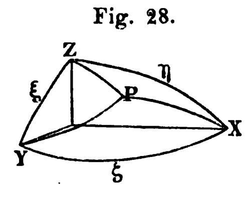
Die parallelflächige Hemiedrie kann wegen ihres Charakters nur im tesseralen Systeme geschlossene Formen erzeugen.

In den symmetrischen Systemen, in welchen in jedem Octanten mehrere Flächen vorkommen, ist eine Wiederholung der hemiedrischen Ausbildung am Hemieder selbst möglich, wodurch tetartoedrische Formen erzeugt werden, als deren Symbol allgemein $\frac{\varkappa}{2}(hkl)$ oder $\frac{\pi}{2}(hkl)$ bezeichnet werden müssen.

Hiermit wären die allgemeinen Symmetrieverhältnisse, so weit sie sich von der Grundgleichung ableiten lassen, erschöpft.

§. 42. Es ist die Distanz des Poles einer Fläche von den Axen als allgemeine Function der Axenneigung, der Parameterverhältnisse und der Indices darzustellen.

Fig. 28.




Sei in Fig. 28 $P$ der Pol der Fläche $hkl$, $X$, $Y$, $Z$ die Krystallaxen und $\xi$, $\eta$, $\zeta$ deren Neigungen, nämlich $YZ$, $ZX$, $XY$ — endlich das Parameterverhältniss $a$, $b$, $c$, so ist

$$\cos PX = \cos \zeta \cos PY + \sin \zeta \sin PY \cos PYX,$$

es ist aber

$$\cos PYX = \cos (ZYX - ZYP)$$

$$\cos ZYX = \frac{\cos \eta - \cos \xi \cos \zeta}{\sin \xi \sin \zeta}$$

$$\sin ZYX = \frac{\sqrt{[\sin^2\xi \sin^2\zeta - (\cos \eta - \cos \xi \cos \zeta)^2]}}{\sin \xi \sin \zeta}$$

$$\cos PYX = \frac{\cos PZ - \cos \xi \cos PY}{\sin \xi \sin PY}$$

$$\sin PYX = \frac{\sqrt{[\sin^2\xi \sin^2 PY - (\cos PZ - \cos \xi \cos PY)^2]}}{\sin \xi \sin PY}$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung $PX$, so erhält man eine allgemeine Function des 2. Grades zwischen $PX$, $PY$, $PZ$, $a$, $b$, $c$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ unter der Form:

$$\left[\sin^2\xi \cos PX - \sin^2\xi \cos\zeta \cos PY - (\cos\eta - \cos\xi \cos\zeta)(\cos PZ - \cos\xi \cos PY)\right]^2$$
$$=$$
$$\left[\left(\sin^2\xi \sin^2\zeta - (\cos\eta - \cos\xi \cos\zeta)^2\right)\left(\sin^2\xi \sin^2 PY - (\cos PZ - \cos\xi \cos PY)^2\right)\right]$$

Zur leichteren Uebersicht der Reduction folgen hier einige Zwischenformeln.

$$\sin^4\xi(\cos^2 PX - 2\cos\zeta\cos PX\cos PY + \cos^2\zeta\cos^2 PY)$$
$$-2(\sin^2\xi\cos PX - \sin^2\xi\cos\zeta\cos PY)(\cos\eta - \cos\xi\cos\zeta)(\cos PZ - \cos\xi\cos PY)$$
$$+(\cos\eta - \cos\xi\cos\zeta)^2(\cos PZ - \cos\xi\cos\eta)^2$$
$$=$$
$$\sin^4\xi\sin^2\zeta\sin^2 PY - \sin^2\xi\sin^2\zeta(\cos PZ - \cos\xi\cos PY)^2$$
$$-\sin^2\xi\sin^2 PY(\cos\eta - \cos\xi\cos\zeta)^2$$
$$+(\cos\eta - \cos\xi\cos\zeta)^2(\cos PZ - \cos\xi\cos PY)^2.$$

Durch Elimination von $\sin^2\xi$ ergibt sich:

$$\sin^2\xi\cos^2 PX + \sin^2\xi\cos\zeta\cos^2 PY - 2\cos\xi\cos\eta\cos\zeta\cos^2 PY$$
$$+2\cos^2\xi\cos^2\zeta\cos^2 PY + \cos PX\cos PZ(-2\cos\eta + 2\cos\xi\cos\zeta)$$
$$+\cos PX\cos PY(2\cos\xi\cos\eta - 2\cos^2\xi\cos\zeta - 2\cos\zeta\sin^2\xi)$$
$$+\cos PY\cos PZ(2\cos\zeta\cos\eta - 2\cos^2\zeta\cos\xi)$$
$$=$$
$$(\sin^2\zeta\sin^2\xi - \cos^2\eta + 2\cos\xi\cos\eta\cos\zeta - \cos^2\xi\cos^2\zeta)(1 - \cos^2 PY)$$
$$-\sin^2\zeta\cos^2\xi\cos^2 PY - \sin^2\zeta\cos^2 PZ + 2\sin^2\zeta\cos^2\xi\cos PZ\cos PY$$

woraus als einfachste Function zwischen $PX$, $PY$, $PZ$, $a$, $b$, $c$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ folgt:

$$\left.\begin{aligned}
&\sin^2\xi\cos^2 PX - (1 - \cos^2\eta)\cos^2 PY + \sin^2\zeta\cos^2 PZ\\
&- 2\cos PX\cos PY(\cos\zeta - \cos\xi\cos\eta)\\
&- 2\cos PX\cos PZ(\cos\eta - \cos\xi\cos\zeta)\\
&- 2\cos PY\cos PZ(\cos\xi - \cos\eta\cos\zeta)\\
&=\\
&1 - \cos^2\xi - \cos^2\eta - \cos^2\zeta + 2\cos\xi\cos\eta\cos\zeta.
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Um nun diese allgemeine Function nach $X$, $Y$, $Z$ aufzulösen, ist es nöthig, zur allgemeinen Relation (2) zu recurriren, aus welcher sich jeder der Werthe von $PX$, $PY$, $PZ$ als Function der übrigen ableiten lässt. Löst man also Gleichung nach $X$ auf, so ist zu substituiren

$$\cos PY = \frac{ak}{hb}\cos PX$$
$$\cos PZ = \frac{al}{hc}\cos PX$$

woraus folgt

$$\cos^2 PX\Big[\sin^2\xi + \frac{a^2k^2}{h^2b^2}\sin^2\eta + \frac{a^2l^2}{h^2c^2}\sin^2\zeta - 2\frac{ak}{hb}(\cos\zeta - \cos\xi\cos\eta)$$
$$-2\frac{al}{hc}(\cos\eta - \cos\xi\cos\zeta) - 2\frac{a^2kl}{h^2bc}(\cos\xi - \cos\zeta\cos\eta)\Big]$$
$$=$$
$$1 + 2\cos\zeta\cos\eta\cos\xi - \cos^2\xi - \cos^2\eta - \cos^2\zeta$$

analoge Werthe sind ableitbar für $PY$, $PZ$.

Wir erhalten somit folgende Gleichungen für die Distanzen des Poles einer Fläche von den Krystallaxen:

$$(5)\quad \begin{aligned}
\cos^2 PX &= \frac{h^2b^2c^2\,(1+2\cos\xi\cos\eta\cos\zeta-\cos^2\xi-\cos^2\eta-\cos^2\zeta)}{\begin{gathered}h^2b^2c^2\sin^2\xi+k^2a^2c^2\sin^2\eta+l^2a^2b^2\sin^2\zeta\\ -2abc\,[chk(\cos\zeta-\cos\xi\cos\eta)+bhl(\cos\eta-\cos\xi\cos\zeta)\\ +akl(\cos\xi-\cos\zeta\cos\eta)]\end{gathered}}\\
\cos^2 PY &= \frac{k^2a^2c^2\,(1+2\cos\xi\cos\eta\cos\zeta-\cos^2\xi-\cos^2\eta-\cos^2\zeta)}{\begin{gathered}h^2b^2c^2\sin^2\xi+k^2a^2c^2\sin^2\eta+l^2a^2b^2\sin^2\xi\\ -2abc\,[chk(\cos\zeta-\cos\xi\cos\eta)+bhl(\cos\eta-\cos\xi\cos\zeta)\\ +akl(\cos\xi-\cos\zeta\cos\eta)]\end{gathered}}\\
\cos^2 PZ &= \frac{l^2a^2b^2\,(1+2\cos\xi\cos\eta\cos\zeta-\cos^2\xi-\cos^2\eta-\cos^2\zeta)}{\begin{gathered}h^2b^2c^2\sin^2\xi+k^2a^2c^2\sin^2\eta-l^2a^2b^2\sin^2\xi\\ -2abc\,[(chk(\cos\zeta-\cos\xi\cos\eta)+bhl(\cos\eta-\cos\xi\cos\zeta)\\ +akl(\cos\xi-\cos\zeta\cos\eta)]\end{gathered}}
\end{aligned}$$

Die sub (5) zusammengefassten Formeln sind die allgemeinsten Relationen, welche, da $\xi$, $\eta$, $\zeta$ variable Werthe haben, für jede Wahl der Coordinaten ihre Gültigkeit haben müssen; doch um sie für die Anwendung zu krystallographischer Bestimmung tauglich zu machen, bedürfen sie einer Transformation.

Da nämlich diese Formeln die Neigung der Coordinatenaxen enthalten, so muss dieselbe bereits im Voraus bestimmt sein, diese Distanzen sind aber am Krystalle nicht messbar, sondern erst berechenbar; um daher in der Gleichung (5) nur einfache messbare Winkel zu haben, kann man statt der Axenwinkel die Winkel der drei Pinakoide $A$ (100), $B$ (010), $C$ (001) einführen.

Da $A$, $B$, $C$ zu $X$, $Y$, $Z$ Fig. 24 immer die Distanzen 90° hat, so ist es zu letzterem das Polardreieck, und die Seiten des einen sind die Winkel des anderen. Hierauf gestützt, ergeben sich, wenn $BC = \alpha$, $AC = \beta$, $AB = \gamma$

$$(6)\quad \begin{aligned}
\cos\xi &= \frac{\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}\\
\cos\eta &= \frac{\cos\gamma\cos\alpha-\cos\beta}{\sin\gamma\sin\alpha}\\
\cos\zeta &= \frac{\cos\beta\cos\alpha-\cos\gamma}{\sin\beta\sin\alpha}
\end{aligned}$$

Substituirt man die Werthe der Gleichung (5) in (4), so folgen als allgemeine Relation die nachstehenden Formeln:

*a*) Dieselben finden ihre Anwendung bei dem triklinischen Systeme, da für dasselbe die drei schiefen Axenneigungen keine weitere Vereinfachung von Formel 5 zulassen.

$$\cos^2 PX = \frac{h^2b^2c^2[1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)]}{\begin{array}{l} h^2b^2c^2\sin^2\alpha + k^2a^2c^2\sin^2\beta + l^2a^2b^2\sin^2\gamma \\ + 2abc\,(hlb\cos\beta\sin\alpha\sin\gamma + hkc\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta \\ \qquad + kla\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma) \end{array}}$$

$$\cos^2 PY = \frac{k^2a^2c^2[1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)]}{\begin{array}{l} h^2b^2c^2\sin^2\alpha + k^2a^2c^2\sin^2\beta + l^2a^2b^2\sin^2\gamma \\ + 2abc\,(hlb\cos\beta\sin\alpha\sin\gamma + hkc\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta \\ \qquad + kla\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma) \end{array}} \qquad (7)$$

$$\cos^2 PZ = \frac{l^2a^2b^2[1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)]}{\begin{array}{l} h^2b^2c^2\sin^2\alpha + k^2a^2c^2\sin^2\beta + l^2a^2b^2\sin^2\gamma \\ + 2abc\,(hlb\cos\beta\sin\alpha\sin\gamma + hkc\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta \\ \qquad + kla\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma) \end{array}}$$

Diese weitläufigen Formeln lassen sich jedoch vereinfachen, wenn einer der Winkel $\xi$, $\eta$, $\zeta = 90^0$ ist.

*b*) Im diklinischen Systeme ist $\zeta = 90^0$, daher erhalten wir aus (5) folgende Formeln:

$$\cos^2 PX = \frac{h^2b^2c^2\,(1 - \cos^2\xi - \cos^2\eta)}{\begin{array}{l} h^2b^2c^2\sin^2\xi + k^2a^2c^2\sin^2\eta + l^2a^2b^2 \\ - 2abc\,[akl\cos\xi + bhl\cos\eta - chk\cos\xi\cos\eta] \end{array}}$$

$$\cos^2 PY = \frac{k^2a^2c^2\,(1 - \cos^2\xi - \cos^2\eta)}{\begin{array}{l} h^2b^2c^2\sin^2\xi + k^2a^2c^2\sin^2\eta + l^2a^2b^2 \\ - 2abc\,[akl\cos\xi + bhl\cos\eta - chk\cos\xi\cos\eta] \end{array}} \qquad (8)$$

$$\cos^2 PZ = \frac{l^2a^2b^2\,(1 - \cos^2\xi - \cos^2\eta)}{\begin{array}{l} h^2b^2c^2\sin^2\xi + k^2a^2c^2\sin^2\eta + l^2a^2b^2 \\ - 2abc\,[akl\cos\xi + bhl\cos\eta - chk\cos\xi\cos\eta] \end{array}}$$

Würde man in diese Formeln (8) statt der Winkel $\xi$, $\eta$ der Axen, die Winkel der Pinakoidflächen, also $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ einführen wollen, so ist zu bedenken, dass in Folge von $\zeta = 90^0$ oder $\cos\zeta = 0$ nicht $\gamma = 90^0$ wird, sondern sich vielmehr aus (6) zur Abkürzung der Gleichung (7) die Hülfsformel

$$\cos\gamma = \cos\beta\cos\alpha$$

ergibt, wodurch für das diklinische System resultiren

$$\cos^2 PX = \frac{h^2b^2c^2\,(1 + \cos^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha - \cos^2\beta)}{\begin{array}{l} h^2b^2c^2\sin^2\alpha + l^2a^2b^2\,(1 - \cos^2\alpha\cos^2\beta) + k^2a^2c^2\sin^2\beta \\ + 2abc\,[hkc\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta\sin\beta + hlb\sin\alpha\cos\beta\sqrt{1 - \cos^2\alpha\cos^2\beta} \\ \qquad + kla\cos\alpha\sin\beta\sqrt{1 - \cos^2\alpha\cos^2\beta}] \end{array}}$$

$$\cos^2 PY = \frac{k^2a^2c^2\,(1 + \cos^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha - \cos^2\beta)}{\begin{array}{l} h^2b^2c^2\sin^2\alpha + l^2a^2b^2\,(1 - \cos^2\alpha\cos^2\beta) + k^2a^2c^2\sin^2\beta \\ + 2abc\,[hkc\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta\sin\beta + hlb\sin\alpha\cos\beta\sqrt{1 - \cos^2\alpha\cos^2\beta} \\ \qquad + kla\cos\alpha\sin\beta\sqrt{1 - \cos^2\alpha\cos^2\beta}] \end{array}} \qquad (9)$$

$$\cos PZ = \frac{l^2a^2b^2\,(1 + \cos^2\alpha \cos^2\beta - \cos^2\alpha - \cos^2\beta)}{\begin{array}{c} h^2b^2c^2 \sin^2\alpha + l^2a^2b^2(1 - \cos^2\alpha\cos^2\beta) + k^2a^2c^2 \sin^2\beta \\ + 2abc(hkc \cos\alpha \sin\alpha \cos\beta \sin\beta + hlb \sin\alpha \sin\beta)\sqrt{1 - \cos^2\alpha\cos^2\beta} \\ + kla \cos\alpha \sin\beta\sqrt{1 - \cos^2\alpha\cos^2\beta} \end{array}}$$

*c)* Im monoklinischen Systeme ist $\xi = \eta = 90^0$ und $\eta \gtrless 90^0$, somit folgen aus der Gleichung (4) folgende Werthe:

$$(10) \quad \frac{\cos^2 PX}{h^2b^2c^2} = \frac{\cos^2 PY}{k^2a^2c^2} = \frac{\cos^2 PZ}{l^2a^2b^2} = \frac{\sin^2\eta}{h^2b^2c^2 + k^2a^2c^2 \sin^2\eta + l^2a^2b^2 - 2\,hl\,ab^2c \cos\eta}$$

Fig. 29. (C, z, X, A)

Im monoklinischen Systeme ist aber $\eta = 180 - \beta$. Diess ergibt sich, wenn man bedenkt, dass $AZ = 90^0$, $CX = 90^0$, somit in Fig. 29

$$AZ + CX = AX + XZ + CX = 180^0$$
$$AC = 180^0 - XZ$$

Diess in (7) substituirt, gibt die Gleichungen

$$(11) \quad \begin{aligned} \cos^2 PX &= \frac{h^2b^2c^2 \sin^2\beta}{h^2b^2c^2 + k^2a^2c^2 \sin^2\beta + l^2a^2b^2 + 2hl\,ab^2c \cos\beta} \\ \cos^2 PY &= \frac{k^2a^2c^2 \sin^2\beta}{h^2b^2c^2 + k^2a^2c^2 \sin^2\beta + l^2a^2b^2 + 2hl\,ab^2c \cos\beta} \\ \cos^2 PZ &= \frac{l^2a^2b^2 \sin^2\beta}{h^2b^2c^2 + k^2a^2c^2 \sin^2\beta + l^2a^2b^2 + 2hl\,ab^2c \cos\beta} \end{aligned}$$

*d)* Bei den orthogonalen Systemen tritt eine Vereinfachung ein durch die Bedingung $\xi = \eta = \zeta = 90^0$. Ferner sind nach den im früheren Paragrafe erwähnten Verhältnissen die Normalen auf die Pinakoide $A$ (100), $B$ (010), $C$ (001) mit den Coordinatenaxen $X$, $Y$, $Z$ zusammenfallend. In den Gleichungen verbleibt somit nur $hkl$, $abc$. Die orthogonalen Systeme unterscheiden sich aber nach den Parameterverhältnissen, letztere sind daher zu berücksichtigen.

1. Im prismatischen Systeme ward als charakterisirendes Element das Parameterverhältniss

$$a : b : c = A : 1 : C$$

angenommen, d. i. die Parameter haben 3 verschiedene willkürliche Werthe, somit folgt die Gleichung

$$(12) \quad \begin{aligned} \cos^2 PX = \cos^2 PA &= \frac{h^2b^2c^2}{h^2b^2c^2 + k^2a^2c^2 + l^2a^2b^2} \\ \cos^2 PY = \cos^2 PB &= \frac{k^2a^2c^2}{h^2b^2c^2 + k^2a^2c^2 + l^2a^2b^2} \\ \cos^2 PZ = \cos^2 PC &= \frac{l^2a^2b^2}{h^2b^2c^2 + k^2a^2c^2 + l^2a^2b^2} \end{aligned}$$

2. Im Orthohexagonalen ist das Verhältniss $a : b : c = \sqrt{3} : 1 : C$ oder wenn nicht durch $a$ reducirt wird, wie $= \sqrt{3a} : a : c$, somit

$$\begin{aligned} \cos{}^2 PX = \cos{}^2 PA &= \frac{h^2c^2}{h^2c^2 + 3k^2c^2 + 3l^2a^2} \\ \cos{}^2 PY = \cos{}^2 PB &= \frac{3k^2c^2}{h^2c^2 + 3k^2c^2 + 3l^2a^2} \\ \cos{}^2 PZ = \cos{}^2 PC &= \frac{3l^2a^2}{h^2c^2 + 3k^2c^2 + 3l^2a^2} \end{aligned} \tag{13}$$

3. Im pyramidalen Systeme sind zwei Parameter gleich und daher statt $a : b : c$ einzuführen $a : a : c$

$$\begin{aligned} \cos{}^2 PX = \cos{}^2 PA &= \frac{h^2c^2}{h^2c^2 + k^2c^2 + l^2a^2} \\ \cos{}^2 PY = \cos{}^2 PB &= \frac{k^2c^2}{h^2c^2 + k^2c^2 + l^2a^2} \\ \cos{}^2 PZ = \cos{}^2 PC &= \frac{l^2a^2}{h^2c^2 + k^2c^2 + l^2a^2} \end{aligned} \tag{14}$$

4. Im tesseralen Systeme sind alle drei Parameter gleich, aus $a : b : c$ wird $a : a : a$; somit die Gleichung für dieses System

$$\begin{aligned} \cos{}^2 PX = \cos{}^2 PA &= \frac{h^2}{h^2 + k^2 + l^2} \\ \cos{}^2 PY = \cos{}^2 PB &= \frac{k^2}{h^2 + k^2 + l^2} \\ \cos{}^2 PZ = \cos{}^2 PC &= \frac{l^2}{h^2 + k^2 + l^2} \end{aligned} \tag{15}$$

Die Gleichungen (5—15) geben den Zusammenhang, der in der Fragestellung des §. 42 gesucht ward; durch dieselben wird es möglich, $PX$, $PY$, $PZ$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $a$, $b$, $c$, $h$, $k$, $l$ in Connex zu bringen, und durch Messungen an den Krystallen zu bestimmen. Allein es ist nicht bloss möglich, die Distanzen von $P$ hierdurch zu ermitteln, sondern auch die hier als Unbekannte behandelten Grössen $a$, $b$, $c$ oder $h$, $k$, $l$. Es handelt sich dann im letzteren Falle nur darum, so viele Bestimmungsgleichungen aufzustellen, als in jedem speciellen Falle Unbekannte zu ermitteln sind.

Wohl sind diese Formeln die Grundgleichungen, welche den Systemen zu Grunde gelegt werden können, allein bei den einzelnen Systemen wird mit Beihülfe einiger Sätze deren Anwendung noch vereinfacht und sie selbst für jeden einzelnen Fall specialisirt.

§. 43. Es ist die Distanz der Pole zweier Flächen als Function ihrer Indices, des Parameterverhältnisses und der Axenneigung anzugeben.

Fig. 30.

Zur Durchführung dieser Untersuchungen mögen die im vorigen Paragrafe angegebenen Werthe beibehalten werden und zur Ergänzung derselben nur noch $Q(pqr)$ eingeführt werden. Es ist sodann in Fig. 30

$$\cos PQ = \cos PY \cos QY + \sin PY \sin QY \cos PYQ.$$

Substituirt man in diese Formeln die nachstehenden Werthe

$$PYQ = PYX - QYX$$

$$\cos PYX = \frac{\cos PX - \cos PY \cos \zeta}{\sin PY \sin \zeta}$$

$$\sin PYX = \frac{\sqrt{[\sin^2 PY \sin^2 \zeta - (\cos PX - \cos PY \cos \zeta)^2]}}{\sin PY \sin \zeta}$$

$$\cos QYX = \frac{\cos QX - \cos QY \cos \zeta}{\sin QY \sin \zeta}$$

$$\sin QYX = \frac{\sqrt{[\sin^2 QY \sin^2 \zeta - (\cos QX - \cos QY \cos \zeta)^2]}}{\sin QY \sin \zeta}$$

so folgt nachstehende Gleichung:

$$[\sin^2\zeta \cos PQ - \sin^2\zeta \cos PY \cos QY - (\cos PX - \cos PY \cos\zeta)(\cos QX - \cos QY \cos\zeta)]$$
$$=$$
$$[(\sin^2 PY \sin^2\zeta - \{\cos PX - \cos PY \cos\zeta\}^2)(\sin^2 QY \sin^2\zeta - \{\cos QX - \cos QY \cos\zeta\}^2)]$$

Führt man die Entwicklungen durch, so erhält man

$$\begin{aligned}
&\sin^2\zeta(\cos^2 PQ - 2\cos PQ \cos PY \cos QY + \cos^2 PY \cos^2 QY)\\
&-2\cos PQ \cos PX \cos QX + 2\cos\zeta \cos PQ \cos PX \cos QY + 2\cos\zeta \cos PQ \cos QX \cos PY\\
&-2\cos^2\zeta \cos PQ \cos PY \cos QY + 2\cos^2\zeta \cos^2 PY \cos^2 QY\\
&+2\cos PY \cos QY \cos PX \cos QX - 2\cos\zeta \cos PY \cos^2 QY \cos PX -\\
&\qquad\qquad - 2\cos\zeta \cos^2 PY \cos QY \cos QX
\end{aligned}$$
$$=$$
$$\begin{aligned}
&\sin^2\zeta \sin^2 PY \sin^2 QY\\
&-\sin^2 PY \cos^2 QX + 2\sin^2 PY \cos QX \cos QY \cos\zeta - \sin^2 PY \cos^2 QY \cos^2\zeta\\
&-\sin^2 QY \cos^2 PX + 2\sin^2 QY \cos PX \cos PY \cos\zeta - \cos^2 PY \sin^2 QY \cos^2\zeta.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung lässt sich unter folgender Form darstellen:

$$\begin{aligned}
&\sin^2\zeta \cos^2 PQ\\
&+2\cos PQ[-\cos PX \cos QX - \cos PY \cos QY + (\cos PX \cos QY + \cos QX \cos PY)\cos\zeta]\\
&+\sin^2\zeta \cos^2 PY \cos^2 QY - \sin^2\zeta(1 - \cos^2 PY)(1 - \cos^2 QY)\\
&+(1 - \cos^2 PY)\cos^2 QY \cos^2\zeta + 2\cos^2\zeta \cos^2 PY \cos^2 QY\\
&+\cos^2\zeta(1 - \cos^2 QY)\cos^2 PY\\
&+(1 - \cos^2 PY)\cos^2 QX + (1 - \cos^2 QY)\cos^2 PX\\
&-2\cos\zeta \cos PY \cos^2 QY \cos PX - 2\cos\zeta \cos^2 PY \cos QY \cos QX\\
&-2\cos\zeta(1 - \cos^2 PY)\cos QX \cos QY - 2\cos\zeta(1 - \cos^2 QY)\cos PX \cos PY\\
&+2\cos PY \cos QY \cos PX \cos QX
\end{aligned}$$

$$=$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin^2\zeta\cos^2PQ\\ -2\cos PQ[\cos PX\cos QX+\cos PY\cos QY-(\cos PX\cos QY+\cos QX\cos PY)\cos\zeta]\\ +\cos^2PX+\cos^2QX+\cos^2PY+\cos^2QY-\cos^2PX\cos^2QY-\cos^2PY\cos^2QX\\ +2\cos PY\cos QY\cos PX\cos QX-2\cos\zeta(\cos QX\cos QY+\cos PX\cos PY)\\ -\sin^2\zeta\\ \qquad\qquad =0.\end{array}\right\}$$

Es wäre möglich, diese quadratische Gleichung nach $PQ$ aufzulösen, es wird aber die Lösung einfacher, wenn man eine zweite analog gebildete Gleichung für $PQ$ aufstellt und aus beiden die höheren Potenzen von cos $PQ$ eliminirt.

Für $PQ$ kann aber entweder aus dem Dreiecke $PQX$ oder $PQZ$ der Werth ermittelt werden, welcher sich dann von dem früheren nur durch die Einführung von $\eta$ oder $\xi$ statt $\zeta$ unterscheidet. Wir erhalten somit beispielsweise

$$\left.\begin{array}{l}\sin^2\eta\cos^2PQ\\ -2\cos PQ[\cos PX\cos QX+\cos PZ\cos QZ-(\cos PX\cos QZ+\cos QX\cos PZ)\cos\eta]\\ +\cos^2PX+\cos^2QX+\cos^2PZ+\cos^2QZ-\cos^2PX\cos^2QZ-\cos^2PZ\cos^2QX\\ +2\cos PZ\cos QZ\cos PX\cos QX-2\cos\eta(\cos QX\cos QZ+\cos PX\cos PZ)\\ -\sin^2\eta\\ \qquad\qquad =0.\end{array}\right\}$$

Eliminirt man nun aus diesen Gleichungen cos $^2PQ$ und substituirt ebenso, analog den Gleichungen des §. 42 die Werthe der Cosinusse $PX$, $PY$, $PZ$, $QX$, $QY$, $QZ$ als Functionen von $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $a$, $b$, $c$, $h$, $k$, $l$, so erhält man folgende Grundgleichung:

$$\cos PQ=\frac{\begin{array}{l}hpb^2c^2\sin^2\xi+kqa^2c^2\sin^2\eta+lra^2b^2\sin^2\zeta\\ -(hr+pl)\,ab^2c\,\{\cos\eta-\cos\xi\cos\zeta\}\\ -(kr+ql)\,a^2bc\,\{\cos\xi-\cos\eta\cos\zeta\}\\ -(hq+pk)\,abc^2\,\{\cos\zeta-\cos\xi\cos\eta\}\end{array}}{\sqrt{\left\{\begin{array}{l}h^2b^2c^2\sin^2\xi+k^2a^2c^2\sin^2\eta+l^2a^2b^2\sin^2\zeta\\ -2abc[hlb(\cos\eta-\cos\xi\cos\zeta)+kla(\cos\xi-\cos\eta\cos\zeta)\\ \qquad+hkc(\cos\zeta-\cos\eta\cos\xi)]\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}p^2b^2c^2\sin^2\xi+q^2a^2c^2\sin^2\eta+r^2a^2b^2\sin^2\zeta\\ -2abc[prb(\cos\eta-\cos\xi\cos\zeta)+qra(\cos\zeta-\cos\eta\cos\zeta)\\ \qquad+pqc(\cos\zeta-\cos\eta\cos\zeta)]\end{array}\right\}}}\qquad(16)$$

Die Gleichung (16) enthält aber die Axenneigungen als solche. Für vielfache Zwecke wird es nöthig sein, statt derselben die am Krystalle messbaren Winkel, welche eine Function derselben sind, einzuführen. Letztere sind analog, wie im §. 42 die Neigungen der Pinakoidflächen $A$ (100), $B$ (010), $C$ (001) oder $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

Die Relationen zwischen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ sind aber bereits unter (6) aufgestellt worden; führt man dieselben in (16) ein, so folgt

$$(17)\quad \cos PQ = \frac{\begin{matrix} hpb^2c^2\sin^2\alpha + kqa^2c^2\sin^2\beta + lra^2b^2\sin^2\gamma \\ + (hr+pl)\,ab^2c\cos\beta\sin\alpha\sin\gamma \\ + (kr+ql)\,a^2bc\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma \\ + (hq+pk)\,abc^2\cos\gamma\sin\alpha\sin \end{matrix}}{\sqrt{\left\{\begin{matrix} h^2b^2c^2\sin^2\alpha + k^2a^2c^2\sin^2\beta + l^2a^2b^2\sin^2\gamma \\ + 2abc\,[hlb\cos\beta\sin\alpha\sin\gamma + kla\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma \\ + hkc\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta] \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} p^2b^2c^2\sin^2\alpha + q^2a^2c^2\sin^2\beta + r^2a^2b^2\sin^2\gamma \\ + 2abc\,[prb\cos\beta\sin\alpha\sin\gamma + qra\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma \\ + pqc\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta] \end{matrix}\right\}}}$$

Diese allgemeine Gleichung drückt die Distanz in unmittelbar messbaren Winkeln aus; dieselbe kann nicht bloss dazu benützt werden, $PQ$ aus den schon bekannten Elementen zu berechnen, sondern auch eben diese Elemente dadurch zu ermitteln, dass man dieselben als unbekannte auffasst und mehrere Bestimmungsgleichungen aufstellt. Analog mit der Gleichung (4) lässt auch (17) sich für die einzelnen Systeme und Flächen vereinfachen.

*a*) Für das triklinische System haben $\xi$, $\eta$, $\zeta$ variable Werthe, die Gleichung (17) muss daher für den Fall, dass $hkl$, $pqr$ reelle, von Null verschiedene Werthe haben, in ihrer Allgemeinheit erhalten bleiben. Für den Fall jedoch, dass mehrere Indices von $hkl$, $pqr$ Null werden, fallen selbstverständlich die bezüglichen Glieder der Gleichung fort. Hiedurch wird es möglich, für die 3 klinischen Krystallsysteme aus der Formel für $PQ$ jene Gleichungen abzuleiten, welche die Distanz der Fläche $P$ von den Pinakoidflächen bestimmen; für die orthogonalen Systeme wurden dieselben, da $A$, $B$, $C$ mit $X$, $Y$, $Z$ zusammenfallen, bereits im vorhergehenden Paragrafe ermittelt. Wir erhalten somit

$$\cos PA = \frac{hb^2c^2\sin^2\alpha + lab^2c\cos\beta\sin\alpha\sin\gamma + kabc^2\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta}{bc\sin\alpha\sqrt{\left\{\begin{matrix} h^2b^2c^2\sin^2\alpha + k^2a^2c^2\sin^2\beta + l^2a^2b^2\sin^2\gamma \\ + 2abc\,[hlb\cos\beta\sin\alpha\sin\gamma + kla\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma \\ + hkc\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta] \end{matrix}\right\}}}$$

$$(18)\quad \cos PB = \frac{ka^2c^2\sin^2\beta + la^2bc\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma + habc^2\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta}{ac\sin\beta\sqrt{\left\{\begin{matrix} h^2b^2c^2\sin^2\alpha + k^2a^2c^2\sin^2\beta + l^2a^2b^2\sin^2\gamma \\ + 2abc\,[hlb\cos\beta\sin\alpha\sin\gamma + kla\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma \\ + hkc\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta] \end{matrix}\right\}}}$$

$$\cos PC = \frac{la^2b^2\sin^2\gamma + hab^2c\cos\beta\sin\alpha\sin\gamma + ka^2bc\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma}{ab\sin\gamma\sqrt{\left\{\begin{matrix} h^2b^2c^2\sin^2\alpha + k^2a^2c^2\sin^2\beta + l^2a^2b^2\sin^2\gamma \\ + 2abc\,[hlb\cos\beta\sin\alpha\sin\gamma + kla\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma \\ + hkc\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta] \end{matrix}\right\}}}$$

*b*) Im diklinischen Systeme ist $\zeta = 90^0$, daher $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$, woraus die Formeln folgen:

$$\cos PQ = \frac{\begin{array}{l} hpb^2c^2 \sin^2\alpha + lra^2b^2 (1 - \cos^2\alpha \cos^2\beta) + kqa^2c^2 \sin^2\beta \\ + (hq + pk)\, abc^2 \cos\alpha \cos\beta \sin\alpha \sin\beta \\ + (kr + ql)\, a^2bc \cos\alpha \sin\beta \sqrt{1 - \cos^2\alpha \cos^2\beta} \\ + (hr + pl)\, ab^2c \cos\beta \sin\alpha \sqrt{1 - \cos^2\alpha \cos^2\beta} \end{array}}{\sqrt{\left\{\begin{array}{l} h^2b^2c^2\sin^2\alpha + l^2a^2b^2(1 - \cos^2\alpha\cos^2\beta) + k^2a^2c^2\sin^2\beta \\ + 2abc(hkc\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta + kla\cos\alpha\sin\beta\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos^2\beta} \\ \qquad + hlb\cos\beta\sin\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos^2\beta}) \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} p^2b^2c^2\sin^2\alpha + r^2a^2b^2(1 - \cos^2\alpha\cos^2\beta) + q^2a^2c^2\sin^2\beta \\ + 2abc(pqc\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta + qra\cos\alpha\sin\beta\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos^2\beta} \\ \qquad + prb\cos\beta\sin\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos^2\beta}) \end{array}\right\}}} \qquad (19)$$

Substituirt man, wie früher statt $P$ die Pinakoidflächen $A$, $C$, $B$, so erhält man

$$\cos PA = \frac{hb^2c^2\sin^2\alpha + kab^2c\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta + labc^2\sin\alpha\cos\beta\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos^2\beta}}{bc\sin\alpha\sqrt{\left\{\begin{array}{l} h^2b^2c^2\sin^2\alpha + l^2a^2b^2(1-\cos^2\alpha\cos^2\beta) + k^2a^2c^2\sin^2\beta \\ + 2abc(hkc\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta + kla\cos\alpha\sin\beta\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos^2\beta} \\ \qquad + hlb\cos\beta\sin\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos^2\beta}) \end{array}\right\}}}$$

$$\cos PC = \frac{la^2b^2(1-\cos^2\alpha\cos^2\beta) + ka^2bc\cos\alpha\sin\beta\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos^2\beta} + hab^2c\sin\alpha\cos\beta\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos^2\beta}}{ab\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos^2\beta}\sqrt{\left\{\begin{array}{l} h^2b^2c^2\sin^2\alpha + l^2a^2b^2(1-\cos^2\alpha\cos^2\beta) + k^2a^2c^2\sin^2\beta \\ + 2abc(hkc\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta + kla\cos\alpha\sin\beta\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos^2\beta} \\ \qquad + hlb\cos\beta\sin\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos^2\beta}) \end{array}\right\}}} \qquad (20)$$

$$\cos PB = \frac{ka^2c^2\sin^2\gamma + habc^2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta + la^2bc\cos\alpha\sin\beta\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos^2\beta}}{ac\sin\beta\sqrt{\left\{\begin{array}{l} h^2b^2c^2\sin^2\alpha + l^2a^2b^2(1-\cos^2\alpha\cos^2\beta) + k^2a^2c^2\sin^2\beta \\ + 2abc(hkc\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta + kla\cos\alpha\sin\beta\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos^2\beta} \\ \qquad + hlb\cos\beta\sin\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos^2\beta}) \end{array}\right\}}}$$

*c*) Im monoklinischen Systeme sind $\xi = \zeta = 90^0$ und nur $\eta \gtrless 90^0$. Sei nun wie früher $\beta = 180^0 - \eta$, so folgt durch Abkürzung aus (17)

$$\cos PQ = \frac{hpb^2c^2 + kpa^2c^2\sin^2\beta + lra^2b^2 + (hr + pl)\, ab^2c\cos\beta}{\sqrt{\{k^2b^2c^2 + k^2a^2c^2\sin^2\beta + l^2a^2b^2 + 2hl\, ab^2c\cos\beta\}\{p^2b^2c^2 + q^2a^2c^2\sin^2\beta + r^2a^2b^2 + 2pr\, ab^2c\cos\beta\}}} \qquad (21)$$

Daraus ergibt sich für die Distanzen von den Pinakoidflächen $A$, $B$, $C$

$$\cos PA = \frac{hbc + lab\cos\beta}{\sqrt{\{h^2b^2c^2 + k^2a^2c^2\sin^2\beta + l^2a^2b^2 + 2hl\, ab^2c\cos\beta\}}}$$

$$\cos PB = \frac{kac\sin\beta}{\sqrt{\{h^2b^2c^2 + k^2a^2c^2\sin^2\beta + l^2a^2b^2 + 2hl\, ab^2c\cos\beta\}}} \qquad (22)$$

$$\cos PC = \frac{lab + hbc\cos\beta}{\sqrt{\{h^2b^2c^2 + k^2a^2c^2\sin^2\beta + l^2a^2b^2 + 2hl\, ab^2c\cos\beta\}}}$$

*d*) Gehen wir zu den orthogonalen Systemen über, so ist wohl $\xi = \eta = \zeta = 90^0$, allein es ist für deren weitere Unterabtheilungen auf die Werthe des Parameterverhältnisses Rücksicht zu nehmen.

1. Für das prismatische System ist $a : b : c = A : 1 : C$ gesetzt, da in denselben daher die 3 Parameter verschieden sind, so folgt für $PQ$ nachstehender Werth:

$$\cos PQ = \frac{hpb^2c^2 + kqa^2c^2 + lra^2b^2}{\sqrt{\{h^2b^2c^2 + k^2a^2c^2 + l^2a^2b^2\}\{p^2b^2c^2 + q^2a^2c^2 + r^2a^2b^2\}}} \tag{23}$$

Die Werthe $PA$, $PB$, $PC$ sind schon im §. 3 ermittelt.

2. Im orthohexagonalen Systeme ist $a:b:c = \sqrt{3} : 1 : C$ oder ohne durch $a$ abzukürzen, darf $\sqrt{3}\, a : a : c$ gesetzt werden. Diess gibt

$$\cos PQ = \frac{hpc^2 + 3kqc^2 + 3lra^2}{\sqrt{\{h^2c^2 + 3k^2c^2 + 3l^2a^2\}\{p^2c^2 + 3q^2c^2 + 3r^2a^2\}}} \tag{24}$$

3. Im pyramidalen Systeme ist die Gleichheit zweier Parameter vorhanden, daher $a : a : c$ einzuführen.

$$\cos PQ = \frac{hpc^2 + kqc^2 + lra^2}{\sqrt{\{[h^2 + k^2]\, c^2 + l^2a^2\}\{[p^2 + q^2]\, c^2 + r^2a^2\}}} \tag{25}$$

4. Im tesseralen Systeme ist $a : b : c = a : a : a$, woraus folgt

$$\cos PQ = \frac{hp + kq + lr}{\sqrt{(h^2 + k^2 + l^2)(p^2 + q^2 + r^2)}} \tag{26}$$

Die Formeln 17 bis 26 enthalten die wichtigsten Gleichungen; für specielle Fälle, wo $Q$ beispielsweise die Werthe (111), (110), (101), (011) annimmt, sind aus denselben die nöthigen Formeln leicht ableitbar.

Für §. 42 und §. 43 waren die Grundsätze leitend, die Elemente, die für die Krystallbestimmung nöthig sind, so viel als möglich direct zu bestimmen.

Allein die sphärische Trigonometrie und die Projectionsmethode liefern noch andere Hülfsmittel: eines der wichtigsten ist die Benützung der Bedingung, dass mehrere Flächennormalen in einem grössten Kreise — in einer Zone — liegen. Die Methoden, welche diesen Zonenverband ermitteln, sind von Miller[1]) genügend entwickelt worden, und im Nachfolgenden werden dieselben der Anordnung nach befolgt werden.

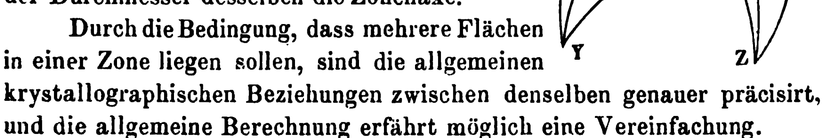
§. 44. **Liegen die Punkte $PQR$ in einem grössten Kreise auf der Kugeloberfläche, so soll die gegenseitige Abhängigkeit sowohl der Indices als auch der Distanzen von den Axen $XYZ$ ermittelt werden.**

---

[1]) Miller. Treatise on crystallography pag. 18.

Wie aus der Figur 31 erhellt, liegen die Pole $PQR$ in einem Kreise, und da derselbe zugleich ein grösster Kreis der Kugeloberfläche ist, so bilden diese Flächen, wie man zu sagen pflegt, eine Zone; da ferner die Normalen der Flächen in einen Kreis fallen, so ergibt sich der weitere Charakter einer Zone, dass nämlich die Combinationskanten dieser Flächen parallel sein müssen. Der Kreis selbst wird Zonenkreis genannt, der Durchmesser desselben die Zonenaxe.

Fig. 31.




Durch die Bedingung, dass mehrere Flächen in einer Zone liegen sollen, sind die allgemeinen krystallographischen Beziehungen zwischen denselben genauer präcisirt, und die allgemeine Berechnung erfährt möglich eine Vereinfachung.

Diese Vereinfachung besteht im Wesentlichen darin, dass die Indices und Winkel von 3 solchen — in einer Zone liegenden Flächen — sich gegenseitig bedingen und ausschliessen.

Diese Bedingung liefert vollständig die Betrachtung der sphärischen Dreiecke in der Fig. 31.

Aus den Dreiecken $POX$ und $RQX$ folgt

$$\cos PX = \cos QX \cos PQ + \sin QX \sin PQ \cos PQX \qquad (a)$$
$$\cos RX = \cos QX \cos QR + \sin QX \sin QR \cos RQX \qquad (b)$$

Multiplicirt man die Gleichung $a)$ mit $\sin QR$, die Gleichung $b)$ mit $\sin PQ$ und addirt, so folgt

$$\cos PX \sin QR + \cos RX \sin PQ = \cos QX (\sin QR \cos PQ + \cos QR \sin PQ)$$

woraus sich, da

$$\cos PQX = -\cos RQX \qquad \cos PQX + \cos RQX = o$$

ferner auch

$$(\sin QR \cos PQ + \cos QR \sin PQ) = \sin(PQ + RQ) = \sin RP$$

ist, schliesslich ableitet

$$\cos PX \sin QR + \cos RX \sin PQ = \cos QX \sin RP. \qquad (c)$$

Analog hiermit ergeben sich aus der Gleichung für die Dreiecke $PYQ$, $PYR$ und $PZQ$, $PZR$ die Formeln $d)$ und $e)$:

$$\cos PY \sin QR + \cos RY \sin PQ = \cos QY \sin PR \qquad (d)$$
$$\cos PZ \sin QR + \cos RZ \sin PQ = \cos QZ \sin RP \qquad (e)$$

Eliminirt man nun aus der Gleichung $c)$ und $d)$ successive $\sin QR$, $\sin PQ$, $\sin PR$, so erhält man die 3 Formeln

$$\sin PR (\cos PX \cos QY - \cos PY \cos QX) = \sin PQ (\cos PX \cos RY - \cos PY \cos RX)$$
$$\sin RP (\cos QX \cos RY - \cos QY \cos RX) = \sin QR (\cos PX \cos RY - \cos PY \cos RX)$$
$$\sin PQ (\cos QX \cos RY - \cos QY \cos RX) = \cos QR (\cos PX \cos QY - \cos PY \cos QX)$$

Analoge Gleichungen ergeben sich durch das Eliminationsverfahren aus den combinirten Formeln $c)$ $e)$ und $d)$ $e)$; vereinfacht lassen sich sich dieselben aber schreiben

$$f)\quad \frac{1}{\sin PQ}(\cos PX \cos QY - \cos PY \cos QX) = \frac{1}{\sin PR}(\cos PX \cos RY - \cos PY \cos RX)$$
$$= \frac{1}{\sin QR}(\cos QX \cos RY - \cos QY \cos RX)$$

$$g)\quad \frac{1}{\sin PQ}(\cos PZ \cos QX - \cos PX \cos QZ) = \frac{1}{\sin PR}(\cos PZ \cos RY - \cos PX \cos RZ)$$
$$= \frac{1}{\sin QR}(\cos QZ \cos RX - \cos QX \cos RZ)$$

$$h)\quad \frac{1}{\sin PQ}(\cos PY \cos QZ - \cos PZ \cos QY) = \frac{1}{\sin PR}(\cos PY \cos RZ - \cos PZ \cos PY)$$
$$= \frac{1}{\sin QR}(\cos QY \cos RZ - \cos QZ \cos RY)$$

Aus diesen Gleichungen $(f)$, $(g)$, $(h)$ folgt nun die allgemeine Relation zwischen den Distanzen der drei Punkte $P$, $Q$, $R$ sowohl unter sich als auch mit den Axen.

Eliminirt man nämlich aus den Gleichungen $f$, $g$, $h$ $\sin PQ$, $\sin PR$ durch Multiplication von $h)$ mit $\cos PX$, $g)$ mit $\cos PY$, $f)$ mit $\cos QZ$ und folgende Addition, wobei sich Theile der Gleichungen aufheben, so folgt nachstehende Gleichung.

$$(27a)\quad \begin{aligned}(\cos PY \cos RZ - \cos PZ \cos RY)\cos QX + (\cos PZ \cos RX - \cos PX \cos RZ)\cos QY\\ + (\cos PX \cos RY - \cos PY \cos RX)\cos QZ = 0.\end{aligned}$$

Die Relation zwischen den Winkeln führt durch Specialisirung der Werthe auch zu der Relation zwischen den Indices.

Seien nämlich, wie schon früher erwähnt, $X$, $Y$, $Z$ die Axen, dann $a\ b\ c$ die Parameter und die Indices von $P$ $hkl$, von $Q$ $pqr$, so ist bekanntlich

$$\frac{a}{h} \cos PX = \frac{b}{k} \cos PY = \frac{c}{l} \cos PZ$$
$$\frac{a}{p} \cos QX = \frac{b}{q} \cos QY = \frac{c}{r} \cos QZ.$$

Bildet man nun die Differenz der Producte der Cosinusse, ausgedrückt durch die Indices, und substituirt diese Werthe in die obige Gleichung, so erhält man schliesslich

$$(27)\quad Aa \cos RX + Bb \cos RY + Cc \cos RZ = o,$$

wobei

$$(28)\quad A = kr - lq \quad B = lp - hr \quad C = hq - kp \text{ ist.}$$

Diese bisher entwickelten Relationen müssen in jedem grössten Kreise ihre Geltung haben. Man pflegt die Zone — den grössten Kreis, der beispielsweise hier durch $P$, $Q$ $(hkl)$ $(pqr)$ geht — durch

[$A$, $B$, $C$] zu bezeichnen, welche Zahlen nach der obigen Gleichung aus den Indices ableitbar sind, und das Symbol der Zone bilden.

Jede Fläche, welche in einer Zone liegt, muss auch mit seinen Indices diesen Relationen entsprechen. Ob daher eine Fläche in einer Zone liegt, ergibt sich aus der Vergleichung der für dieselbe geltenden Bestimmungsgleichungen.

Seien die Indices der Fläche $R$ $uvw$ und soll dieselbe wie oben in der Zone der Flächen $P$ ($hkl$) und $Q$ ($pqr$) liegen, so muss Geltung haben

$$Aa \cos RX + Bb \cos RY + Cc \cos RZ = o$$

und

$$\frac{a}{u} \cos RX = \frac{b}{v} \cos RY = \frac{c}{w} \cos RZ$$

woraus durch Elimination folgt

$$Au + Bv + Cw = o.$$

Diese Gleichung muss erfüllt sein, wenn $R$ in der Zone [$A$, $B$, $C$] liegen soll.

Da man nun denken kann, dass sich mehrere grösste Kreise der Kugel in einem Punkte schneiden, so müssen die Indices dieses Durchschnittspunktes für jede Zone eine analoge Gleichung erfüllen. Diess dient dazu, um zu ermitteln, ob, wenn die Indices gegeben sind, eine Fläche in eine oder mehrere Zonen fällt.

Andererseits ergibt sich auch die Möglichkeit, aus zwei bekannten Zonen die Indices des Durchschnittspunktes derselben zu finden.

Falle $R$ in den Durchschnittspunkt der Zonen [$A$, $B$, $C$] und [$M$, $N$, $O$], muss dann den Gleichungen (27) genügt werden

$$Aa \cos RX + Bb \cos RY + Cc \cos RZ = o$$
$$Ma \cos RX + Nb \cos RY + Oc \cos RZ = o$$

Hieraus folgt durch Elimination von $\cos RX$, $\cos RY$, $\cos RZ$ die Gleichung

$$\frac{a}{u} \cos RX = \frac{b}{v} \cos RY = \frac{c}{w} \cos RZ$$

wobei

$$u = BO - CN \quad v = CM - AO \quad w = AN - BM. \tag{29}$$

Da zugleich die obige Gleichung die Gleichung einer Krystallfläche ist, so ist somit $uvw$ die Indices der Fläche $R$.

Dieses Hülfsmittel der Berechnung der Indices der Durchschnitte zweier Zonen ist in der bestimmenden Krystallographie von sehr grosser Wichtigkeit. Jede Fläche kann nämlich als der Durchschnitt von Zonen

$$\frac{\sin PS}{\sin SR} = \frac{(PS)}{(SR)} = \frac{kz - ly}{yw - zv}$$

$$= \frac{lx - hz}{zu - xv}$$

$$= \frac{hy - kx}{xv - yu}$$

Hieraus folgt unmittelbar die allgemeine Relation

$$(32) \qquad \frac{\sin PQ}{\sin QR} \; \frac{\sin SR}{\sin PS} = \frac{(PQ)}{(QR)} \cdot \frac{(SR)}{(PS)}$$

Eine Aenderung dieser Formel tritt theilweise ein, wenn die Bedingung $PS < PR$ nicht erfüllt ist, da nämlich die Gleichungen des §. 44 hierauf basirt sind, so muss im Falle

$$B) \; PS > PR$$

eine Transformation der Gleichungen $a'$, $b'$, $c'$ vorgenommen werden mittelst Permutation der Buchstaben $R$ und $S$.

Hieraus folgt dann analog mit früher:

$$\frac{\sin PS}{\sin RS} = \frac{(PS)}{(RS)} = \frac{kz - ly}{zv - yw}$$

$$= \frac{lx \quad hz}{xv - uz}$$

$$= \frac{hy - kx}{yu - xv}$$

und die allgemeine Relation

$$(33) \qquad \frac{\sin PQ}{\sin QR} \cdot \frac{\sin PS}{\sin RS} = \frac{(PQ)}{(QR)} \; \frac{(PS)}{(RS)}$$

Diese Gleichungen führen nun zu den wichtigsten Formeln der Zonenlehre, welche immer benützt wird, um aus bekannten Indices und Winkeln für die vierte Fläche die unbekannten Elemente zu bestimmen.

In nachfolgender Ableitung wird nur der Fall $A$) berücksichtigt, da $B$) mit demselben analog ist.

Zerlegt man $QR$ und $SR$ in die Differenz zweier Winkel, so folgt

$$\frac{\sin QR}{\sin PQ} = \frac{\sin (PR - PQ)}{\sin PQ} = \sin PR (\operatorname{cotg} PQ - \operatorname{cotg} PR)$$

$$\frac{\sin SR}{\sin PS} = \frac{\sin (PR - PS)}{\sin PS} = \sin PR (\operatorname{cotg} PS - \operatorname{cotg} PR)$$

Die Elimination von $PR$ aus beiden Gleichungen liefert, mit Substitution der obigen Werthe

$$\frac{\operatorname{cotg} PS - \operatorname{cotg} PR}{\operatorname{cotg} PQ - \operatorname{cotg} PR} = \frac{(P.Q)}{(QR)} \frac{(SR)}{(PS)} \tag{34}$$

Diese Formel vereinfacht sich im Gebrauche namentlich bei dem orthogonalen Systeme, wo es meist möglich wird, $PR = 90^0$ und einige der Indices gleich Null zu wählen.

Aus der obigen Gleichung lässt sich aber durch Einführung eines Hülfswinkels noch eine zweite Relation zum logarithmischen Gebrauche ableiten. Setzt man nämlich

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{(PQ)\,(SR)}{(QR)\,(PS)} \frac{\sin QR}{\sin PQ}$$

so folgt auch

$$\frac{\sin SR}{\sin PS} = \frac{\sin (PR - PS)}{\sin PS} = \operatorname{tang} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

woraus die weitere Entwicklung liefert:

$$\frac{\sin PS - \sin (PR - PS)}{\sin PS + \sin (PR - PS)} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \operatorname{tang} (45 - \alpha)$$

Da aber allgemein ist

$$\frac{\sin (a+b) - \sin (a-b)}{\sin (a+b) + \sin (a-b)} = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a}$$

so kann man für obige Gleichung annehmen

$$a = 1/2 \Big(PS + (PR - PS)\Big) = 1/2\, PR$$

$$b = 1/2 \Big(PS - (PR - PS)\Big) = PS - 1/2\, PR$$

wodurch die Relation folgt

$$\operatorname{tang} (PS - 1/2\, PR) = \operatorname{tang} 1/2\, PR \operatorname{tang} (45 - \alpha) \tag{35}$$

Im Gegensatze zu diesen die Winkel angebenden Gleichungen führen auch die obigen Formeln zu Relationen, durch welche die Indices einer der Flächen von den Indices der übrigen abgeleitet werden können.

Für den Fall $A$) war:

$$\frac{\sin PQ}{\sin QR} \cdot \frac{\sin SR}{\sin PS} = \frac{(PQ)}{(QR)} \frac{(SR)}{(PS)}$$

Da nun die Indices der Flächen $P, Q, R, S$ rational und daher auch die Differenz ihrer Produkte rational ist, so kann allgemein gesetzt werden

$$\frac{\sin PQ}{\sin QR} \cdot \frac{\sin SR}{\sin PS} = \frac{\varphi}{\psi}$$

Sind daher die Winkel, so ist auch hiedurch bekannt

$$\frac{(PQ)}{(QR)} = \frac{\varphi}{\psi} \frac{(PS)}{(SR)}$$

Substituirt man nun hierin die Werthe von $(PQ)$ . . . durch die Indices ausgedrückt, so folgt

$$x\,[\varphi l\,(QR) + \psi w\,(PQ)] = z\,[\varphi h\,(QR) + \psi u\,(PQ)]$$
$$y\,[\varphi h(QR) + \psi u\,(PQ)] = x[\varphi k\,(QR) + \psi v\,(PQ)]$$

Die Identificirung der Factoren führt zu

$$\begin{aligned} x &= [\varphi h\,(QR) + \psi u\,(PQ)] \\ y &= [\varphi k\,(QR) + \psi v\,(PQ)] \\ z &= [\varphi l\,(QR) + \psi w(PQ)] \end{aligned} \tag{36}$$

wodurch die Indices der Fläche $S$ bestimmt sind.

Im Falle $b$) ist statt $(SR)$ zu substituiren $(RS)$; die Endgleichungen sind in Folge dessen

$$\begin{aligned} x &= [\varphi h\,(QR) - \psi u\,(PQ)] \\ y &= [\varphi k\,(QR) - \psi v\,(PQ)] \\ z &= [\varphi l\,(QR) - \psi w\,(PQ)] \end{aligned} \tag{36a}$$

Während also die vorigen Paragrafe die Ableitung der Winkel von den Indices lehrten und die allgemeinen Formeln bilden für die Distanz der Flächennormale, enthalten die Relationen letzterer Paragrafe sämmtliche Verhältnisse der Zonen, sowohl in Beziehung auf Winkel als Indices. Für die praktische Rechnung sind letztere gegenüber den ersteren von grösserer Wichtigkeit, da sie vielmals kürzere Methoden angeben; bei den einzelnen Systemen wird manche Vereinfachung und specielle Anwendung anzugeben möglich sein.

§. 46. Die Relationen zwischen verschiedenen Axensystemen eines Krystalls sind anzugeben.

Alle bisher unternommenen Untersuchungen wurden auf die Axen $X, Y, Z$ bezogen; die analytische Geometrie kennt aber keine bestimmte Lage derselben, indem die Wahl der Axenebenen der Willkür des Autors überlassen bleibt. Wohl besitzen die Krystalle eine gewisse, genau charakterisirte Symmetrie, welche, für die orthogonalen Systeme namentlich, die zu wählenden Axenebenen bestimmen, allein im triklinischen und monoklinischen herrscht kein Gesetz, sondern nur das stillschweigende Uebereinkommen der Autoren, die Annahmen der ersten richtigen Untersuchungen so viel wie möglich beizubehalten.

Da letzteres aber nicht immer der Fall ist, so sind die krystallographischen Bestimmungen einiger Mineralspecies auf Grundlage mehrerer verschiedenen Axenannahmen durchgeführt; für jede dieser Hypothesen

müssen daher die Flächen verschiedene Indices erhalten. Der Theorie muss es also obliegen, die Transformation eines Axensystemes in ein zweites darzustellen.

Nach den Erörterungen des Paragrafes 41 ist es bekannt, dass alle Zonen von der Lage ihrer Pole und also der Krystallaxen abhängig sind.

Die Lage der drei Krystallaxen $X$, $Y$, $Z$ bestimmt die Zonen (100), (010), (001) direct, da sie deren Pole sind; hiedurch ist zugleich angegeben, dass nur jene Punkte der Kugeloberfläche als Axenpunkte angenommen werden können, welche zugleich Pole von Zonen am Krystalle sind; andere, ausser dem Zonenverbande stehenden Punkte sind irrational. Im Allgemeinen können daher die Axen von drei Zonen als Krystallaxen angenommen werden, wenn sie nicht in einer Ebene liegen.

Wird an einem Krystalle — dessen Flächen bereits auf ein Axensystem bezogen sind — eine Aenderung des Axensystems durchgeführt, so müssen hiedurch auch die krystallographischen Elemente andere werden. Die Winkeldistanzen der Flächen bleiben wohl ident, allein die von der Axenlage abhängigen Indices und Parameter werden geändert. Die hiefür geltenden Relationen werden im Nachfolgenden nach Vorgange Miller's angegeben werden.

Es seien $X$, $Y$, $Z$ die Krystallaxen und zugleich die Punkte, in denen dieselben die Kugeloberfläche treffen; $a$, $b$, $c$ die Parameter des Krystalls in Beziehung auf diese Axen; es sollen aber die Pole $X'$ $Y'$, $Z'$ von drei anderen Zonen $BC$, $AC$, $AB$ als geändertes Axensystem angenommen werden.

Während daher die Indices von $A$, $B$, $C$ nach dem ersten Systeme $\alpha\beta\gamma$, $\varkappa\lambda\mu$. $\varrho\sigma\tau$ sind, müssen dieselben für das zweite (1'00), (01'0), (001') sein. Soll aber die allgemeine Transformation der Fläche $hkl$ dargestellt werden, so muss dieselbe zuerst in ihrem Zonenverbande mit den Zonen $AB$, $BC$, $AC$ dargestellt werden.

Fig. 33.

Sei $P$ der Pol der Krystallfläche $hkl$ (Fig. 3?), so ist ferner $Q(pqr)$ der Durchschnitt der Zonen $AC$ und $BP$, analog $R$ $(uvw)$ der Durchschnitt von $AB$ und $CP$; hieraus ergeben sich zugleich die Indices von $Q$, $R$, durch die Bekannten ausgedrückt, als:

$$p = (\tau\alpha - \varrho\gamma)(\varkappa k - \lambda h) - (\varrho\beta - \sigma\alpha)(\mu h - \varkappa l)$$
$$r = (\sigma\gamma - \tau\beta)(\mu h - \varkappa l) - (\tau\alpha - \varrho\gamma)(\lambda l - \mu k)$$
$$u = (\gamma\varkappa - \alpha\mu)(\varrho\varkappa - \sigma h) - (\alpha\lambda - \beta\varkappa)(\tau h - \varrho l)$$
$$v = (\alpha\lambda - \beta\varkappa)(\sigma l - \tau\varkappa) - (\beta\mu - \gamma\lambda)(\varrho k - \sigma h)$$

Die Relation aber folgt aus dem Zonenverbande. $ARB$ und $AQC$ sind grösste Kreise, daher die Zonenregeln Geltung haben.

Stellt man nun die Gleichungen $(fgh)$ von §. 44, und zwar für die Axensysteme $XYZ$ und $X'Y'Z'$ und eliminirt $AB$, $AC$, $AQ$, $AR$, so folgt

$$\frac{\cos AX' \cos RY' - \cos AY' \cos RX'}{\cos AX \cos RY - \cos AY \cos RY} = \frac{\cos BY' \cos RX' - \cos BX' \cos RY'}{\cos BY \cos RX - \cos BX \cos RY}$$

$$\frac{\cos AX' \cos QZ' - \cos AZ' \cos QX'}{\cos AX \cos QZ - \cos AZ \cos QZ} = \frac{\cos CZ \cos QX' - \cos CX' \cos QZ}{\cos CZ \cos QX - \cos CX \cos QZ}$$

Diese Gleichungen reduciren sich aber, da

$$\sphericalangle AY' = AZ' = BX' = CX' = MY' = NZ' = 90^0$$

Drückt man ferner die Cosinusse durch die Indices aus mittelst

$$\frac{a}{\alpha} \cos AX = \frac{b}{\beta} \cos AY = \frac{c}{\gamma} \cos AZ$$

$$\frac{a}{\varkappa} \cos BX = \frac{b}{\lambda} \cos BY = \frac{c}{\mu} \cos BZ$$

$$\frac{a}{\varrho} \cos CX = \frac{b}{\sigma} \cos CY = \frac{c}{\tau} \cos CZ$$

$$\frac{a}{h} \cos PX = \frac{b}{k} \cos PY = \frac{c}{l} \cos PZ$$

$$\frac{a}{p} \cos QX = \frac{b}{q} \cos QY = \frac{c}{r} \cos QZ$$

$$\frac{a}{u} \cos RX = \frac{b}{v} \cos RY = \frac{c}{w} \cos RZ$$

so folgt

$$\frac{\alpha\,(\lambda u - \varkappa v) \cos AX' \cos RY'}{\cos AX} = \frac{\varkappa\,(\alpha v - \beta u) \cos BY' \cos RX'}{\cos BX}$$

$$\frac{\alpha\,(\tau p - \varrho r) \cos AX' \cos QZ}{\cos AX} = \frac{\varrho\,(\alpha r - \gamma p) \cos CZ' \cos QX'}{\cos CX}.$$

Da aber aus den $\Delta$ $X'BQ$ und $X'PB$ folgt, indem $BX' = 90^0$

$$\cos QX' = \sin QB \cos QBX'$$
$$\cos PX' = \sin PB \cos QBX'$$

und analog hiermit

$$\frac{\cos QX'}{\cos PX'} = \frac{\sin QB}{\sin BP} = \frac{\cos QZ'}{\cos PZ}$$

$$\frac{\cos RX'}{\cos PX'} = \frac{\sin RC}{\sin PC} = \frac{\cos RY'}{\cos PY'}$$

so transformirt sich die obige Gleichung in

$$\frac{\alpha\,(\lambda u - \varkappa v)\cos AX'}{\cos AX \cos PX'} = \frac{\varkappa\,(\alpha v - \beta u)\cos BY'}{\cos BX \cos PY'}$$
$$\frac{\alpha\,(\tau p - \varrho r)\cos AX'}{\cos AX \cos PX} = \frac{\sigma\,(\alpha r - \gamma p)\cos CZ'}{\cos CX \cos PZ'} \qquad (37)$$

Substituirt man hierein die anfangs entwickelten Indices, so ist

$$\begin{aligned}
(\lambda u - \varkappa v) &= (\beta\varkappa - \alpha\lambda)\,(h\Phi' + k\Phi'' + l\Phi''') \\
(\alpha v - \beta u) &= (\beta\varkappa - \alpha\lambda)\,(h\Psi' + k\Psi'' + l\Psi''') \\
(\tau p - \varrho r) &= (\varrho\gamma - \tau\alpha)\,(h\Phi' + k\Phi'' + l\Phi''') \\
(\alpha r - \gamma p) &= (\varrho\gamma - \tau\alpha)\,(h\Omega' + k\Omega'' + l\Omega''')
\end{aligned}$$

worin $\Phi$, $\Psi$, $\Omega$ folgende Werthe haben:

$$\begin{aligned}
\Phi' &= \lambda\tau - \mu\sigma & \Psi' &= \mu\varrho - \varkappa\tau & \Omega' &= \varkappa\sigma - \lambda\varrho \\
\Phi'' &= \sigma\gamma - \tau\beta & \Psi'' &= \tau\alpha - \varrho\gamma & \Omega'' &= \varrho\beta - \sigma\alpha \\
\Phi''' &= \beta\mu - \gamma\lambda & \Psi''' &= \gamma\varkappa - \alpha\mu & \Omega''' &= \alpha\lambda - \beta\varkappa
\end{aligned} \qquad (38)$$

Mittelst dieser Substitutionen gelangen wir zur Gleichung

$$\frac{a'}{h'}\cos PX' = \frac{b'}{k'}\cos PY' = \frac{c'}{l'}\cos PZ' \qquad (39)$$

worin $a'$, $b'$, $c'$ für folgende Werthe substituirt sind

$$\begin{aligned}
a' &= \frac{1}{\alpha}\,\frac{\cos AX}{\cos AX'} \\
b' &= \frac{1}{\varkappa}\,\frac{\cos BX}{\cos BY'} \\
c' &= \frac{1}{\varrho}\,\frac{\cos CX}{\cos CZ'}
\end{aligned} \qquad (40)$$

Da aber die Gleichung in ihrer Form absolut mit der allgemeinen krystallographischen Flächengleichung übereinstimmt, so kann dieselbe auch hiefür gelten unter der Bedingung, dass $a'$ $b'$ $c'$ die Parameter des zweiten Axensystems $X'$ $Y'$ $Z'$ sind und $h'$ $k'$ $l'$ die Indices der Fläche $P$ in Beziehung auf eben diese Axen. Während also Satz (40) die neuen Parameter bestimmt, haben die Indices $h'$ $k'$ $l'$ dann in Folge (37) und (38) die Werthe

$$\begin{aligned}
h' &= h\Phi' + k\Phi'' + l\Phi''' \\
k' &= h\Psi' + k\Psi'' + l\Psi'' \\
l' &= h\Omega + k\Omega'' + l\Omega'''
\end{aligned} \qquad (41)$$

Diese Relation gibt somit die Möglichkeit, von einem Axensystem zu einem zweiten überzugehen und Parameter und Indices umzurechnen. Soll nur eines von diesen Problemen erreicht werden, so lassen sich wohl noch einfachere Methoden angeben.

Sollen, ohne Rücksicht auf die Bestimmung der Parameter, die Indices permutirt werden, so lässt sich diess, wenn 3 Flächen mit ihren bezüglichen doppelten Indices bekannt sind, mittelst der Methode des unbestimmten Coëfficienten durchführen. Seien also die Indices von den Flächen $P$, $Q$, $R$, $hkl$, $pqr$, $uvw$ vor der Permutation und $h'$ $k'$ $l'$, $p'$ $q'$ $r$, $u'$ $v'$ $w'$ nach derselben, so können folgende Gleichungen benützt werden:

$$\begin{aligned} h' &= \xi' h + \xi'' k + \xi''' l \\ k' &= \eta' h + \eta'' k + \eta''' l \\ l' &= \zeta' h + \zeta'' k + \zeta''' l \\ p' &= \xi' p + \xi'' q + \xi''' r \\ q' &= \eta' p + \eta'' q + \eta''' r \\ r' &= \zeta' p + \zeta'' q + \zeta''' r \\ u' &= \xi' u + \xi'' v + \xi''' w \\ v' &= \eta' u + \eta'' v + \eta''' w \\ w' &= \zeta' u + \zeta'' v + \zeta''' w \end{aligned}$$

Bestimmt man aus diesen Gleichungen die unbestimmten Factoren $\xi'$ $\xi''$ $\xi'''$ $\eta'$ $\eta''$ $\eta'''$ $\zeta'$ $\zeta''$ $\zeta'''$, so bilden dieselben dann die allgemeinen Permutationen, so dass für jede Fläche gilt

$$\begin{aligned} x' &= \xi' x + \xi'' y + \xi''' z \\ y' &= \eta' x + \eta'' y + \eta''' z \\ z' &= \zeta' x + \zeta'' y + \zeta''' z \end{aligned} \tag{41 a}$$

Eine zweite Aufgabe kann aber sein, ohne Aenderung der Axenlage doch Indices und Parameter zu transformiren. Für diesen Fall seien $hkl$ die Indices der Fläche $P$, bezogen auf die Axen $XYZ$ mit den Parametern $abc$, und $h'k'l'$ bezogen auf dieselben Axen mit den Parametern $a'b'c'$. Es ist somit

$$\frac{a}{h} \cos PX = \frac{b}{k} \cos PY = \frac{c}{l} \cos PZ$$

$$\frac{a'}{h'} \cos PX = \frac{b'}{k'} \cos PY = \frac{c'}{l'} \cos PZ$$

Sind $hkl$ bestimmte Zahlen, so lässt sich immer eine geeignete Wahl von $a'b'c$ treffen, damit $h'k'l'$ rationale Zahlen bilden. Es ist nämlich

$$\frac{a'}{h'} = \frac{a}{h} \quad \frac{b'}{k'} = \frac{b}{k} \quad \frac{c'}{l'} = \frac{c}{l} \tag{42}$$

Mit diesen Methoden der Transformation sind die wichtigsten Gleichungen gegeben worden, welche das Problem der Transformation der

Coordinaten im Allgemeinen lösen — für die specielleren Fälle lassen sich wohl noch Abkürzungen anwenden, welche jedoch bereits dem Gebiete der einzelnen Systeme angehören.

Dieser Paragraf schliesst zugleich die Reihe der allgemeinen Untersuchungen über die Theorie der morphologischen Verhältnisse. Diese specialisiren sich, je nachdem die entscheidenden Merkmale, Grösse und Lage der Axen variiren, und müssen daher in der Theorie der einzelnen Krystallsysteme so weit verfolgt werden, um die Relationen für den praktischen Gebrauch möglichst zu vereinfachen. Diejenigen Gesetze, welche sich auf die bei den einzelnen Systemen gewonnenen Erfahrungen basiren müssen, namentlich die Untersuchungen über Volumen und Oberfläche der Krystalle und die Berechnungsmethode der Zwillingskrystalle sind ebenfalls den späteren Kapiteln vorbehalten worden. Die Anwendung der in diesem Theile entwickelten Lehrsätze auf dem Gebiete der praktischen Morphologie wird im 3. Theile erörtert werden.

Die in §. 40 entwickelten Symmetriegesetze sind für die Anordnung der Aufeinanderfolge der Systeme von Entscheidung gewesen.

# X. Kapitel.

## Prismatisches Krystallsystem.

§ 47. Nach dem im §. 40 (Satz 1) aufgestellten Schema ist der Charakter des prismatischen Systems die Rechtwinkeligkeit der Axenneigungen und die Ungleichheit der drei Parameter. Es ist daher in jedem der 8 Quadranten eine Ebene vorhanden, welche gegen $X$, $Y$, $Z$ so geneigt ist, dass auch in den übrigen 7 restirenden Quadranten Ebenen mit gleichen Neigungen gefunden werden.

Die Form $(hkl)$ besitzt somit in diesem Systeme 8 Flächen, deren Schema bereits §. 41 (3) gegeben ist.

Da in diesem Systeme aber nur in jedem Quadranten eine Fläche der Form $(hkl)$ in Betracht zu ziehen ist, so schliesst sich diess unmittelbar an die Bedingungen der analytischen und sphärischen Geometrie an und vereinfacht sehr die Auffassung gegenüber jenen Systemen, in welchen ein höherer oder geringerer Grad der Symmetrie herrscht. Während in dem monoklinischen und triklinischen Systeme die Quadranten ungleich und daher jeder einzelne der Behandlung zu unterziehen ist, während ferner im orthohexagonalen, pyramidalen und tesseralen Systeme die Bestimmtheit der Werthe der Parameter mehr als 8 Flächen zu einer geometrischen Form vereint; so sind im prismatischen Systeme alle Quadranten gleich und jeder Form entspricht in jedem Quadranten bei holoedrischer Ausbildung nur eine Fläche. Bei der Berechnung eines Krystalls dieser Gruppe tritt daher die Erleichterung ein, dass möglichst wenig Flächen einer Form und im Allgemeinen nur ein Quadrat zu bestimmen ist, da dieselbe auch die Verhältnisse der übrigen wieder gibt. Hiedurch ist es auch angezeigt, eben mit diesem Systeme, gleichsam dem einfachsten, die Specialisirung der Lehrsätze des vorigen Kapitels zu beginnen.

§. 48. Entwicklung der Formeln des prismatischen Systems.

Die Lage eines Poles gegen die Krystallaxen lässt sich auf eine doppelte Art ermitteln, entweder direct durch die allgemeinen Gleichungen oder bequemer durch das Hülfsmittel der sphärischen Trigonometrie. Für die Anwendung der Gleichungen letzterer, für die zahlreich möglichen Fälle von Dreiecken und Pol-Lagen besondere Details anzuführen, kann hier nicht angestrebt werden, sondern bleibt in jedem speciellen Falle der Rechnung überlassen; das Kapitel über Berechnung mit dem die mathematischen Formeln enthaltenden Anhang wird die wichtigsten Punkte erörtern. Hier sowohl, als auch bei den übrigen Systemen können nur die aus dem Charakter der Systeme selbst ableitbaren Formeln aufgestellt werden.

*a*) Die Lage eines Poles gegen die Krystallaxen.

Da im prismatischen Systeme die Krystallaxen $X$, $Y$, $Z$ rechtwinkelig sind, so fallen auch die Normalen der Pinakoide $A$ (100), $B$ (010), $C$ (001) mit denselben zusammen. Es gelten daher die bereits entwickelten §. 42 (12) Gleichungen.

$$\begin{aligned}
\cos^2 PX &= \cos^2 PA = \frac{h^2b^2c^2}{h^2b^2c^2 + k^2a^2c^2 + l^2a^2b^2} \\
\cos^2 PY &= \cos^2 PB = \frac{k^2a^2c^2}{h^2b^2c^2 + k^2a^2c^2 + l^2a^2b^2} \qquad (12) \\
\cos^2 PZ &= \cos^2 PB = \frac{l^2a^2c^2}{h^2b^2c^2 + k^2a^2c^2 + l^2a^2b^2}
\end{aligned}$$

Zu einer indirecten Methode führt die Betrachtung der Fig. 26, worin

$$\cos PX = \sin PY \cos PYX = \sin PZ \cos PZX$$
$$\operatorname{cotg} PX = \operatorname{tg} PZY \cos PXY = \operatorname{tg} PYZ \cos PXZ$$

und analog für $PY$, $PZ$, woraus mittelst (2) für $PX$, $PY$, $PZ$ folgt

$$\operatorname{cotg} PX = \frac{hb}{ka} \cos PXY = \frac{hc}{la} \cos PXZ \qquad (43)$$

*b*) Die Distanz zweier Pole.

Für die Ermittlung der Werthe des Winkels von zwei Flächen $P$ ($hkl$) $Q$ ($pqr$) gilt die allgemeine Gleichung §. 43.

$$\cos PQ = \frac{hpb^2c^2 + kqa^2c^2 + lra^2b^2}{\sqrt{\{h^2b^2c^2 + k^2a^2c^2 + l^2a^2b^2\}\{p^2b^2c^2 + q^2a^2c^2 + r^2a^2b^2\}}} \qquad (23)$$

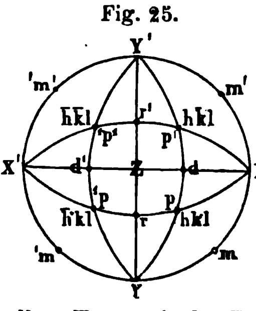
Für jene Fälle, wo $abc$ noch nicht bekannt, muss die Auswerthung der betreffenden sphärischen Dreiecke vorgenommen werden.

Liegen die Flächen $P$, $Q$ in einer Zone mit noch zwei Flächen $R$, $S$, so ist die Gleichung (34) anzuwenden.

§. 49. Winkel und Gestalt der Form $(hkl)$.

Um die Winkel der Form $(hkl)$ anzugeben, kann entweder die directe Substitution der Indices in der Gleichung (12) versucht werden, oder die Auswerthung mittelst sphärischer Trigonometrie und Projection.

Fig. 25.




Für letzteren Weg ist die Benützung von Fig. 25 nöthig, in welcher die für das prismatische System nöthigen Flächen mit

p $(hkl)$, 'p $(\bar{h}kl)$, p' $(h\bar{k}l)$, 'p' $(\bar{h}\bar{k}l)$
d $(hol)$, 'd $(\bar{h}ol)$, r $(okl)$, r' $(o\bar{k}l)$
m $(hko)$, 'm $(\bar{h}ko)$, m' $(h\bar{k}o)$, 'm' $(\bar{h}\bar{k}o)$
$X(100)$, $X'(\bar{1}00)$, $Y(010)$, $Y(0\bar{1}0)$, $Z(001)$

bezeichnet sind.

Seien die Kantenwerthe von Flächen derselben Form mit den Buchstaben $H$, $K$, $L$ bezeichnet, je nachdem sie eine Combination zweier, sich durch das Vorzeichen von $h$ oder $k$ oder $l$ unterscheidender Flächen ist, so erhalten wir folgende Formeln, welche mit (12) im Connex sind.

$$\cos H = \cos (hkl)(\bar{h}kl) = \frac{k^2a^2c^2 - h^2b^2c^2 + l^2a^2b^2}{h^2b^2c^2 + k^2a^2c^2 + l^2b^2a^2}$$

$$(47) \qquad \cos K = \cos (hkl)(h\bar{k}l) = \frac{h^2b^2c^2 - k^2a^2c^2 + l^2a^2b^2}{h^2b^2c^2 + k^2a^2c^2 + l^2a^2b^2}$$

$$\cos L = \cos (hkl)(hk\bar{l}) = \frac{h^2b^2c^2 + k^2a^2c^2 - l^2a^2b^2}{h^2b^2c^2 + k^2a^2c^2 + l^2a^2b^2}$$

Seien nur die Winkel von Prismen zu ermitteln, so ist

für $(hko)$

$$\mathrm{tg}\ {}^1/_2\, H = \mathrm{tg}\ {}^1/_2\, (hko)(\bar{h}ko) = \frac{hb}{ka} : K = 180^0 - H$$

für $(hol)$

$$(48) \qquad \mathrm{tg}\ {}^1/_2\, L = \mathrm{tg}\ {}^1/_2\, (hol)(ho\bar{l}) = \frac{la}{hc} : H = 180^0 - L$$

für $(okl)$

$$\mathrm{tg}\ {}^1/_2\, K = \mathrm{tg}\ {}^1/_2\, (okl)(o\bar{k}l) = \frac{kc}{lb} : L = 180^0 - K.$$

Diese Gleichungen sind beim prismatischen System wohl wenig in V—endung, allein sie müssen ihren Platz hier finden, da bei den Ver-ungen der nächsten Systeme analoge Hülfsgleichungen benützt sollen.

Gestalten der Form $(hkl)$ hängen aber von den speciellen Wer- Indices

$$\text{tg}\, PX = \text{tg}\,(hko)\,(100) = \frac{ak}{bh}$$
$$\text{tg}\, PY = \text{tg}\,(okl)\,(010) = \frac{bl}{ck} \qquad (45)$$
$$\text{tg}\, PZ = \text{tg}\,(hol)\,(001) = \frac{ch}{al}$$

*d*) Aenderungen des Axensystems.

Im prismatischen Systeme kommen nicht allzu häufig vollständige Aenderungen der Axenlage vor, da der orthogonale Charakter präponderirt, allein oftmals treten Aenderungen in der Annahme der Indices der Grundpyramide, und daher auch der Parameter ein. Die hiefür geltenden Gleichungen wurden bereits im §. 46, Satz 42 entwickelt.

Sollte jedoch ein Uebergang in ein schiefwinkeliges System wirklich nöthig sein, so werden im Allgemeinen die Gleichungen (38), (39), (40), (41) zu benützen und die aus den Bedingungen entspringenden Werthe der Winkel und Indices anzuwenden sein.

Von den möglichen Fällen hebe ich einen auch beim monoklinischen Systeme vorkommenden hervor.

Es seien die krystallographischen Axen $X'$, $Y'$, $Z'$ den Durchschnitten der Flächen $M\,(hko)$, $M'\,(h\bar{k}o)$, C (001) parallel und die Pole der Zonen dieser Flächen : $MC = [\bar{k}ho]$, $M'C = [kho]$, $MM' = [0.0.2hk)$ werden. Es coincidirt somit

$$M\,(hko) \text{ mit } A\,(\alpha\beta\gamma)$$
$$M'(h\bar{k}o) \text{ mit } B\,(\varkappa\lambda\mu)$$
$$C\,(001) \text{ mit } C\,(\varrho\sigma\tau)$$

des §. 46.

Aus der Gleichung (12) folgt aber unmittelbar

$$\cos MX = \sin M'Y = \frac{hb}{\sqrt{k^2a^2 + h^2b^2}}$$
$$\cos M'Y = -\sin MX = -\frac{ka}{\sqrt{k^2a^2 + h^2b^2}}$$

Substituirt man diess in die allgemeinen Gleichungen (39) — (41) so folgt

$$\begin{aligned} p' &= kp - hq \\ q' &= kp + hq \\ r' &= r \\ a' &= \sqrt{k^2a^2 + h^2b^2} \\ b' &= \sqrt{k^2a^2 + h^2b^2} \\ c' &= c \end{aligned} \qquad (46)$$

Die geneigtflächige Hemiedrie — also diejenige, in welcher die Form $(hkl)$ durch eine ungerade Anzahl positiver oder negativer Indices repräsentirt ist, im ersten Falle direct, im zweiten invers genannt — kann im prismatischen Systeme, angewendet auf die pyramidale Gestalt $(hkl)$ eine geschlossene Form von 4 Flächen erzeugen Fig. 35, die im Allgemeinen als Tetraeder $\varkappa\,(hkl)$ bezeichnet werden kann.

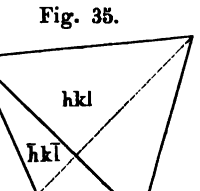


Fig. 35.

Die Indices des directen Tetraeders sind: $hkl$, $h\bar{k}\bar{l}$, $\bar{h}k\bar{l}$, $\bar{h}\bar{k}l$, die des inversen hingegen $\bar{h}kl$, $h\bar{k}l$, $hk\bar{l}$, $\bar{h}\bar{k}\bar{l}$, wodurch sich zugleich auch die Unterschiede ihrer gegenseitigen Raumlagen ergeben.

Die Beobachtungen der Natur beschränken das Vorkommen dieser Hemiedrie; und sie wurde nur an einzelnen, auch optisch bestimmten Stoffen, z. B. Bittersalz, Zinkvitriol für einige Flächen bei holoedrischer Ausbildung der übrigen Formen geltend gefunden.

Die Winkel für das Tetraeder sind ableitbar aus denen der Pyramide, wenn man bedenkt, dass die Kanten derselben mit den Flächen 100, 010, 001 parallel laufen. Bezeichnet man daher die Tetraederwinkel je nach der Variation der Vorzeichen der Indices mit $\varkappa\,(HK)$, $\varkappa\,(HL)$, $\varkappa\,(KL)$, so ist

$$\varkappa\,(HK) = 180 - L$$
$$\varkappa\,(HL) = 180 - K$$
$$\varkappa\,(KL) = 180 - H$$

Wichtiger als die geneigtflächige Hemiedrie tritt im Systeme die symmetrische $\sigma\,(hkl)$ hervor, da sie, wenn auch nur an Hemimorphit und Struvit beobachtet, dennoch mit dem physikalischen inneren Charakter der Molecularanordnung im innigsten Connex steht. Das allgemeine Kennzeichen dieser Hemiedrie besteht darin, dass von einer Form nur jene halbe Anzahl der Flächen zur Ausbildung gelangt, welche den vier einer Axe anliegenden Quadranten zugehören; einer der Indices bleibt constant, und die auf denselben sich beziehende Axe bildet gleichsam den Pol der Ausbildung.

Fig. 9.

Bei diesen hemimorphen Körpern ist aber auch die Krystallogenesis selbst in so innigem Verbande mit dieser Hemiedrie, dass auch die Anordnung der Krystalle bereits immer polar erscheint und einer derselben constant auf dem Muttergestein inhärirt. Die physikalischen Charaktere werden später erörtert. Für die Ausbildung kann Fig. 9, Hemimorphit, das Beispiel liefern.

Von bedeutend geringerer Wichtigkeit als beide erörterten Meroëdrien ist für dieses System die parallelflächige Hemiedrie, welche darin besteht, dass von jedem Quadranten der Kugelhälfte entweder die anliegenden oder gegenüberliegenden ausgebildet erscheinen; im nachfolgenden Systeme hingegen ist der grösste Theil der Formen durch dieselbe gebildet.

Im prismatischen Systeme ist, wie aus Vorstehendem erhellt, das Vorkommen der Meroëdrien sehr beschränkt; die einfache Symmetrie der Quadranten gestattet eben nur als geschlossene Form das Tetraeder: in dem nachfolgenden, mehr symmetrischen Systeme nimmt mit der Complication der Flächen zu einer Form auch die Häufigkeit der Hemiedrie zu.

# XI. Kapitel.

## Orthohexagonales Krystallsystem.

§. 50. Das orthohexagonale System umfasst alle Gestalten, welche von drei senkrechten Axen ableitbar sind, von denen zwei ungleich und irrational, aber in einem constanten Verhältnisse, hingegen die dritte vollkommen variabel ist. Dadurch, dass das Verhältniss der constanten Axen also ein bestimmtes, und zwar $\sqrt{3} : 1$ ist, wird allen Formen dieses Systems ein gemeinsamer Typus aufgedrückt, welcher nur durch Variation der Axe $c$ etwas geändert wird. Diess Verhältniss $\sqrt{3} : 1$ ist aber weiters auch auf die holoedrische Ausbildung der Formen insoweit von Einfluss, dass gegenüber der einfachen Symmetrie der orthogonalen Axen — hier in jeder Kugelhälfte 12 Flächen mathematisch möglich sind, deren Indices von einander ableitbar und welche sowohl gegen sich als auch gegen die Axen gleich geneigt, also ununterscheidbar und zu einer Form $\{hkl\}$ desshalb vereinbar sind[1]). Die holoedrische Ausbildung steigt somit von 8 der prismatischen Systeme auf 24 und ist zugleich von charakterisirendem Momente, dass, um sie zu erklären, Weiss 4 Axen und Miller 3 schiefgeneigte Axen annahm.

Die Bestimmung der Axenlage ist analog dem prismatischen: so dass $Y$ von rechts nach links lauft und $Z$ die verticale Axe ist. $Z$ fällt zugleich mit der optischen Axe zusammen und bildet so die Axe der Symmetrie.

§. 51. Entwicklung der Formeln.

Gegenüber den Formeln der prismatischen Systeme haben diejenigen des orthohexagonalen Systems bereits grössere Symmetrie und lassen sich auch mehr specialisiren, wobei die Constanz der beiden horizontalen Axen als das bezeichnendste Moment auftritt.

---

[1]) Vergl. Schrauf. Pogg. Ann. 1860. Sitzb. d. k. Acad. Wien 1863.

*a*) Die Lage eines Poles.

Unter der Voraussetzung des Axenverhältnisses $\sqrt{3}\,a : a : c$ wurden bereits die Winkel des Poles $P\,(hkl)$ gegen die Axen $XYZ$ oder $A$ (100), $B$ (010), $C$ (001) im §. 42, Satz 13 gegeben:

$$\begin{aligned} \cos^2 PX &= \cos^2 PA = \frac{h^2c^2}{h^2c^2 + 3k^2c^2 + 3l^2a^2} \\ \cos^2 PY &= \cos^2 PB = \frac{3k^2c^2}{h^2c^2 + 3k^2c^2 + 3l^2a^2} \\ \cos^2 PZ &= \cos^2 PC = \frac{3l^2a^2}{h^2c^2 + 3k^2c^2 + 3l^2a^2} \end{aligned} \tag{13}$$

Diese Gleichungen lassen sich etwas vereinfachen. Sei $p$ in Fig. 35 der Pol von (111), $D$ von (101), $M$ (110), so ist in Folge der Gleichung (48) und (45)

$$\sphericalangle\, XM = 60^0$$

$$\operatorname{tg} DZ = \frac{c}{a} = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

ferner aus dem Dreieck $pZD$

$$\operatorname{tg} pZ = 2 \operatorname{tg} DZ$$

somit nach der Substitution

$$c = \frac{\sqrt{3}}{2}\, M \tag{50}$$

wobei $M = \operatorname{tg}$ (001) (111).

Fig. 36.

Substituirt man diesen transformirten, von der Lage der Grundpyramide abhängig gemachten Werth der Axenverhältnisse mit gleichzeitiger Reduction von $a$ auf 1, also

$$\sqrt{3} : 1 : \frac{\sqrt{3}}{2}\, M$$

in Gleichung (13), so folgt

$$\begin{aligned} \cos^2 PX &= \cos^2 PA = \frac{M^2h^2}{M^2h^2 + 3M^2k^2 + 4l^2} \\ \cos^2 PY &= \cos^2 PB = \frac{3M^2k^2}{M^2h^2 + 3M^2k^2 + 4l^2} \\ \cos^2 PZ &= \cos^2 PC = \frac{4l^2}{M^2h^2 + 3M^2k^2 + 4l^2} \end{aligned} \tag{51}$$

welche Gleichungen somit nur mehr von der variablen Axe $Z$ abhängig sind. Zur Rechnung bequemer mögen die Tangentenformeln sein:

$$(52)\quad \begin{aligned} \operatorname{tg}^2(001)(111) &= M^2 \\ \operatorname{tg}^2(001)(hkl) &= \frac{M^2h^2 + 3M^2k^2}{4l^2} \\ \operatorname{tg}^2(100)(hkl) &= \frac{4l^2 + 3M^2k^2}{M^2h^2} \\ \operatorname{tg}^2(010)(hkl) &= \frac{4l^2 + M^2h^2}{3M^2k^2} \end{aligned}$$

*b*) Die Distanz zweier Pole.

Für die Distanz zweier Pole ist bereits die Gleichung (24) entwickelt worden

$$(24)\quad \cos PQ = \frac{hpc^2 + 3kqc^2 + 4rl}{\sqrt{\{h^2c^2 + 3k^2c^2 + 3l^2a^2\}\{p^2c^2 + 3q^2c^2 + 3r^2a^2\}}}$$

Dieselbe lässt sich mit Annahme der obigen Sätze (50) transformiren in

$$(53)\quad \cos PQ = \frac{M^2hp + 3M^2kq + 3lr}{\sqrt{\{M^2h^2 + 3M^2k^2 + 4l^2\}\{M^2p^2 + 3M^2q^2 + 4r^2\}}}$$

Für alle speciellen Fälle muss ganz analog dem prismatischen System vorgegangen werden. Es ist daher die dort durchgeführte Betrachtung der Distanz zweier Flächen in einer Zone auch hier gesetzlich, und es haben die dort entwickelten Gleichungen (34), (44), (45) hier ihre volle Wirksamkeit, mit der nöthigen Berücksichtigung der speciellen Werthe des Axenverhältnisses.

Für die Domen, welche also in den Zonen (100) (001) und (010) (001) liegen, müssen die obigen Gesetze in ihrer allgemeinen Form aufrecht erhalten bleiben, da deren Lage von der variablen Axe $Z$, also von der Wahl der Grundpyramide (111) abhängt, die Prismen der Zone (100) (010) sind hingegen von $Z$ unabhängig und deren Distanzen für alle Substanzen dieses Systemes daher constant. Es ergeben sich für die Flächen $M$ $(mno)$ und $N$ $(uvo)$ die Formeln

$$(54)\quad \begin{aligned} \cos MN &= \frac{3nv + mu}{\sqrt{m^2 + 3n^2}\sqrt{u^2 + 3v^2}} \\ \operatorname{tg}(100)(mno) = \operatorname{cotg}(010)(mno) &= \frac{\sqrt{3}.n}{m} \end{aligned}$$

Mittelst dieser Gleichungen ergeben sich für die Flächen der Zone (100) (010) folgende Winkel, welche, wie oben gesagt, für alle Vorkommnisse dieses Systems constant bleiben.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (100) (110) = 60° | 0′ | 0″ | (010) (110) = 30° | 0′ | 0″ |
| (320) = 52 | 24 | 39·8 | (230) = 23 | 24 | 47·4 |
| (430) = 49 | 6 | 23·5 | (340) = 21 | 3 | 6·2 |
| (530) = 46 | 6 | 7·6 | (350) = 19 | 6 | 23·5 |
| (210) = 40 | 53 | 36·5 | (120) = 16 | 6 | 7·6 |
| (520) = 34 | 42 | 54·2 | (250) = 13 | 0 | 14·1 |
| (310) = 30 | 0 | 0 | (130) = 10 | 53 | 36·5 |
| (410) = 23 | 24 | 37·4 | (140) = 8 | 12 | 47·5 |
| (510) = 19 | 6 | 25·2 | (150) = 6 | 35 | 12·5 |
| (610) = 16 | 6 | 7·6 | (160) = 5 | 29 | 46·9 |
| (710) = 13 | 53 | 52·3 | (170) = 4 | 42 | 53·8 |

Diese Prismendistanzen mit nahezu den einfachsten Indices sind jene, welche, ohne einen zu complicirten Zonenverband zu verlangen, dem Grundprisma von 60° eigenthümlich sind. Da nun auch im prismatischen Systeme oftmals Prismen mit nahezu 60° vorkommen, ja sogar Gruppen bestehen, welche nahezu einen Uebergang vom prismatischen ins orthohexagonale System vermitteln, so mag auch für diese der in obigen Zahlen sich aussprechende Zonenverband in Berücksichtigung gezogen werden.

*c*) Die Bestimmung des Parameter.

Die Wahl der Axenlage ist hier analog mit der im prismatischen Systeme und Fig. 25, §. 49. Die Axe $Z$ ist vertical und $X$ läuft von rechts nach links, und ist zugleich die grössere Hauptaxe.

Das constante Verhältniss der horizontalen Axen ist daher

$$X : Y = a : b = \sqrt{3} : 1. \tag{55}$$

Hiedurch wird aus der allgemeinen Gleichung (2)

$$\frac{a}{h} \cos PX = \frac{b}{k} \cos PY = \frac{c}{l} \cos PZ \tag{2}$$

mit Zuhülfenahme der Ableitung (50)

$$\frac{\sqrt{3}}{h} \cos PX = \frac{1}{k} \cos PY = \frac{\sqrt{3}M}{2l} \cos PZ \tag{56}$$

Da also hieraus ersichtlich wird, dass eben nur für die Axe ($Z$) ein variabler Werth zu ermitteln ist, so reducirt sich hier die Parameterbestimmung auf die Ermittlung von

$$M = \text{tg}\ (001)\ (111)$$

$$C = \frac{\sqrt{3}}{2} M \tag{50}$$

*d*) Die Ableitung der Indices der zu der Hauptaxe *Z* gleich geneigten Flächen.

Die Neigung aller Flächen zur Hauptaxe *Z* (001) steht unter dem Gesetze (52)

$$\operatorname{tg}^2 (001)\ (hkl) = \frac{M^2h^2 + 3M^2k^2}{4l^2}$$

somit ist zur Lösung der gestellten Frage nur die Ermittlung solcher Werthe der Variablen *hkl* nöthig, welche den Ausdruck constant erhalten

$$\frac{M^2h^2 + 3M^2k^2}{4l^2} = \frac{M^2x^2 + 3M^2y^2}{4z^2} = \text{const.}$$

Eine allgemeine Auflösung der Gleichung würde eine bedeutende Anzahl von Flächen liefern, da man aber sowohl auf den Zonenverband der Prismenflächen, als auch auf die Nothwendigkeit einfacher ganzzahliger Indices zu reflectiren hat, so wird hiedurch die Aufgabe beschränkt. Die obige Gleichung

$$\frac{h^2 + 3k^2}{4l^2} = \frac{x^2 + 3y^2}{4z^2}$$

führt nun mittelst

$$\frac{h + x}{3y + 3k} = \frac{\pm(y - k)}{\pm(h - x)}$$

zu

$$2h \pm 6k = -4x$$
$$2k \pm 2h = -4y$$

Da wir aber mit den Indices von Pyramiden rechnen, welche doppelte Zeichen der Symmetrie wegen zulassen, so ist es möglich zu reduciren. Diess führt als Lösung zu folgenden Werthen

$$(58)\qquad \begin{array}{ll} 2l = z & 2l = z \\ h + 3k = x & h + k = y \\ h - k = y & 3k - h = x \\ (k - h = -y) & (h - 3k = -x) \end{array}$$

Satz (58) gibt somit die Indices an, welche durch eine einfache Gleichung so mit einander verbunden sind, dass die durch dieselben bezeichneten Formen gleich geneigt gegen die Hauptaxe sind. Es sind diess die Formen $(hkl)$, $(h + 3k, h - k, 2l)$, $(3k - h, h + k, 2l)$; da dieselben durch den Charakter der Winkelgleichheit untrennbar sind, so erweitert sich die Symmetrie des prismatischen Systems und es entsteht eine 24flächige Gestalt mit durch (58) bestimmten Indices.

Nach Ermittlung der Indices erübrigt weiters noch zu untersuchen, welchem Gesetze die gegenseitige Neigung der Flächen unterworfen ist.

Die Lösung dieser Frage ist auf indirectem Wege, und zwar mit Zuhülfenahme der den Pyramiden entsprechenden Prismen leicht möglich. Nimmt man folgende 3, in einem Quadranten liegende und nach (58) von einander abhängige Indices $(hkl)$, $(pqr)$, $(uvw)$ an, so würde die nach (54) gebildete Gleichung

$$\frac{3kq + hp}{\sqrt{h^2 + 3k^2}\sqrt{p^2 + 3q^2}} = \frac{3kv + hu}{\sqrt{h^2 + 3k^2}\sqrt{u^2 + 3v^2}}$$

welche die Bedingung der Gleichheit der Prismendistanz (59)

$$(pqo)\,(hko) = (hko)\,(uvo)$$

involvirt, bei Annahme (58) verlangen

$$h\,(p - u) = 3k\,(v - q)$$

Substituirt man nun für $pquv$ die Werthe aus (58) für die Combinationen $x, y$, so erhält man

$$h^2 = 3k^2$$

für die Combinationen $x, -y$ oder $-x, y$ hingegen

$$6hk = 6hk$$

Aus (59) folgt somit, dass die 12 Flächen des der 12seitigen Pyramide entsprechenden Prisma zu einander nicht wechselseitig, sondern nur alternativ gleich geneigt sind; da aber die Winkel der Prisma correlativ mit denen der Pyramide sind, so ist auch bewiesen: „dass die Neigung einer Fläche der 12seitigen Pyramide zu den beiden Nachbarflächen ungleich, hingegen zu den beiden hierauf folgenden gleich ist."

*e*) Aenderungen des Axensystems.

Unter den möglichen Aenderungen des Axensystems treten besonders zwei Annahmen hervor, welche sich zugleich auch zu vollständig ausgebildeten Theorien des Systemes ausgebildet haben. Die erste Annahme *A*) besteht in der Coincidenz der drei Axen mit den Zonen des Rhomboeders $(201)\,(\bar{1}\bar{1}1)$; $(201)\,(\bar{1}11)$, $(\bar{1}\bar{1}1)\,(\bar{1}11)$ und wurde von Miller seinen Deductionen zu Grunde gelegt[1]; die zweite *B*) hingegen wählt die Normalen auf (001), (100), (110) zu den drei Axen und begründet die Schule Weiss-Naumann. Die theoretische Entwicklung der Anschauung und Vergleichung der Methoden muss einem späteren Kapitel vorbehalten bleiben.

---

[1]) Die Miller'schen Indices werden dadurch von den orthohexagonalen unterschieden, dass erstere mit ( ), letztere durch { } oder $\Sigma\,\{hkl\}$ bezeichnet sind; letztere Zeichen, die auch im pyramidalen und tessularen Systeme ihre Anwendung finden, bezeichnen den höher symmetrischen Complex $\{hkl\}$ mehrerer Gestalten $(hkl)\,(pqr)\,(uvw)$.

*A*) Sind die Axen der Zonen

$\{201\}\ \{\bar{1}\bar{1}1\},\ \{201\}\ \{\bar{1}11\},\ \{\bar{1}\bar{1}1\}\ \{111\}$

als krystallographische Axen anzunehmen (Fig. 37), so werden auch die Durchschnitte dieser Zonen dann die neuen Flächen $A'(100)\, B'(010)$, $C'(001)$ bestimmen, und zwar coincidirt

$\{201\} = (100) \quad \{\bar{1}11\} = (010) \quad \{\bar{1}\bar{1}1\} = (001)$ .

Es ergibt sich somit folgende Vergleichung zwischen $\{hkl\}$ und $(uvw)$, wobei $\xi' = \eta' = \zeta' \gtreqless 90^0$ ist.

Fig. 37.

$$h = 2u - v - w$$
$$k = v - w$$
$$l = u + v + w$$
$$2h + 2l = u$$
$$-h + 3k + 2l = v$$
$$(60) \qquad -k - 3k + 2l = w$$

*B*) Sollen hingegen die Axen $X'\ Y'\ Z'$ mit den Normalen (001), (100), (110) coincidiren, so werden bei der Transformation die Indices $a_1\ a_2\ a_3\ c$ resultiren, welche die reciproken Werthe derjenigen sind, welche die auf diese Axenannahme gestützte analytische Methode von Weiss in der Formel $\left[\frac{1}{a_1} a;\ \frac{1}{a_2} a;\ \frac{1}{a_3} a;\ \frac{1}{c} c\right]$ angibt.

Weiss nimmt noch eine dritte (Fig. 38) subsidiare horizontale Axe (die Normale auf $\bar{1}10$) $a_3$ an, welche aus den beiden übrigen durch die Gleichung

$$a_3 = a_2 - a_1$$

gebildet ist.

Coincidirt also $a_1$ mit (100), $a_2$ mit (110), $a_3$ mit ($\bar{1}10$) und $c$ mit (001), so ist, wenn $h < k$,

Fig. 38.

$$h = 2a_1 - a_2$$
$$k = a_2$$
$$l = c$$
$$(61) \qquad {}^1\!/_2(h + k) = a_1$$
$$k = a_2$$
$${}^1\!/_2(k - h) = a_3$$
$$l = c$$

Diess sind die in diesem Systeme möglicherweise vorkommenden Veränderungen von Axenlagen, welche jedesmal bei genauer Berücksichtigung der Annahme der Axenstellungen die richtigen Indices für die verschiedenen Theorien liefern. Die Erörterung letzterer bleibt dem 22. Kapitel vorbehalten.

§. 52. Gestalt und Winkel der Form $\{hkl\}$.

I. Die im prismatischen Systeme so einfache Bestimmung der Formen wird in diesem Systeme — obwohl die Gesetze ident bleiben —

sowohl durch den höheren Grad der Symmetrie, als auch durch die zahlreiche Meroedrie bedeutend complicirter und erfordert, dass dieselbe für die wichtigsten Verhältnisse speciell erörtert werde.

*A*) Holoedrie. Geht man zur Betrachtung der vorkommenden Combinationen über, so ist im orthohexagonalen Systeme analog wie im prismatischen die holoedrische Entwicklung einer Fläche durch die 8 Variationen der Vorzeichen der Indices gegeben, jedoch bewirken die dem Systeme eigenthümlichen Gleichungen (58), welche auch unter der Form

$$\begin{aligned} h' &= 3k \pm h \\ k' &= \ \ h \mp k \\ l' &= 2l \end{aligned} \qquad (62)$$

zu schreiben sind, eine bedeutend höhere Symmetrie: es sind die Flächen der 12seitigen Pyramide nicht zu trennen, und sie bilden nicht bloss mathematisch, sondern auch morphologisch ein Ganzes. Sind auch die Indices ihren absoluten Werthen nach einander nicht gleich, so verbindet sie dennoch ein einfaches mathematisches Gesetz.

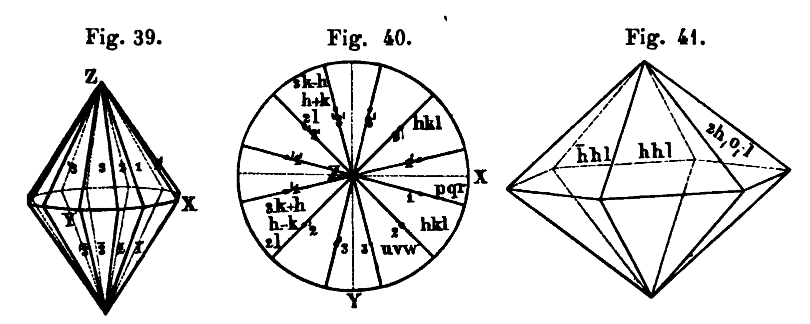



Fig. 39. Fig. 40. Fig. 41.

Die holoedrische Gestalt der Form $\{hkl\}$ ist somit die dihexagonale Pyramide mit der Gesammtzahl der vorkommenden Flächen gleich 24. (Fig. 39).

Die Projection dieser Flächen ist in Fig. 40 durchgeführt.

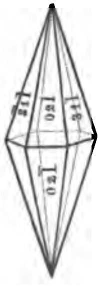
Doch bietet das Gesetz (62) selbst einige Ausnahmsfälle dar, in welchen die holoedrische Form nur die halbe Anzahl von Flächen besitzt; diese Ausnahmsfälle sind bedingt durch das Erfülltsein einer der Bedingungen

$$1)\ h = k \qquad 3)\ h = 3k$$
$$2)\ k = o \qquad 4)\ h = o$$

Die beiden ersten Bedingungen erzeugen die Form Fig. 41, Dihexaeder erster Ordnung, Protopyramiden genannt, die letzteren hingegen

die Form Fig. 42, Dihexaeder zweiter Ordnung oder Deuteropyramiden, welche um 30° oder 60° gegen erstere verwendet sind. Beide unterscheiden sich wesentlich wegen des Factors $\sqrt{3}$ in ihren Neigungen gegen die Hauptaxe.

Fig. 42.



*B*) Hemiedrie. Die dihexagonale Pyramide ist zugleich die Grundform für die hemiedrischen Ausbildungen. Die parallelflächige Hemiedrie erzeugt *a*) durch die rhomboedrische Hemiedrie $\pi$ $\{hkl\}$, wenn man sich an den gewöhnlichen Sprachgebrauch hält, Skalenoeder und Rhomboeder, *b*) durch die pyramidale $\varkappa\pi$ $\{hkl\}$, Tritopyramiden; die geneigtflächige $\varkappa$ $\{hkl\}$ hingegen die hexagonalen Trapezoeder.

Alle diese erwähnten Hemiedrien kommen in der Natur beinahe an jedem Individuum vor, und namentlich die parallelflächige unterdrückt bei manchen Substanzen die holoedrische Ausbildung vollkommen. Während also im prismatischen Systeme nur die Theorie anzudeuten genügte, ist es hier nöthig, die Bildung und Ableitung der einzelnen Formen, welche bereits feststehende Namen in der Mineralogie erlangt haben, speciell zu erörtern.

*a*) Rhomboedrische Hemiedrie $\pi$ $\{hkl\}$. Die rhomboedrische Hemiedrie tritt ein, wenn von der hexagonalen Pyramide (Fig. 39) auf der oberen und unteren Kugelhälfte je die abwechselnden Paare von Flächen $(1.1' - \bar{2}.\bar{3} - {}'2.{}'3 - {}'\bar{2}.{}'\bar{3} \ldots)$ zur Entwicklung gelangen. In Folge des Charakters dieser Hemiedrie kommen in der oberen und unteren Kugelhälfte parallele Flächen vor.

Fig. 43. Fig. 44.

Die holoedrische Stammform verwandelt sich in ein hexagonales Skalenoeder (Fig. 43 und 44). Diese zwei complementären Skalenoeder befinden sich nur in verschiedener Stellung und bilden, da sie sich durch eine Drehung um die Hauptaxe in parallele Lage bringen lassen, keinen enantiomorphen Gegensatz. Die Bezeichnung derselben ergibt sich leicht aus dem oben aufgestellten Grundsatze.

Behält man die in Fig. 40 angedeuteten Werthe der Indices fortwährend bei, so ist Fig. 43 wegen der gleichen Ausbildung des 1. und 3. und 2. und 4. Quadranten eine Combination der Flächen

$$(pqr)\ (p\bar{q}r)\quad (\bar{h}kl)\ (\bar{u}vw)\quad (\bar{h}\bar{k}l)\ (\bar{u}\bar{v}w)$$
$$(\bar{p}\bar{q}\bar{r})\ (\bar{p}q\bar{r})\quad (h\bar{k}\bar{l})\ (u\bar{v}\bar{w})\quad (hk\bar{l})\ (uv\bar{w})$$

hingegen Fig. 44 wegen der gleichen Ausbildung des 1., 2. und 3. 4. Quadranten eine Combination von

$$(uvw)\ (\bar{u}vw)\quad (\bar{p}\bar{q}r)\ (\bar{h}kl)\quad (p\bar{q}r)\ (h\bar{k}l)$$
$$(\bar{u}\bar{v}\bar{w})\ (u\bar{v}w)\quad (pq\bar{r})\ (hk\bar{l})\quad (\bar{p}q\bar{r})\ (\bar{h}k\bar{l})$$

Die für die Praxis nöthige Untersuchung dieser beiden Fälle ergibt sich von selbst, wenn man consequent jene Fläche der Bestimmung des Skalenoeders zu Grunde legt, welche dem positiven Quadranten angehört. In Folge dessen ist das Symbol von

$$\text{Fig. 43}\ \pi\ \{pqr\}$$
$$\text{Fig. 44}\ \pi\ \{uvw\}$$

Während so die Skalenoeder Hemiedrien der dihexagonalen Pyramide $\{hkl\}$ sind, haben hingegen die Proto- und Deuteropyramiden bei gleicher hemiedrischer Entwicklung andere Formen zur Folge.

Die Protopyramide $\{hkl\}$ (Fig. 41) verwandelt sich durch die meroedrische Ausbildung ihrer abwechselnden Flächen (die einzelnen Flächen sind hier äquivalent mit den Flächenpaaren bei $\{hkl\}$), in Rhomboeder (Fig. 45a, Fig. 45b).

Fig. 45a. Fig. 45b.

Die zwei von derselben Pyramide ableitbaren Rhomboeder unterscheiden sich nur durch ihre Stellung und sind durch eine Drehung von 180° um die Axe $Z$ in parallele Lage zu bringen. Fig. 45a ist eine Combination von

$$(2hol)\ (\bar{h}hl)\ (\bar{h}\bar{h}l)$$
$$(2\bar{h}o\bar{l})\ (h\bar{h}l)\ (hh\bar{l})$$

Fig. 45b von

$$(2\bar{h}ol)\ (h\bar{h}l)\ (hhl)$$
$$(2ho\bar{l})\ (\bar{h}h\bar{l})\ (\bar{h}\bar{h}l)$$

Zur Bezeichnung der Gestalt ist die bei den Skalenoedern eingeschlagene Methode beizubehalten, welche hier bei Anwendung des gleichen Symbols auf die Indices einer Proto- oder Deuteropyramide unzweifelhafte Bestimmungen erlaubt.

Unter allen in der physikalischen Mineralogie beobachteten Hemiedrien ist keine so wichtig und so häufig, wie eben die rhomboedrische, welcher die Mehrzahl der orthohexagonal krystallisirenden Substanzen unterworfen ist.

Diese erwähnten Punkte sind die Folgen der Einwirkung der rhomboedrischen Hemiedrie auf die Pyramidenflächen. Die Flächen des hexa-

gonalen Prisma bleiben in ihrer Ausbildung ungestört, nur macht sich auch hier der meroedrische Gegensatz geltend, dass die Flächen die dem auftretenden Zonenverbande angehörende physikalische Bedeutung erlangen. Dieser Gegensatz tritt besonders dann zu Tage, wenn noch durch hinzutretende Hemimorphie der Unterschied zwischen oben und unten schärfer charakterisirt wird, wie z. B. bei Turmalin, wo ein dreiseitiges Prisma erzeugt wird.

*b*) Pyramidale Hemiedrie $\pi\pi$ $\{hkl\}$. Die pyramidale Hemiedrie ist zuerst von Haidinger 1824 in seinen Untersuchungen über den Apatit aufgestellt und an diesem Mineral als charakterisirend beibehalten worden bis in die neueste Zeit, wo von G. v. Rath und Hessenberg an Apatiten von Tirol auch das Vorkommen der holoedrischen Ausbildung nachgewiesen ward.

Das Ableitungsgesetz der pyramidalen Hemiedrie ist, dass von den Flächen der dihexagonalen Pyramide (Fig. 39) die halbe Anzahl, und zwar symmetrisch die rechte oder linke, oben und unten gleichzeitig zur Entwicklung gelangen ($1.\bar{1}$ — $3.\bar{3}$ — $'2.'\bar{2}$ — $'1'.'\bar{1}'$ . . .) Es gelangen hier nicht bloss, wie bei der rhomboedrischen Hemiedrie die parallelen, sondern auch noch die gegenüberliegenden Flächen zur Ausbildung, daher das doppelte Symbol $\pi\pi$ gewählt.

Fig. 46. Fig. 47.

Es entstehen daher aus Fig. 39 die sogenannten Tritopyramiden, Fig. 43 und 44.

Ihrer Gestalt nach sind sie ähnlich Proto- oder Deuteropyramiden, welche um einen willkürlichen kleineren Winkel aus ihrer Lage durch eine Drehung um die Hauptaxe gebracht sind.

Beide Körper, Fig. 46 und 47, sind aber für sich nicht verschieden, sondern nur durch die begleitenden Flächen zu erkennen und durch eine Drehung von 90° in einander zu verwandeln. Formen dieser Art treten aber nicht selbstständig, sondern nur untergeordnet an zahlreichen Flächencombinationen auf.

Fig. 46 ist eine Combination der Flächen

$$(hkl)\ (\bar{u}vw)\ (\bar{p}qr)\ (\bar{h}\bar{k}l)\ (p\bar{q}r)\ (u\bar{v}w)$$
$$(hk\bar{l})\ (\bar{u}v\bar{w})\ (\bar{p}q\bar{r})\ (\bar{h}\bar{k}\bar{l})\ (p\bar{q}\bar{r})\ (u\bar{v}\bar{w})$$

und in Folge des Gesetzes der Symmetrie hinlänglich bestimmt durch das Symbol $\pi\pi$, angewendet auf die Fläche des positiven Quadranten, daher sich das Zeichen ergibt $\pi\pi$ $\{hkl\}$.

Fig. 47 ist gebildet aus

$$(uvw)\ (\bar{h}kl)\ (pqr)\ (\bar{p}\bar{q}r)\ (\bar{u}\bar{v}\bar{w})\ (h\bar{k}l)$$
$$(uv\bar{w})\ (\bar{h}k\bar{l})\ (pq\bar{r})\ (\bar{p}\bar{q}\bar{r})\ (\bar{u}\bar{v}\bar{w})\ (h\bar{k}\bar{l})$$

und entsteht durch Anwendung des Gesetzes auf $(pqr)$ oder $(uvw)$, daher als Symbol der Gestalt willkürlich

$$\pi\pi\ \{pqr\} \text{ oder } \pi\pi\ \{uvw\}$$

gewählt werden kann.

*c*) Trapezoedrische Hemiedrie $\varkappa\ \{hkl\}$. Der Charakter dieser Hemiedrie besteht darin, dass in der oberen und unteren Kugelhälfte nur die abwechselnden einzelnen, nicht parallelen Flächen zur Ausbildung gelangen. Fig. 39 $1.\bar{2}$. — $3.'\bar{3}$ . . . oder $2.\bar{1}$ — $'3\bar{3}$ . . . Hiedurch verwandelt sich die dihexagonale Pyramide in ein hexagonales Trapezoeder.

Die aus Einer Pyramide abgeleiteten Trapezoeder besitzen aber nicht bloss einen Gegensatz der Lage, sondern sind enantiomorph verschieden, verhalten sich wie rechts und links, und lassen sich daher durch Drehung um die Hauptaxe nicht in parallele Lage bringen; ihr charakteristisches Zeichen muss daher *rk* oder *lk* sein.

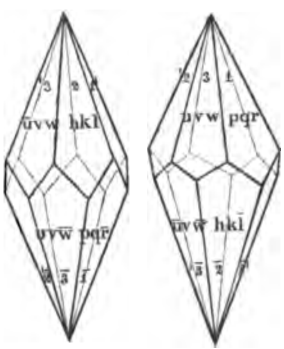
Zur Flächenbezeichnung übergehend, hat Fig. 48 als $\varkappa\ \{hkl\}$ folgende Indices:

$$(hkl)\ (\bar{u}vw)\ (\bar{p}qr)\ (\bar{h}\bar{k}l)\ (u\bar{v}w)\ (p\bar{q}r)$$
$$(pq\bar{r})\ (uv\bar{w})\ (h\bar{h}\bar{l})\ (\bar{p}\bar{q}\bar{r})\ (\bar{u}\bar{v}\bar{w})\ (h\bar{k}\bar{l})$$

hingegen Fig. 49 als $\varkappa\ \{pqr\}$ oder $\varkappa\ \{uvw\}$

$$(pqr)\ (uvw)\ (\bar{h}kl)\ (\bar{p}\bar{q}r)\ (\bar{u}\bar{v}w)\ (h\bar{k}l)$$
$$(hk\bar{l})\ (\bar{u}v\bar{w})\ (\bar{p}q\bar{r})\ (\bar{h}\bar{k}\bar{l})\ (u\bar{v}\bar{w})\ (p\bar{q}\bar{r})$$

Fig. 48. Fig. 49.




Das Vorkommen dieser Formen in der Natur ist mehrmals in Zweifel gesetzt worden, und man hat die am Quarz bisweilen beobachteten hexagonalen Trapezoeder entweder nach dem Vorgange von Naumann durch die gleichzeitige Ausbildung zweier correlativen trigonalen Trapezoeder oder nach G. Rose durch eine stattfindende Zwillingsbildung zweier gleich gedrehten Individuen zu erklären versucht. Es ist jedoch zu bemerken, dass kein Grund vorhanden ist, welcher das Vorkommen dieser einfachen hemiedrischen Gestalten unmöglich macht.

*C*) Tetartoedrie. Die vorkommenden Fälle der Tetartoëdrie sind ebenfalls in die parallel- und geneigtflächige zu trennen; erstere wird rhomboëdrisch, letztere trapezoëdrisch genannt.

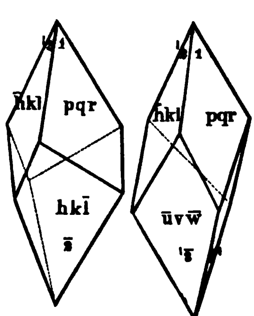
*a*) rhomboedrische Tetartoedrie $\frac{\pi}{2}\{hkl\}$. Die durch dieselbe erzeugten Formen Tritorhomboëder lassen sich ableiten sowohl durch Anwendung der Tetartoëdrie auf die dihexagonalen Pyramiden, als auch durch die der Hemiedrie auf die Skalenoeder. Wird nämlich von jedem Flächenpaare des Skalenoeders nur die rechte oder linke Fläche ausgebildet, so dass im Gegensatze zur unteren Hälfte die parallele Hemiedrie erhalten bleibt, so folgt hieraus ganz ebenso, als wenn die drei symmetrisch vertheilten Flächen der dihexagonalen Pyramide (Fig. 39) mit ihren Gegenflächen angenommen würden, jedesmal Rhomboëder, welche gegen die Hauptrhomboëder um etwas gedreht sind. Sie werden, wenn man das Bildungsgesetz

$$(hkl)\ (\bar{p}\bar{q}r)\ (u\bar{v}w)\ p\bar{q}\bar{r})\ (\bar{u}v\bar{w})\ (\bar{h}\bar{k}l)$$

bedenkt, hinreichend durch das unzweideutige Symbol $\frac{\pi}{2}\{hkl\}$ charakterisirt.

*b*) trapezoëdrische Tetartoëdrie $\frac{\pi}{2}\{hkl\}$. So wie die obige Form vom Skalenoöder, so ist diese vom Trapezoëder ableitbar. Sie entsteht, wenn von den Flächenpaaren der hexagonalen Trapezoëder symmetrisch nur eine Fläche ausgebildet ist (Fig. 39) (1.$\bar{2}$. — '2.'$\bar{1}$ — '3'$\bar{3}$'). Hier tritt aber der Gegensatz zwischen links und rechts auf, der bedeutet, „ob von den unteren Flächen die zu den oberen — rechts oder links — mehr geneigte zur Ausbildung gelangt."

Fig. 50. Fig. 51.




Die entstehenden Trapezoëder sind daher enantiomorph verschieden und müssen durch $r\frac{\pi}{2}\{hkl\}$ und $l\frac{\pi}{2}\{hkl\}$ unterschieden werden, da sie durch keine Drehung in einander zu verwandeln sind.

Als Beispiele der möglichen Entwicklungen mögen Fig. 50 und 51 dienen, von denen erstere in Analogie mit Quarz ein linkes trigonales Trapezoëder, hingegen die zweite ein rechtes ist.

Fig. 50 ist als $l\frac{\pi}{2}\{pqr\}$ eine Combination von

$$(pqr)\ (\bar{h}kl)\ (\bar{u}\bar{v}w)$$
$$(hk\bar{l})\ (\bar{p}q\bar{r})\ (u\bar{v}\bar{w})$$

Fig. 51 ist als $r \frac{\varkappa}{2} \{pqr\}$

$$(pqr)\ (\bar{u}\bar{v}w)\ (\bar{h}kl)$$
$$(p\bar{q}\bar{r})\ (\bar{h}k\bar{l})\ (\bar{u}v\bar{w})$$

Da sich nun aus der holoedrischen Form je drei rechte und drei linke trigonale Trapezoëder ableiten lassen, welche aber durch Drehung um die Hauptaxe in einander überführbar sind, so ist es hinreichend, um das Trapezoëder genau in seiner Lage zu bestimmen, den Index der Flächen anzugeben, von welchen aus das Gesetz $r, l \left(\frac{\varkappa}{2}\right)$ seinen Anfang nimmt.

Die am Quarz die Drehung der Polarisationsebene anzeigenden Flächen gehören den eben besprochenen Formen an.

Mit der Erörterung dieser Meroëdrien sind nun die wichtigsten Verhältnisse der Formen bestimmt, und es erübrigt, die Berechnung derselben anzugeben.

II. Die Berechnung und genaue Bestimmung der Flächen ist, wenn ein charakterisirender Winkel bekannt und der zu untersuchende Krystall aus einer zonen- und flächenreichen Combination besteht, durch die Gleichungen des §. 51 leicht und sicher.

Schwieriger ist hingegen die Entscheidung in solchen Fällen, wo nicht Combinationen, sondern bloss eine Fläche als vollständige Form auftritt, indem dann, wenn keine Nebenflächen bekannt sind, die Lage der Axen $a$ und $b$ erst ermittelt werden muss; es sind daher namentlich die durch die Hemiedrie sich ergebenden Formen zu erörtern.

Bei der Angabe der Winkel kann nebst der directen Berechnung nach den bekannten Formeln auch die im §. 49, Satz 47 angewendete Methode berücksichtigt werden, wobei die analogen Werthe von $H, K, L$ (Variation der betreffenden Indicesvorzeichen bei gleichbleibenden übrigen) für die anliegenden Flächen gelten.

Aus der Betrachtung der vorkommenden identischen Winkel der zusammengehörenden Formen $P\,(hkl)$, $Q\,(3k+h,\ h-k,\ 2l)$, $R\,(3k-h,\ h+k,\ 2l)$ ergibt sich unter der Voraussetzung, dass

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\,(3k+h,\ h-k,\ O)\,(100) = \frac{\sqrt{3}.(h-k)}{3k+h}.$$

$$\operatorname{tg}\ {}^1\!/_2\,(180-L) = \operatorname{tg}\ {}^1\!/_2 (hkl)\,(\bar{h}\bar{k}l) = \operatorname{tg}\,(hkl)\,(001) = \qquad (63)$$
$$= \sqrt{\frac{M^2h^2+3M^2k^2}{4l^2}}.$$

$$\sin {}^1/_2 K = \sin {}^1/_2 (3k + h, h - k, 2l)(3k + h, \bar{h} - \bar{k}, 2l) =$$
$$= \sin {}^1/_2 (hkl)(3k - h, h + k, 2l) = \cos {}^1/_2 L \sin \varphi .$$
$$\cos QX = \cos (3k + h, h - k, 2l)(100) =$$
$$= \cos {}^1/_2 (hkl)(3k - h, k + h, 2\bar{l}) =$$
$$= \cos {}^1/_2 (3k - h, k + h, 2l)(hk\bar{l}) =$$
$$= \cos {}^1/_2 (3k + h, h - k, 2l)(3k + h, \bar{h} - \bar{k}, 2\bar{l}) =$$
$$= \frac{M(h + 3k)}{2\sqrt{3M^2k^2 + M^2h^2 + 4l^2}} \tag{63}$$
$$\sin {}^1/_2 H = \sin {}^1/_2 (3k - h, h + k, 2l)(3\bar{k} - \bar{h}, h + k, 3\bar{l}) =$$
$$= \sin {}^1/_2 (hkl)(3k + h, h - k, 2l) = \cos {}^1/_2 L \cos(60 + \varphi)$$
$$\cos RY = \cos (3k - h, h + k, 2l)(010) =$$
$$= \cos {}^1/_2 (hkl)(3k + h, h - k\ 2\bar{l})$$
$$= \cos {}^1/_2 (3k - h, h + k, 2\bar{l})(3\bar{k} - \bar{h}, h + k, 2\bar{l}) =$$
$$= \cos {}^1/_2 (3k + h, h + k, 2l)(hk\bar{l}) =$$
$$= \frac{\sqrt{3}M(h + k}{2\sqrt{3M^2k^2 + M^2h^2 + 4l^2}}$$

Diese allgemeinen Winkelwerthe gelten auch für die Hemiedrien, mit den durch den Charakter derselben gebotenen Beschränkungen.

Aus dem Gange der Untersuchungen erhellt, dass immer zwei verschiedene Winkelwerthe vorhanden und diess die doppelten Winkel zweier Flächen zu den Axen sind. Diese zur Bestimmung der Indices benützend, lassen sich folgende, ganz allgemeine Gleichungen aufstellen.

$$F(X) = \cos {}^1/_2 P\overline{R} = \frac{M(3k + h)}{2\sqrt{Mh^2 + 3M^2k^2 + 4l^2}}$$
$$F(Y) = \cos {}^1/_2 P\overline{Q} = \frac{\sqrt{3}\,.\,M(h + k)}{2\sqrt{M\ h^2 + 3M^2h^2 + 4l^2}} \tag{64}$$
$$F(Z) = \cos(P, Q, R : Z) = \frac{2l}{\sqrt{M^2h^2 + 3M^2k^2 + 4l^2}}$$

Diese Winkel bilden die Grundlage, von welcher aus weiter die Distanzen $PQ$ und $QR$ ableitbar sind, und zwar wie in (63) angedeutet, durch directe Combination von $F(Z)$ mit $F(X)$ oder $F(Y)$ oder durch die Prismendistanzen der Zone (010)(100), sobald die Indices bekannt sind.

Zu berechnen sind daher die drei verschiedenen Winkel, woraus mittelst der angegebenen Gleichungen die Indices, wie auch die Lage unzweifelhaft bestimmt ist. Um einzusehen, dass letzteres der Fall ist, hat man sich nur zu vergegenwärtigen, dass nicht bloss allgemein

$$\frac{a}{h} \cos PX = \frac{b}{k} \cos PY = \frac{c}{l} \cos PZ$$

sondern im speciellen Falle des orthohexagonalen Systems für zwei Flächen auch zu gelten hat

$$\frac{1}{p} \cos PX = \frac{1}{\sqrt{3}.q} \cos QY \tag{65}$$

daher sich die Axen $X$ und $Y$ (sie besitzen ausserdem noch einen gemeinschaftlichen, von $Z$ abhängigen, irrationalen Factor) durch die Abhängigkeit von $\sqrt{3}$ unterscheiden.

Bei der Betrachtung holoedrischer Gestalten und Combinationen fällt die Schwierigkeit weg, die Lage der Axen bestimmen zu müssen, indem durch die Annahme der Grundpyramide alle übrigen Verhältnisse von selbst hieraus folgen.

Durch die vorstehenden Erörterungen dieses Paragrafes sind alle wichtigen, auf Gestalt und Winkel der Form $\{hkl\}$ bezüglichen Verhältnisse angegeben.

# XII. Kapitel.

## Pyramidales Krystallsystem.

§. 53. Der Charakter des pyramidalen Systems besteht in drei rechtwinkeligen Axen, von welchen die Parameter der horizontalen $X$, $Y$ — $a$, $b$ gleich sind.

In die allgemeine Grundgleichung des Systems

$$\frac{a}{h} \cos PX = \frac{b}{k} \cos PY = \frac{c}{l} \cos PZ$$

wird $a = b$ zu setzen sein; um dieser Form zu genügen, ist es nöthig, (vergl. pag. 98), dass die beiden ersten Glieder eine gewisse Reciprocität haben und der Permutation fähig sind, und dass mithin $\frac{1}{h} \cos PX$ und $\frac{1}{k} \cos PY$ sich nicht bloss der Reihenfolge nach auf $a$ und $b$, sondern auch durch Permutation auf $b$ und $a$ beziehen. Es muss für jeden von der Einheit verschiedenen Werth der Indices $h$, $k$ auch eine hiezu gehörige Permutation $k$, $h$ gehören, indem nur dadurch die Werthe der Parameter permutirt und möglich wird, dass $a$ und $b$ unter allen Verhältnissen immer gleiche, wenn auch doppelte Werthe besitzen.

Wir erhalten somit für das pyramidale System aus den allgemeinen Annahmen eine Symmetrie, welche höher steht, als die der prismatischen; es entspricht nämlich als vollkommen gleichwerthige, physikalische Form jeder Pyramide $(hkl)$ eine zweite $(khl)$, somit in jedem Quadranten 2 Flächen, als höchste Zahl der Symmetrie somit 16 Flächen der Form $\{hkl\}$. Die Flächen sind gegen die verticale Hauptaxe $Z$ gleich geneigt und bilden eine 8seitige Pyramide, Dioctaeder. Wie im orthohexagonalen Systeme wird auch für die symmetrische Ausbildung der Form das Zeichen $\{\}$ angewendet, zum Unterschiede von der einfachen Pyramide $(hkl)$.

§. 54. Die Entwicklung der Formeln im pyramidalen Systeme geht nach den allgemeinen, bereits im prismatischen specialisirten Sätzen vor sich, mit der Rücksicht auf die Gleichheit der Parameter.

*a*) Die Lage eines Poles.

Aus §. 42 ist bereits Satz (14) bekannt, welche directe Function darstellt

$$
\begin{aligned}
\cos^2 PX &= \cos^2 PA = \frac{h^2c^2}{h^2c^2 + k^2c^2 + l^2a^2} \\
\cos^2 PY &= \cos^2 PB = \frac{k^2c^2}{h^2c^2 + k^2c^2 + l^2a^2} \\
\cos^2 PZ &= \cos^2 PC = \frac{l^2a^2}{h^2c^2 + k^2c^2 + l^2a^2}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Aus denselben folgen zugleich für einzelne Fälle nöthig die Formeln für die Tangenten

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tg}^2 PX &= \frac{k^2c^2 + l^2a^2}{h^2c^2} \\
\mathrm{tg}^2 PY &= \frac{h^2c^2 + l^2a^2}{k^2c^2} \\
\mathrm{tg}^2 PZ &= \frac{h^2c^2 + k^2c^2}{l^2a^2}
\end{aligned}
\tag{66}
$$

*b*) Für die Distanz zweier Pole ist die Formel geltend

$$
\cos PQ = \frac{hpc^2 + kqc^2 + lra^2}{\sqrt{\{[h^2 + k^2]\, c^2 + l^2a^2\}\{[p^2 + q^2]\, c^2 + r^2a^2\}}}
\tag{25}
$$

Liegen diese Pole in einer bereits bekannten Zone, so wird für Winkel oder Indices die Gleichung (34) anzuwenden sein, nur für den speciellen Fall, dass $P$ $(hkl)$ und $Q$ $(pqr)$, in Zonen mit (100), (010), (001) liegen, ist es möglich, einfachere Formeln aufzustellen; es sind die bereits im §. 48 gegebenen:

$$
\begin{aligned}
\frac{h}{p}\,\frac{\mathrm{cotg}\, PX}{\mathrm{cotg}\, QX} &= \frac{k}{q} = \frac{l}{r} \\
\frac{h}{p} &= \frac{k}{q}\,\frac{\mathrm{cotg}\, PY}{\mathrm{cotg}\, QY} = \frac{l}{r} \\
\frac{h}{p} &= \frac{k}{q} = \frac{l}{r}\,\frac{\mathrm{cotg}\, PZ}{\mathrm{cotg}\, QZ}
\end{aligned}
\tag{44}
$$

Für die Domen, welche in den Zonen {100}{001} und {010}{001} liegen, müssen diese Formeln in ihrer allgemeinen Gestalt aufrecht erhalten bleiben, da ihre Lage immer von der variablen Grösse des Para-

unter $a$ abhängig ist; die Prismen der Zonen (100) (010) sind hingegen ganz analog wie im orthohexagonalen Systeme von $Z$ unabhängig und haben constante, voraus bestimmbare Winkel.

Es ergeben sich für $M$ $(mn0)$ und $N$ $(uv0)$

$$\cos MN = \frac{mu + nv}{\sqrt{(m^2 + n^2)(u^2 + v^2)}} \qquad \text{[illegible]}$$

$$\operatorname{tg} (100)(mn0) = \operatorname{cotg} (010)(mn0) = \frac{n}{m}$$

Mittelst dieser Gleichungen ergeben sich für die Flächen der Zone (100) (010) folgende Winkel, welche gleichsam dem Zonenverbande des Grundprisma von 45° eigen sind und für alle Vorkommnisse dieses Systems constant bleiben.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (100) (110) | (010) (110) = | 45° | 0' | 0" |
| (430) | (340) = | 36 | 52 | 12 |
| (320) | (230) = | 33 | 41 | 0 |
| (210) | (120) = | 26 | 33 | 54 |
| (310) | (130) = | 18 | 26 | 6 |
| (410) | (140) = | 14 | 2 | 10 |
| (510) | (150) = | 11 | 18 | 36 |
| (610) | (160) = | 9 | 27 | 45 |
| (710) | (170) = | 8 | 7 | 48 |

[illegible]

[illegible] im allgemeinen [illegible] wegen [illegible]

[illegible]

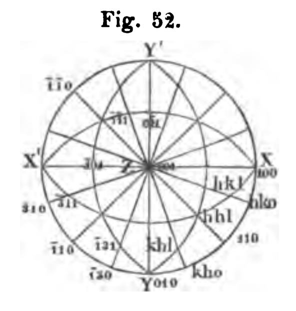
[illegible] ersten Fall [illegible]

[illegible] Parameterver- [illegible]

leichtert, doch treten durch die erhöhte Symmetrie noch einzelne Bedingungen hinzu.

Es ist daher vor Allem nöthig, nochmals die Verhältnisse der Symmetrie dieses Systems zu untersuchen. In Folge der Gleichheit der Parameter ist es nöthig, dass die Indices $hkl$ durch die Reciprocität von $hk$ physikalische und morphologische Gleichwerthigkeit erlangen, (Fig. 52), dass nicht bloss die Fläche $\alpha(hkl)$, sondern auch ihre Gegenfläche $\beta(khl)$ existiren muss. Während also die Domen $hol$, $okl$, da einer der Indices $(hk) = 0$ ist, im Systeme nur durch 4 Flächen repräsentirt werden, besitzt hingegen das Prisma $\{hko\}$ 8 Flächen, die Pyramide $\{hkl\}$, Dioctaeder genannt, 16 Flächen.

Fig. 52.




Zur Bestimmung der Winkel der Gestalten sind also nicht bloss die vom prismatischen Systeme bekannten Winkel $H$, $K$, $L$ anzugeben, sondern auch die Winkel zwischen den Flächen $(hkl)$ $(khl)$, welche aus den früheren ableitbar sind. Zur Bezeichnung dieser letzteren Winkel wähle ich ebenfalls wie bei den ersteren die Indices, mit dem einzigen Unterschiede, dass bei ersteren nur die Vorzeichen der angedeuteten Indices wechseln, während bei letzteren die Indices selbst. Sind also der Reihe nach die Winkel zwischen den Formen $\alpha$ $\beta$, je nach deren Lage in einem Quadranten in zwei anliegenden, und in zwei gegenüberliegenden mit $(HK)$, $(K\bar{H})$, $(\bar{H}\bar{K})$ bezeichnet, so ist das allgemeine Schema dieser Abkürzungen:

$$
\begin{aligned}
\cos(H) &= \cos(hkl)(\bar{h}kl) = \frac{(k^2 - h^2)c^2 + l^2a^2}{(h^2 + k^2)c^2 + l^2a^2} \\
\cos(K) &= \cos(hkl)(h\bar{k}l) = \frac{(h^2 - k^2)c^2 + l^2a^2}{(h^2 + k^2)c^2 + l^2a^2} \\
\cos(L) &= \cos(hkl)(hk\bar{l}) = \frac{(h^2 + k^2)c^2 - l^2a^2}{(h^2 + k^2)c^2 + l^2a^2} \\
\cos(HK) &= \cos(hkl)(khl) = \frac{2hkc^2 + l^2a^2}{(h^2 + k^2)c^2 + l^2a^2} \\
\cos(\bar{H}K) &= \cos(hkl)(k\bar{h}l) = \frac{l^2a^2}{(h^2 + h^2)c^2 + l^2a^2} \\
\cos(\bar{H}\bar{K}) &= \cos(hkl)(\bar{k}\bar{h}l) = \frac{l^2a^2 - 2hkc^2}{(h^2 + k^2)c^2 + l^2a^2}
\end{aligned}
\qquad (69)
$$

Sucht man indirect die Werthe der Cosinusse, so erhält man bekannte Formeln, in welche für die jeweilige Annahme von $(hk0)$ entweder $\alpha$ oder $\beta$ statt $P$ zu substituiren ist.

Aus der Annahme des Prismenwinkels

$$\operatorname{tg} Xm = \operatorname{tg}(100)(hk0) = \operatorname{tg}\varphi = \frac{k}{h}$$

folgt nämlich

$$\begin{aligned}
&\operatorname{cotg} PZ = \operatorname{cotg} \alpha Z = \operatorname{tg} {}^1/_2 L = \frac{la}{hc}\cos\varphi \\
(70)\quad &\cos PY = \cos \alpha Y = \sin {}^1/_2 K = \cos {}^1/_2 L \sin\varphi \\
&\cos PX = \cos \alpha X = \sin {}^1/_2 H = \cos {}^1/_2 L \cos\varphi
\end{aligned}$$

Die Bestimmung der Winkel $(HK)$, $(\bar{H}K)$, $(\overline{HK})$ ergibt sich leicht aus dem Zonenverbande der Fig. 52.

Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
(HK) &= [180 - (khl)(kh\bar{l})] = 2\,[90^\circ - (khl)(\bar{1}10)] \\
(\bar{H}K) &= [180 - (hkl)(kh\bar{l})] = 2\,[90^\circ - (hkl)(110)] \\
&(kho)(\bar{1}10) = 45^\circ + \varphi \\
&(hko)(110) = 45^\circ - \varphi
\end{aligned}$$

Hieraus folgt also

$$\begin{aligned}
&\sin {}^1/_2 (HK) = \cos {}^1/_2 L \cos(45^\circ + \varphi) \\
(71)\quad &\sin {}^1/_2 (\overline{HK}) = \cos {}^1/_2 L \cos(45^\circ + \varphi) \\
&\cos(\bar{H}K) = \sin^2 {}^1/_2 L.
\end{aligned}$$

Diess sind die allgemeinen Formeln der Gestalten, welche sich für die besonderen Werthe $(hhl)$, $(hko)$, $(hol)$, $(okl)$, sowie auch für die Hemieder specialisiren.

Die holoedrische Ausbildung des Systems ward bereits im Eingange dieses Paragraphes angedeutet und benöthigt nach den vorausgeschickten Theorien des prismatischen Systems keiner näheren Erörterung; wichtiger sind hingegen die wegen der höherer Symmetrie etwas häufiger auftretenden Meroedrien, welche sich wieder in parallel- und geneigtflächige unterscheiden.

Der Charakter der parallelflächigen Hemiedrie $\varkappa\{hkl\}$ besteht darin, dass von jeder Fläche ihre Gegenfläche vorkommt, bei gleichzeitiger Halbirung der Flächenanzahl. Vergleicht man die Verhältnisse mit denen beim orthohexagonalen Systeme, so erkennt man, dass die, bei diesem als rhomboedrisch bezeichnete Hemiedrie im pyramidalen Systeme fehlen muss, da auch auf der oberen Kugelhälfte die gegenüberliegenden Flächen zur Entwicklung gelangen müssen (vergl. Fig. 52, $\varkappa\{hkl\} = \alpha, {}'\beta, {}'\alpha', {}'\beta$.

Die hier also in Betracht zu ziehende parallelflächige Hemiedrie ist analog mit §. 52 *B) b)*, die pyramidale $\varkappa\varkappa\{hkl\}$. Eine geschlossene Form wird durch dieselbe nur aus dem Dioctaeder erzeugt, welcher

eine unregelmässige, gleichkantige, vierseitige Pyramide liefert mit den Indices

$$\begin{matrix} hkl & \bar{k}hl & \bar{h}\bar{k}l & \bar{h}kl \\ hk\bar{l} & \bar{k}h\bar{l} & \bar{h}\bar{k}\bar{l} & \bar{h}k\bar{l} \end{matrix}$$

Wenn $h = k$, $h = o$, $k = o$ ist, können keine geschlossenen Formen erzeugt werden; das Prisma $hko$ liefert ein vierseitiges Prisma.

Wohl ist das Vorkommen dieser pyramidalen hemiedrischen Formen als selbstständig nicht beobachtet, allein einzelne Mineralien, wie Scheelblei, Tungstein, Fergusonit sind in allen ihren zahlreichen Combinationen dieser Hemiedrie unterworfen.

Gehen wir zur geneigtflächigen Hemiedrie über, so liefert dieselbe analog den Verhältnissen des prismatischen Systems Tetraeder, und zwar in Rücksichtnahme auf die Zonen (100) (001) oder (001) (111); allein jede Fläche dieser Zonen kann man sich wieder in zwei Flächen zerfällt denken, gleichsam als Combination zweier Flächen, deren Neigung 0 ist, und so können tetraederähnliche Gestalten resultiren, deren Flächenanzahl 8 ist.

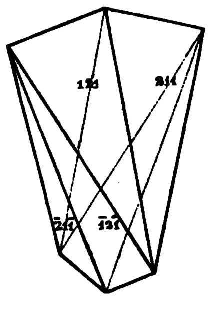


Fig. 53.

Je nachdem nun die Zonnen (001) (111) oder (001) (000) zur Entwicklung gelangen, unterscheiden sich diese Hemieder durch ihre Lage, welche gleichsam um eine Drehung von 45$^0$ von einander verschieden ist.

Gelangt die Zone (001) (111) zur Entwicklung, so wird der dadurch entstehende achtseitige Tetraeder, Fig. 53, $\varkappa\{hkl\}$ Sphenoid genannt, eine Combination der Flächen

$$\begin{matrix} hkl & khl & \bar{k}\bar{h}l & \bar{h}\bar{k}l \\ \bar{k}h\bar{l} & \bar{h}k\bar{l} & h\bar{k}\bar{l} & k\bar{h}l \end{matrix}$$

hingegen bei Entwicklung der Zone (001), (100) $\varkappa\{hkl\}$

$$\begin{matrix} khl & \bar{k}hl & \bar{k}\bar{h}l & k\bar{h}l \\ hkl & h\bar{k}l & \bar{h}\bar{k}\bar{l} & \bar{h}k\bar{l} \end{matrix}$$

Analog der trapezoëdrischen Hemiedrie des orthohexagonalen Systems existirt auch im pyramidalen Systeme eine geneigtflächige Hemiedrie $\varkappa\pi\{hkl\}$, welche sich von der früheren dadurch unterscheidet, dass nicht die anliegenden Flächenpaare, sondern in abwechselnder Reihenfolge die Flächen der oberen und unteren Quadranten zur Entwicklung gelangen. Da hiebei, wieschon bei $\pi\{hkl\}$ erwähnt, wegen der Symmetrie des Systemes die in einer Kugelhälfte gegenüberliegenden Flächen zur Entwicklung gelangen, so habe ich das Zeichen $\varkappa\pi\{hkl\}$ angenommen.

Die Symbole für Fig. 54 als $\varkappa\pi\{hkl\}$ sind

Fig. 54.

$$\begin{array}{cccc} hkl & \bar{k}hl & \bar{h}\bar{k}l & k\bar{h}l \\ h\bar{k}\bar{l} & kh\bar{l} & \bar{h}k\bar{l} & \bar{k}\bar{h}\bar{l} \end{array}$$

Die geneigtflächige Hemiedrie kommt in der Natur am Edingtonit und Kupferkies vor.

Die Winkel der hemiedrischen Formen ergeben sich leicht aus dem Zonenverbande und der Berücksichtigung, dass $\varkappa . \pi\{H, K, L\} = 180 - H, K, L$ ist.

Ausser diesen hemiedrischen Gestalten lassen sich noch aus der Form $\varkappa\pi\{hkl\}$ die Tetartoeder $\frac{\pi}{2} hkl$ ableiten. Es sind diess tetraederähnliche Gestalten, welche sich von den Hemiedern $\varkappa\pi(h o l)$ oder $\varkappa\pi(hhl)$ nur durch ihre Stellung gegen die Axe unterscheiden. Ihre theoretische Entwicklung ist wegen ihrer minderen Bedeutung nicht nöthig, wie überhaupt die holoedrische Ausbildung im pyramidalen Systeme überwiegt und gegenüber den Verhältnissen des orthohexagonalen Krystallsystems die Vorkommnisse der Hemiedrie in der Natur nur auf einzelne, obwohl prägnante Fälle beschränkt ist.

# XIII. Kapitel.

## Tessulares Krystallsystem.

§. 56. Das tessulare Krystallsystem ist der letzte specielle Fall, welchen wir als von drei senkrechten Axen ableitbar dargestellt haben. Es vereinigt die höchste Symmetrie und den hiedurch hervorgebrachten grössten Flächenreichthum mit der mathematischen Einfachheit der Berechnung und der Gleichheit der Parameter.

Sowie im pyramidalen Systeme wegen der Gleichheit zweier Parameter für jede Fläche eine Gegenfläche existiren muss, da nur auf solche Weise der allgemeinen Gleichung (2) entsprochen werden kann, so ist es hier nöthig, dass, um die Gleichheit aller drei Parameter hervorzubringen, für jedes $(hkl)$ auch die vollständigen Permutationen

$$hkl,\ hlk,\ khl,\ klh,\ lhk,\ lkh$$

in die Gleichung (2) substituirt werden können, damit hiedurch eine Permutation der Parameter $a : b : c$ erzielt und die Gleichheit derselben erzeugt werde.

Jeder Fläche somit, welche gegen die Axen bestimmte Neigung hat, entsprechen 5 andere, welche analoge Lage gegen die übrigen Combinationen der Axen haben, und diese sich gegenseitig bedingenden Flächen $(hkl)$ werden in holoedrischer Entwicklung des Systems als Flächen gleichsam einer physikalischen Form $\{hkl\}$ angesehen und bei Anführung der Form implicirt verstanden, wie diess auch im orthohexagonalen und pyramidalen Systeme der Fall ist.

Es ist im tessularen Systeme eine sechsmal höhere Symmetrie als im prismatischen Systeme vorhanden, und die vollflächigste Form muss 48 Flächen haben, welche entstehen durch die Permutation der Vorzeichen der Indices der 6 Flächen:

$$\begin{array}{cccccc}
hkl & hlk & khl & klh & lhk & lkh \\
hkl & h\bar{l}k & k\bar{h}l & k\bar{l}h & l\bar{h}k & l\bar{k}h \\
\bar{h}kl & \bar{h}lk & \bar{k}hl & klh & \bar{l}hk & \bar{l}kh \\
\bar{h}\bar{k}l & \bar{h}\bar{l}k & \bar{k}\bar{h}l & \bar{k}\bar{l}h & \bar{l}\bar{h}k & \bar{l}\bar{k}h \\
hk\bar{l} & hl\bar{k} & kh\bar{l} & kl\bar{h} & lh\bar{k} & lk\bar{h} \\
hk\bar{l} & h\bar{l}\bar{k} & \bar{k}h\bar{l} & k\bar{l}\bar{h} & l\bar{h}\bar{k} & l\bar{k}\bar{h} \\
\bar{h}k\bar{l} & \bar{h}l\bar{k} & \bar{k}h\bar{l} & kl\bar{h} & \bar{l}h\bar{k} & \bar{l}k\bar{h} \\
\bar{h}\bar{k}\bar{l} & \bar{h}\bar{l}\bar{k} & \bar{k}\bar{h}\bar{l} & \bar{k}\bar{l}\bar{h} & \bar{l}\bar{h}\bar{k} & \bar{l}\bar{k}\bar{h}
\end{array}$$

Während nun diess System erhöhte Symmetrie und Anzahl der Flächen besitzt, ist hingegen andererseits die Entwicklung der mathematisch verschiedenen Flächencombinationen beschränkt; ganz verschieden nämlich von dem prismatischen Systeme ist die Wahl der Grundpyramide nicht mehr frei und willkürlich, sondern durch die Gleichheit der Parameter bereits im Voraus bestimmt, da sie gegen jede der drei Axen gleich geneigt sein muss. Die Grundform (111) des Systems (Fig. 5) hat den Namen Octaeder und coincidirt mit der mathematischen Form gleichen Namens.

Wir haben also im Gegensatze zum prismatischen Systeme, wo jede Mineralspecies das System durch seine individuellen Parameter specialisirt ist, hier nur eine Grundform, auf welche alle Gestalten der den Systemen angehörenden Substanzen zurückführbar sind. Hiedurch werden die Berechnungen der Beobachtungen vereinfacht, da die Theorie für alle vorkommenden Gestalten die Gesetze und Winkel im Voraus anzugeben vermag.

§. 57. Entwicklung der Formeln.

*a*) Die allgemeinen Formeln, welche die Distanz eines Poles von den Krystallaxen angeben, wurden bereits im §. 42 entwickelt:

$$\text{(15)} \qquad \begin{aligned} \cos^2 PX &= \cos^2 PA = \frac{h^2}{h^2+k^2+l^2} \\ \cos^2 PY &= \cos^2 PB = \frac{k^2}{h^2+k^2+l^2} \\ \cos^2 PZ &= \cos^2 PC = \frac{l^2}{h^2+k^2+l^2} \end{aligned}$$

Da diese Winkel bloss von den Indices abhängig sind, so kann für jede beliebige ($hkl$) dieselbe voraus bestimmt werden. Von entscheiden der Wichtigkeit ist nur der Werth des Octaeders $O$ (111)

$$\text{(72)} \qquad \begin{aligned} \cos OX &= \cos OY = \cos OZ = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cos OX &= \cos OY = \cos OZ = 54^0\, 44'\, 8''. \end{aligned}$$

Für die übrigen Fälle können nachfolgende Gleichungen gelten:
Für $D$ (110) ist

$$\cos DX = \cos DY = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad DX = DY = 45^0$$

$$\cos DZ = o \quad DZ = 90^0. \tag{73}$$

Für $F$ $\{hko\}$ ist

$$\operatorname{tg} FX = \operatorname{cotg} FY = \frac{k}{h}$$

Für die specialisirten Werthe der Pyramide $P$ $\{hkl\}$, nämlich für $J$ $\{hkk\}$ und $G$ $\{hhk\}$, wobei $h > k$, ist:

$$\begin{aligned} \cos JX &= \frac{h}{\sqrt{h^2 + 2k^2}} \\ \cos GX &= \frac{h}{\sqrt{2h^2 + k}} \end{aligned} \tag{74}$$

*b)* Die Distanz zweier Pole ist durch die Gleichung (26) bestimmt.

$$\cos PQ = \frac{hp + kq + lr}{\sqrt{(h^2 + k^2 + l^2)(p^2 + q^2 + r^2)}} \tag{26}$$

Wie oben soll auch hier versucht werden, die Distanzen der Flächen von (111) und (110) anzugeben.

$$\begin{aligned} \cos DO &= \cos (110)(111) = \sqrt{\frac{2}{3}} \qquad DO = 35^0\ 15'\ 52'' \\ \cos FO &= \cos (hko)(111) = \frac{h + k}{\sqrt{3}\,.\,\sqrt{h^2 + k^2}} \\ \cos FD &= \cos (hko)(110) = \frac{h + k}{\sqrt{2}\,\sqrt{h^2 + k^2}} \end{aligned} \tag{75}$$

Für die pyramidalen Formen: $P$ $\{hkl\}$, $J$ $\{hkk\}$, $G$ $\{hhk\}$ hingegen gelten folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \cos PO &= \cos (hkl)(111) = \frac{h + k + l}{\sqrt{3}\,\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} \\ \cos PD &= \cos (hkl)(110) = \frac{h + k}{\sqrt{2}\,\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} \\ \cos JO &= \cos (hkk)(111) = \frac{h + 2k}{\sqrt{3}\,\sqrt{h^2 + 2k^2}} \\ \cos JD &= \cos (hkk)(110) = \frac{h + k}{\sqrt{2}\,\sqrt{h^2 + 2k^2}} \end{aligned} \tag{76}$$

$$\cos GO = \cos (hhk)\,(111) = \frac{2h + k}{\sqrt{3}\,\sqrt{2h^2 + k^2}}$$

$$\cos GD = \cos (hhk)\,(110) = \frac{h + k}{\sqrt{2}\,\sqrt{2h^2 + k^2}}$$

Die Distanz zweier Pole in einer Zone ist den bekannten Regeln unterworfen, welche hier keine Modification erleiden; und es ist daher auf die Sätze (34), (44), (45) zu verweisen.

Die Bestimmung des Parameters entfällt in diesem Systeme. Aenderungen des Axensystems sind ebenfalls kaum zulässig, da die Symmetrie zu prägnant auftritt, und es verdient nur der einzig mögliche Fall, nämlich der Uebergang zu drei gleich grossen schief geneigten Axen (zu rhomboedrischen Axen Miller's, §. 51 *e*) Erwähnung.

Es werden hiedurch die Flächen (110), ($\bar{1}$10), (011) in die Flächen (100), (010), (001) transponirt, und die Parameter $a'$ $b'$ $c'$ des neuen Axensystems $X'$ $Y'$ $Z'$ sind gleich, sowie auch die Axenneigungen

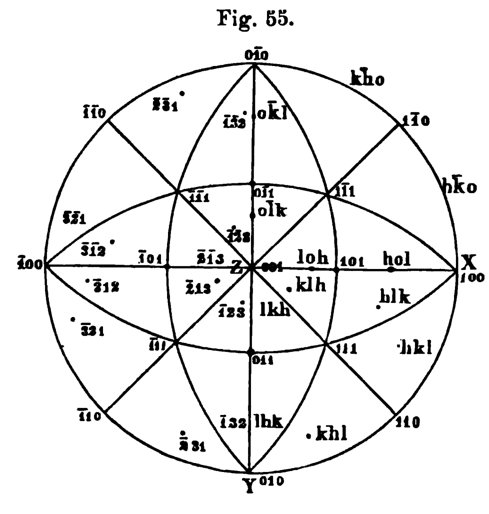
$$\xi' = \eta' = \zeta' \gtreqless 90^0$$

Diese Axenänderung, welche keine praktische Verwendung hat, muss erwähnt werden, da sie mehreren theoretischen Untersuchungen zu Grunde liegt.

§. 58. Gestalt und Winkel der Form $\{hkl\}$.

Die holoedrische Form $\{hkl\}$ ist begrenzt von all den Flächen, deren Symbole durch die möglichen Permutationen der Indices entstehen. Die Gesammtzahl derselben ist somit wie in §. 56 ermittelt 48. Diese Zahl vereinfacht sich indessen durch Specialisirung der Werthe $h, k, l$. Sind zwei der Indices gleich oder einer derselben gleich Null ($hkk$, $hhl$, $hko$), so ist die Zahl der nur mehr möglichen Permutationen 24; sind zwei Indices gleich und der dritte = 0 (110, 011, 101), so sind 12 Flächen, wenn alle 3 Indices gleich (111), 8 Flächen, und wenn 2 Indices gleich Null, 6 Flächen möglich.

Fig. 55.




Nehmen wir an, dass $h > k > l$ ist, so zeigt Fig. 55 die Vertheilung der Flächenpole auf der Projectionssphäre.

Wegen der grossen Anzahl der Flächen erreicht auch die Hemiedrie in diesem Systeme eine bedeutende Ausbildung, und beinahe jede der oben erwähnten Hauptformen vermag Anlass zur Bildung einer abgeleiteten hemiedrischen Gestalt entweder nach den Gesetzen der parallelflächigen $\pi\{hkl\}$ oder geneigtflächigen $\varkappa(hkl)$ Meroedrie zu geben.

Da die hemiedrischen Formen in dieser Beziehung inniger mit ihren Grundformen verwebt sind, als in einem der früheren Systeme, so wurden gegen den früheren Gebrauch beide gleichzeitig erörtert, um die Ableitung der Gestalten ersichtlich zu machen.

Diess ist um so mehr der Fall, da ja die Grundformen selbst, durch die eigenthümlichen, im §. 57 bereits erwähnten Winkelverhältnisse, nicht absolut variable Gestalten sein können, sondern ihr Typus bereits durch die Grundbedingung des Systems unveränderlich festgestellt ist.

Man hat daher diese Grundformen bereits seit langem in ihren Details studirt und alle ihre Winkel bestimmt, so dass die vorkommenden Fälle bereits im Voraus erledigt sind; analog hiermit wurden diese Grundgestalten aber auch mit eigenthümlichen Namen belegt, um einen kurzen bezeichnenden Ausdruck für den unter allen Verhältnissen constanten Körper zu gewinnen.

Wohl wechselten diese Namen mit den Schulen, doch haben die der griechischen Sprache entlehnten das Uebergewicht erlangt und werden im Folgenden beibehalten.

Die im tesseralen Systeme vorkommenden Winkel sind ihrer Constanz zu Folge bereits voraus bestimmbar und werden daher auch im Nachfolgenden bei jeder Form angeführt werden. Die charakteristischen Winkel werden durch die Combination zweier verschiedenen, jedoch zur identen Form $\{hkl\}$ gehörenden Flächen gebildet und analog den früheren Systemen bezeichnet.

$$\sphericalangle H = \sphericalangle K = \sphericalangle L$$
$$(HK) = (hkl)\,(khl)$$
$$\varkappa(H) = (180 - H)$$
$$(KL) = (hkl)\,(hlk) = (klh)\,(lkh) = (khl)\,(lhk)$$
$$\pi(HKL) = (hlk)\,(khl) = (khl)\,(lkh).$$

Um diese Winkel an den einzelnen Figuren zu bezeichnen, so wurden für dieselbe nach ihrem Vorkommen an den einzelnen Grundgestalten die Anfangsbuchstaben letzterer gewählt, so dass

$H = o$ (Octaeder)
$(HK) = h$ (Hexaeder)
$\varkappa(H) = t$ (Tetraeder)
$(KL) = d$ (Dodecaeder)
$\pi(HKL) = p$ (Pentagondodecaeder)

bezeichnet ist; die an den complicirten Formen beobachteten Winkel lassen sich auf diese zurückführen.

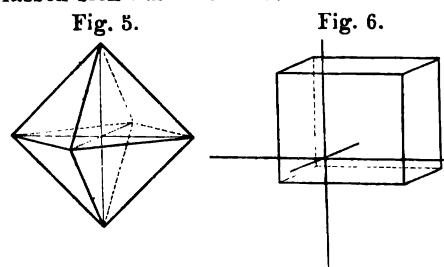


Fig. 5. Fig. 6.

Die einfachste Form (Fig. 6) des Systems ist $\{100\}$. Die Anzahl der Flächen ist 6 und bilden dieselben den mathematischen Würfel Hexaeder:

$$\cos(HK) = 1 \quad (HK) = 90^0.$$

In Hinsicht der Flächenzahl reiht sich dem Hexaeder der Octaeder an, gebildet durch die Flächen der Form (111)

$$\cos(H) = 1/3 \quad H = 70^0\,31'\,43''6$$

Der Octaeder erlaubt doppelte Hemiedrie. Die parallelflächige Meroedrie erzeugt jedoch keinen geschlossenen Körper — wie bei den früheren Systemen bereits erwähnt — hingegen liefert die geneigtflächige $\varkappa$ (111), ein den prismatischen Sphenoiden analogen Körper, hier reguläres Tetraeder genannt.

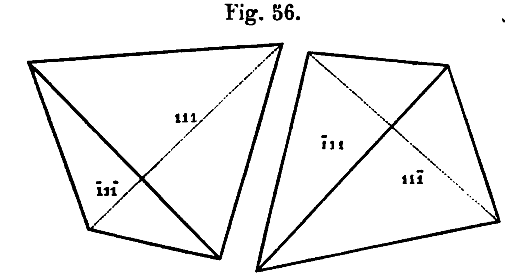


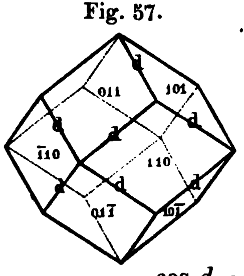

Fig. 56.

Die Form $\varkappa$(111) wird zugleich in directe oder inverse unterschieden, je nachdem der Quadrant $XYZ$ oder $-X$, $Y$, $Z$ zur Ausbildung gelangt. Die beiden Formen verhalten sich zugleich wie Bild und Spiegelbild oder rechts und links, und lassen sich nicht durch Drehung von 180° in einerlei Lage bringen. Der Tetraederwinkel ist

$$\varkappa(H) = 180 - H = 109^0\,28'\,16'' \quad \cos\varkappa(H) = -1/3$$

Die Form $\{110\}$, Dodecaeder genannt, wird von 12 Flächen gebildet (die Flächen haben die Form von Rhomben, daher auch Rhombendodecaeder). Der Dodecaeder stumpft die Kanten des Würfels ab, während andererseits dessen Kanten durch das Octaeder abgestumpft werden. Das Dodecaeder tritt in allen seinen Hemiedrien immer auf der vollen Flächenzahl auf, da die hemiedrischen Hälften in der Lage der Hauptflächen bleiben und sich dann zur ganzen Grösse der ursprünglichen Flächen erweitern, indem keine Verschiebung der Zonen eintritt. Der Dodecaederwinkel beträgt

Fig. 57.




$$\cos d = \cos(KL) = 1/2 \qquad (KL) = 60^0.$$

Die nächst einfache Gestalt in Rücksicht auf die Symbolik ist die Form $\{hko\}$, $h > k$, welche sowohl holoedrisch als auch hemiedrisch in zahlreichen wichtigen Fällen vorkommt.

Die holoedrische Form $\{hko\}$ wird (Fig. 58) durch 24 Flächen gebildet, welche als gleichseitige Dreiecke je 4 über einer Würfelfläche

Fig. 58.

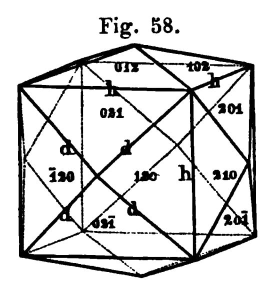
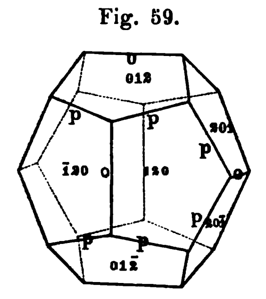


Fig. 59.



liegen, daher der Name Tetrakishexaeder abgeleitet ist. Charakteristische Winkel sind, die in der Richtung der Hexaeder und die in der Richtung der Dodecaederkanten laufenden Zwei, wobei also

$$h = (hko)\ (kho) \qquad d = (hko)\ (hok).$$

Die Formeln für diese Winkel sind:

$$\left.\begin{aligned} \cos h &= \cos\,(HK) = \frac{2hk}{h^2 + k^2} \\ \cos d &= \cos\,(KL) = \frac{h^2}{h^2 + k^2} \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Sicher bestimmt sind folgende Tetrakishexaeder:

| | $(HK)$ | $(KL)$ |
|---|---|---|
| 510 | $= 67^0\ 22'$ | $= 15^0\ 57'$ |
| 410 | $61^0\ 55'$ | $= 19^0\ 45'$ |
| 310 | $53^0\ 7'$ | $= 25^0\ 50'$ |
| 520 | $46^0\ 23'$ | $= 30^0\ 27'$ |
| 210 | $36^0\ 52'$ | $= 36^0\ 52'$ |
| 320 | $22^0\ 37'$ | $= 46^0\ 11'$ |
| 430 | $16^0\ 16'$ | $= 50^0\ 12'$ |
| 540 | $12^0\ 40'$ | $= 52^0\ 26'$ |

In den geneigtflächig hemiedrischen Combinationen erscheint der Tetrakishexaeder mit der vollen Flächenanzahl, da durch diese Meroedrie von jeder Fläche eben nur die Hälfte wegfällt, welche sich wieder in der Ausbildung ergänzt.

In den parallelflächig hemiedrischen Combinationen erscheint hingegen das Tetrakishexaeder mit der halben Flächenanzahl, und diese

Form $\pi\{hko\}$ wird (Fig. 59) Pentagondodecaeder (dem Vorkommen am Pyrit zuliebe auch Pyritoid) genannt. Die Lage der Flächenpaare ist an dem Körper so, dass dieselben je zwei immer eine der Hexaederkante parallele Kante bilden, welcher jedoch nicht das Symbol des Winkels $h = (HK)$, sondern $o = (H)$ zukommt, da diese Kanten immer von einer Fläche, z. B. $(hok)$ $(ho\bar{k})$ gebildet werden. Die von den Kanten $o$ beginnenden und je ein Dreieck bildenden Kanten, z. B. der Flächen $(hok)$ $(okh)$ — $(hok)$ $(kho)$ — $(kho)$ $(okh)$, also $\pi(HKL)$ ist dem Körper eigenthümlich, daher mit $p$ bezeichnet.

Die Winkel sind für $\pi(hko)$, wobei $h > k$

$$\cos o = \cos (H) \quad = \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2}$$

(78)

$$\cos p = \cos \pi(HKL) = \frac{hk}{h^2 + k^2}$$

Die Winkel der sicher beobachteten Pentagondodecaeder sind:

| | $(H)$ | | $\pi(HKL)$ | |
|---|---|---|---|---|
| 410 | = 28° | 4′ | = 76° | 33′ |
| 310 | = 36 | 52 | = 72 | 33 |
| 520 | = 43 | 36 | = 69 | 50 |
| 730 | = 46 | 24 | = 68 | 46 |
| 210 | = 53 | 7 | = 66 | 21 |
| 320 | = 67 | 22 | = 62 | 30 |
| 430 | = 73 | 44 | = 61 | 18 |
| 540 | = 77 | 20 | = 60 | 48 |
| 650 | = 79 | 37 | = 60 | 32 |

An diese bisher betrachteten Körper schliessen sich nun die pyramidalen Formen an. Der allgemeinste Fall $\{hkl\}$ hat, wie öfters erwähnt, 48 Flächen; diese Gesammtzahl der Permutationen der Indices wird jedoch vermindert für den Fall, dass zwei der letzteren ident sind. Diese letztere Voraussetzung erzeugt nun wieder, je nachdem der grössere oder kleinere Index duplirt ist, zwei Reihen von Gestalten, welche von einander verschieden sind.

Unter der Voraussetzung, dass $h > k$, wird die Form $\{hkk\}$ durch 24 Flächen gebildet (Fig. 60), welche als symmetrische Trapezoeder über den Seiten der Octaeder liegen, so dass die Octaederkanten immer von zwei Kanten $o = (H)$, hingegen die Hexaederkanten $h = (HK)$ durch drei Kanten repräsentirt werden, welche in der Mitte der Octaederfläche ein dreiseitiges Eck bilden.

Die Gestalt hat der Flächenanzahl nach den Namen Ikositetraeder (dem Vorkommen am Leucit zufolge auch Leucitoid) erhalten.

Die Formeln für die zwei charakteristischen, in Octaeder- oder Hexaederkanten liegenden Winkeln sind

$$\begin{aligned} \cos o = \cos \; (H) &= \frac{h^2}{h^2 + 2k^2} \\ \cos h = \cos (HK) &= \frac{2hk + k^2}{h^2 + 2k^2} \end{aligned} \qquad (79)$$

Für die bisher beobachteten Ikositetraeder gelten in Folge dessen folgende Winkelwerthe:

| | $(H)$ = | | $(HK)$ = | |
|---|---|---|---|---|
| 16.1.1 | 7° | 8′ | 82° | 39′ |
| 10.1.1 | 11 | 22 | 78 | 7 |
| 6.1.1 | 18 | 40 | 69 | 59 |
| 5.1.1 | 22 | 22 | 65 | 57 |
| 4.1.1 | 27 | 15 | 60 | |
| 3.1.1 | 35 | 5 | 50 | 28 |
| 5.2.2 | 40 | 45 | 43 | 21 |
| 2.1.1 | 48 | 11 | 33 | 33 |
| 3.2.2 | 58 | 2 | 19 | 45 |
| 4.3.3 | 61 | 56 | 13 | 56 |

Der Ikositetraeder (Fig. 60) erscheint in den parallelflächig hemiedrischen Combinationen mit der vollen Flächenzahl, in der geneigtflä-

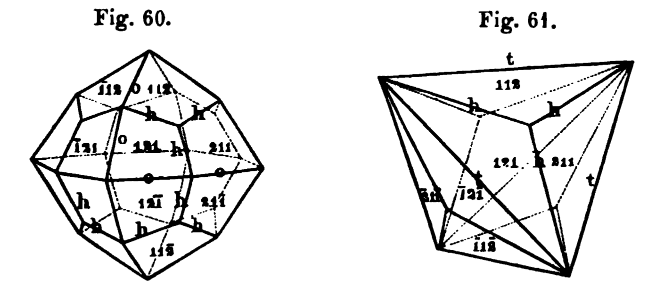


Fig. 60. Fig. 61.

chigen hingegen mit der halben Flächenanzahl und bildet als $\varkappa\{hkk\}$ einen neuen Körper, welcher tetraedische Formen besitzt, wobei aber jede Fläche des regulären Tetraeders durch drei Flächen der Form $\{hkk\}$ gebildet wird (Fig. 61).

Für die Form $\varkappa\{hkk\}$, Triakistetraeder oder Trigondodecaeder genannt, sind somit die bildenden Flächen gleichschenkelige Dreiecke, deren längere Grundlinien mit den Tetraederkanten $t = \varkappa(H)$ zusammenfallen, während die Kanten der Schenkel mit den Hexaederkanten $h = (HK)$ correspondiren. Für die Winkelwerthe dieser Kanten gelten die Formeln

$$\text{(80)} \qquad \begin{aligned} \cos t &= \cos \varkappa (H) = \frac{h^2 - 2k^2}{h^2 + 2k^2} \\ \cos h &= \cos (HK) = \frac{2hk + k^2}{h^2 + k^2} \end{aligned}$$

woraus für nachfolgende, bisher beobachtete Gestalten die Werthe berechnet sind

| | $\varkappa(H)$ | $HK$ |
|---|---|---|
| 511 | $= 31^0\ 35'$ | $= 65^0\ 57'$ |
| 411 | $= 38\ \ 56$ | $= 60\ \ \ 0$ |
| 311 | $= 50\ \ 28$ | $= 50\ \ 28$ |
| 211 | $= 70\ \ 31$ | $= 33\ \ 33$ |
| 322 | $= 86\ \ 37$ | $= 19\ \ 45$ |

Analog mit der Form $\{hkk\}$ erzeugt auch die Form $\{hhk\}$ $h > k$ nur eine 24flächige Gestalt, welche sich von der früheren nur durch die Lage derselben im Raumquadranten (Fig. 55) unterscheidet.

Während ferner bei dem Ikositetraeder die drei auf jeder Octaederfläche ein Eck bildenden Flächen Trapezoeder sind, so sind dieselben hier gleichschenkelige Dreiecke, deren Kanten in der Richtung der Dode-

Fig. 62.

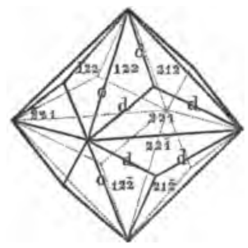
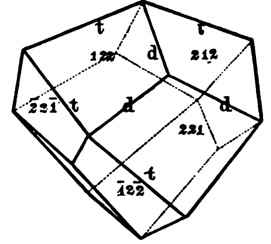


Fig. 63.



caederkanten $d$ $(KL)$ laufen. Die Octaederkante $o$ $(H)$, welche bei der früheren Gestalt aus zwei Kanten zusammengesetzt erscheint, ist hier einfach und umgebrochen.

Der Gestalt nach, welche aus drei Dreiecken über jeder Octaederfläche (Fig. 62) besteht, ward der Name Triakisoctaeder gewählt.

Für die Form $\{hhk\}$ gelten die Formeln

$$\text{(81)} \qquad \begin{aligned} \cos o &= \cos (H) = \frac{2h^2 - k^2}{2h^2 + k^2} \\ \cos d &= \cos (KL) = \frac{h^2 + 2hk}{2h^2 + k^2} \end{aligned}$$

woraus sich für die bekannten Gestalten nachfolgende Winkel berechnen.

| | | |
|---|---|---|
| 332 | $H = 50^0\ 28'\ 44''$ | $(KL) = 17^0\ 20'\ 30''$ |
| 221 | $= 38\ \ 56\ \ 33$ | $= 27\ \ 15\ \ 58$ |
| 331 | $= 26\ \ 31\ \ 50$ | $= 37\ \ 51\ \ 49$ |

Das Triakisoctaeder erscheint in der parallelflächigen Hemiedrie mit der vollen Flächenanzahl, die geneigtflächige hingegen erzeugt einen neuen, tetraederähnlichen Körper $\varkappa\{hhk\}$: Deltoiddodecaeder, welcher durch 12 Trapezoidflächen gebildet wird, deren je 3 über einer Tetraederfläche (Fig. 63) liegen. Die Kanten correspondiren somit mit den Tetraederkanten $t = \varkappa(H)$ und mit Dodecaederkanten $d$ $(KL)$, welche in dem Ecke über die Tetraederfläche zusammenlaufen.

In Folge der Formeln

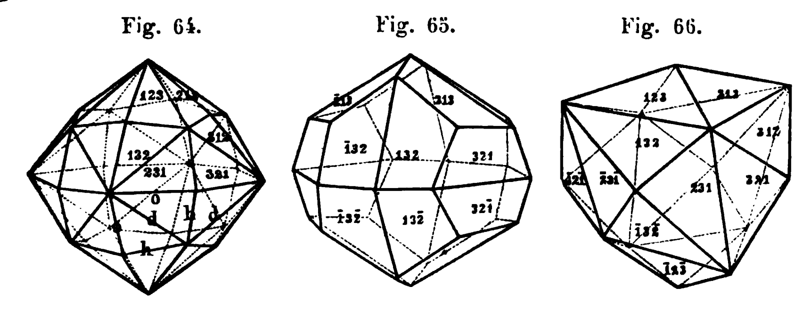
$$\left.\begin{aligned} \cos t &= \cos \varkappa(H) = \frac{h^2 - 2hk}{2h^2 + k^2} \\ \cos d &= \cos (KL) = \frac{h^2 + 2hk}{2h^2 + k^2} \end{aligned}\right\} \qquad (82)$$

leiten sich folgende Werthe der Winkel ab:

| | | |
|---|---|---|
| 232 | $\varkappa(H) = 97^0\ 50'\ 15''$ | $(KL) = 17^0\ 20'\ 30''$ |
| 221 | $= 90$ | $= 27\ \ 15\ \ 58$ |
| 331 | $= 80\ \ 54\ \ 55$ | $= 37\ \ 51\ \ 49$ |

Schliesslich gelangen wir zur vollflächigen Form $\{hkl\}$, welche durch 48 Flächen (Tetrakontaoctaeder), deren je 8 in einem Octanten liegen, gebildet wird.

Fig. 64. Fig. 65. Fig. 66.



Je nach den Werthen der Indices $(hkl)$ ändert sich auch in etwas der äussere Habitus dieser Form, so dass man dieselbe, wie auch der jeweilige Name aussagt, entstanden denken kann durch 6 Flächen über je einer Octaederfläche, Hexakisoctaeder, oder 8 Flächen über den Würfelflächen, Octakishexaeder, oder 4 Flächen über den Dodecaeder, Tetrakisdodecaeder.

Hieraus erkennt man auch, dass dreierlei Winkel, entsprechend den Octaeder- $[o = (H)]$, Hexaeder- $[h = (HK)]$ und Dodecaederkanten $[d = (KL)]$ zu berücksichtigen sind.

In Folge der Formeln für diese Kanten

$$(83) \quad \begin{aligned} \cos o &= \cos\ (H) = \frac{h^2 + k^2 - l^2}{h^2 + k^2 + l^2} \\ \cos h &= \cos (HK) = \frac{2hk + l^2}{h^2 + k^2 + l^2} \\ \cos d &= \cos (KL) = \frac{h^2 + 2kl}{h^2 + k^2 + l^2} \end{aligned}$$

folgen für die beobachteten Tetracontaoctaeder nachstehende Winkel

| | $(H)$ | | $(HK)$ | | $(KL)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 731 | $= 14^0$ | 58′ | $= 43^0$ | 13′ | $= 21^0$ | 13′ |
| 531 | = 19 | 28 | = 27 | 40 | = 27 | 40 |
| 431 | = 22 | 37 | = 15 | 57 | = 32 | 12 |
| 421 | = 25 | 13 | = 35 | 57 | = 17 | 45 |
| 321 | = 31 | | = 21 | 47 | = 21 | 47 |
| 11.5.3 | = 27 | 53 | = 39 | 51 | = 13 | 3 |
| 21.7.5 | = 25 | 27 | = 51 | 44 | = 7 | 9 |
| 5.4.3 | = 50 | 13 | = 11 | 29 | = 11 | 29 |

Der Tetracontaoctaeder erscheint in der parallelflächigen Hemiedrie als Trapezoidalikositetraeder, in der geneigtflächigen als Hexakistetraeder, in der tetartoedrischen als Pentagonaldodecaeder.

Die Flächen des Trapezoidalikositetraeder $\pi\{hkl\}$, Fig. 65, liegen paarweise in Form von Trapezen, über denen des Pentagondodecaeder; daher zweierlei Kanten, die parallelen mit dem Octaeder $o$ und die mit dem Pentagondodecaeder $p$ vorkommen; jedoch ist zu bemerken, dass in diesem Falle auch $o = H$ doppelten Werth besitzt, je nachdem er durch die Combination $(khl)$ $(\bar{k}hl)$ oder $(lkh)$ $(\bar{l}kh)$ gebildet wird; im ersten Falle möge diess mit $o$ $(H)$, im zweiten mit $o$ $(L)$ bezeichnet werden.

Wir erhalten somit durch

$$(84) \quad \begin{aligned} \cos o &= \cos H = \frac{h^2 + k^2 - l^2}{h^2 + k^2 + l^2} \\ \cos o' &= \cos L = \frac{h^2 - k^2 + l^2}{h^2 + k^2 + l^2} \\ \cos p &= \cos \pi\, (HKL) = \frac{kl + lh + hk}{h^2 + k^2 + l^2} \end{aligned}$$

folgende Kantenwinkel für

| | $H$ | | $L$ | | $\pi(HKL)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\pi(10.6.1)$ | $= 9^0$ | 48′ | $= 61^0$ | 41′ | $= 56^0$ | 18′ |
| $\pi(10.5.1)$ | = 10 | 13 | = 52 | 54 | = 58 | 57 |
| $\pi(8.5.1)$ | = 12 | 6 | = 63 | 37 | = 53 | 55 |
| $\pi(5.3.1)$ | = 19 | 28 | = 60 | 56 | = 48 | 55 |

$\varkappa(4.2.1)$ $H = 25^0\ 13'$ $L = 51^0\ 45'$ $\varkappa(HKL) = 48\ 11'$
$\varkappa(3.2.1)$ $= 31\ \ 0$ $= 64\ 37$ $= 38\ 13$
$\varkappa(5.4.3)$ $= 40\ 12$ $= 68\ 54$ $= 19\ 57$

Die geneigtflächige Hemiedrie erzeugt einen tetraederähnlichen Körper (Fig. 66), welcher gebildet gedacht werden kann durch das Auftreten von 6 ungleichseitigen Dreiecken an Stelle jeder Tetraederfläche. Die hier auftretenden Kanten sind die des Tetraeders $t = \varkappa(H)$, Hexaeder $h = (HK)$ und Dodecaeder $d = (KL)$.

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \cos t &= \cos \varkappa(H) = \frac{h^2 - 2kl}{h^2 + k^2 + l^2} \\ \cos h &= \cos (HK) = \frac{2hk + l^2}{h^2 + k^2 + l^2} \\ \cos d &= \cos (KL) = \frac{h^2 + 2kl}{h^2 + k^2 + l^2} \end{aligned} \tag{85}$$

$\varkappa(321)$ $\varkappa(H) = 69^0\ 4'\ 31''$ $(HK) = 21^0\ 47'\ 12''$ $(KL) = 21^0\ 47'\ 12''$
$\varkappa(531)$ $= 57^0\ 7'\ 18''$ $= 27^0\ 39'\ 38''$ $= 27^0\ 39'\ 38''$

Hiermit ist die Betrachtung der im tessularen Systeme möglichen und constanten Gestalten erschöpft und die Verhältnisse der orthogonalen Systeme zugleich geschlossen. Wir sahen vom einfachen prismatischen Systeme, beginnend die Symmetrie durch das Einführen von Bedingungsgleichungen der Parameter sich immer mehr vervollkommnen; im Gegensatze zu dieser aufsteigenden Ordnung nimmt die Symmetrie in den nächstfolgenden Systemen wieder ab und erreicht im triklinischen ihren niedrigsten Grad; beide stellen vom prismatischen Systeme ausgehend gleichsam einen auf- oder absteigenden Stufengang der Symmetrieentwicklung dar.

# XIV. Kapitel.

## Monoklinisches Krystallsystem.

§. 59. In den vorhergehenden Kapiteln wurden die Fälle einer näheren Betrachtung unterzogen, welche von drei senkrechten Axen ableitbar, sich bloss durch deren relative Grösse unterscheiden; in diesem und den nachfolgenden Kapiteln müssen jene Formen und Gestalten erörtert werden, welche von Axensystemen abzuleiten sind, deren Lage selbst variabel ist.

Wohl versuchte man früher — namentlich Weiss — die schiefprismatischen Gestalten auf rechtwinkelige Axensysteme zurückzuführen, was namentlich dadurch erleichtert wird, dass oft die Neigung der schiefen Axen gering oder der Habitus sich ähnlich dem prismatischen ist, schliesslich die abnormsten Fälle durch die Hemiedrie erklärbar sind; allein die genaueren Messungen und optischen Untersuchungen verdrängten die Annahmen von rechtwinkeligen Axen. Namentlich durch letztere ward es festgestellt, dass bei den schiefwinkeligen Krystallen bedeutende und von der Neigung der Krystallaxen unabhängige Differenzen in der relativen Lage der optischen und morphologischen Axen eintreten, während bei dem rechtwinkeligen Systeme die Hauptschnitte beider übereinstimmen.

Durch die genauen Winkelmessungen ward diese Hypothese immer mehr begründet, indem dieselbe in den einzelnen Fällen und namentlich bei dem so lange für prismatisch gehaltenen Datholith geringe Differenzen im Werthe von einigen Minuten von 90° nachwiesen, hiedurch also die Existenz von morphologisch-schiefwinkeligen Axen direct bewiesen.

Die allgemeine Annahme von schiefwinkeligen Axen kann specialisirt werden, je nachdem von den drei Axenwinkeln $\xi$, $\eta$, $\zeta$ einer oder mehrere von 90° verschieden sind, und führt so zum monoklinischen, diklinischen und triklinischen Systeme.

Sind, wie bereits im §. 40 erwähnt, die Neigungen der drei Axen willkürlich und von $90^0$ verschieden, so wird diess als triklinisches System bezeichnet. Wird einer der Axenwinkel $90^0$, so entsteht das diklinische System, ein System, welches von Mitscherlich am unterschwefligsauren Kalke aufgefunden und begründet ward.

Tritt hingegen eine noch weitere Specialisirung ein, so dass nur mehr ein Axenwinkel variabel ist, so nennen wir diess monoklinisch. Der Charakter des monoklinischen Systems ist daher

$$XY = ZY = 90^0 \quad XZ \gtrless 90^0$$
$$a \gtrless b \gtrless c$$

Die Axe $Y$ steht senkrecht auf den Axen $X$, $Z$, welche mit einander einen beliebigen Winkel $\eta$ einschliessen. Aus dem Vorhandensein dieser geneigten Axen folgt mit Nothwendigkeit, dass die vier Quadranten einer Kugelhälfte, da die gleich bezeichneten Flächen nicht gleiche Distanz von den Axen haben, nicht mehr homolog sind; die Projection der Kugelhälfte (Fig. 67) wird nämlich durch die Zone $XZ$ und $YZ$ in zwei grössere und zwei kleinere Quadranten getheilt.

Fig. 67.

Die Form $\{hkl\}$ besteht daher in ihrer holoedrischen Ausbildung nur mehr aus 4 homolog im Raume vertheilten Flächen, welche gegen die Axen gleiche Neigung haben; es sind diess

$$(hkl) \; (h\bar{k}l) \; (\bar{h}k\bar{l}) \; (\bar{h}\bar{k}\bar{l})$$

Dadurch entsteht — hat wie in Fig. 67 die Axe $Y$ die horizontale Lage von rechts nach links, und ist die Axe $Z$ vertical — ein Gegensatz der Ausbildung von oben und unten, vorn und rückwärts, welche an die parallelflächige Hemiedrie des prismatischen Systems erinnert. Letztere, sowie andererseits die Analogie mit triklinischen Gestalten bedingen eine Aufstellung des Axensystems, dass $\eta$ nach vorne zu liegen kommt, wodurch die Projection am deutlichsten wird. Dass $XZ$ als variabel gewählt, geschah in Uebereinstimmung mit den meisten Autoren.

Die Mittellinie der Quadranten rechts und links, welche gleich ausgebildet sind, wird die Ebene der Symmetrie genannt, und in ihr liegen die beiden geneigten Axen $XZ$, die Axe der Symmetrieebene fällt mit der Axe $Y$, welche auf $XZ$ senkrecht ist, zusammen.

Aus dieser Lage folgt allsogleich die für die Berechnung nothwendige Lage der Pinakoidflächen: da diese immer in Folge ihres Symbols senkrecht gegen zwei Axen sein müssen, so coincidirt $B$ (010) mit $Y$;

hingegen liegt $A$ (100) und $C$ (101) in der Zone $XZ$ und zwar so, dass der Winkel $AC = \beta = 180 - \eta$, und dass $AZ = 90^0$ und $CX = 90$ ist (Fig. 67 und 29).

Man pflegt die Axe $Z$ und daher auch das Pinacoid (100) vorne vertical aufzustellen, hiedurch liegt auch $C$ (001) nach vorne geneigt horizontal, da man den Winkel $\beta < 90^0$ gegen den Beschauer zu aufstellt und zeichnet, um die Uebersicht der Formen zu erleichtern.

Nach der Zeichnung 67 fällt somit die positive Axe $X$ in die untere Kugelhälfte, da nur damit $\beta < 90^0$ und das verticale Pinacoid $A$ (100) vereinbar sind.

Da $\beta = 180 - \eta$ und $\beta$ meist kleiner als $90^0$, so wird öfters statt $\eta$, um kleinere Zahlen zu haben, $\beta$ eingeführt, allein beide Winkel sind wohl zu unterscheiden.

§. 60. Entwicklung der Formeln.

Gegenüber den Formeln der orthogonalen Systeme werden hier die Methoden dadurch bedeutend erschwert, dass die Distanzen aller Flächen und die Zonenverhältnisse selbst immer von dem variablen Elemente der Neigung der schiefen Axen abhängig sind. Es gelingt somit nur für wenige Fälle, die allgemeinen Formeln des Kapitels 9 zu specialisiren und um wirkliche Vereinfachung zu erzielen, ist man oft indirecte Methoden der Berechnung anzuwenden genöthigt.

*a*) Die Distanz eines Poles. Zur Bestimmung der Distanz eines Poles $P(hkl)$ dienen hier die doppelten Formeln, welche entweder die Krystallaxen $X$, $Y$, $Z$ oder die Normalen auf die Pinacoidflächen $A$ (100) — $B$ (010) — $C$ (001) berücksichtigen; letztere sind für die praktische Berechnung wichtiger, da sie sich den messbaren Winkeln am Krystalle anschliessen. Sei also

$$\xi = \zeta = 90^0;\ 180 - \eta = \beta \gtrless 90^0, \text{ so ist}$$

$$(11)\quad \begin{aligned} \cos PX &= \frac{hbc \sin\beta}{\sqrt{(h^2b^2c^2 + h^2a^2c^2 \sin^2\beta + l^2a^2b^2 + 2hlab^2c \cos\beta)}} \\ \cos PY &= \frac{kac \sin\beta}{\sqrt{(h^2b^2c^2 + k^2a^2c^2 \sin^2\beta + l^2a^2b^2 + 2hlab^2c \cos\beta)}} \\ \cos PZ &= \frac{lab \sin\beta}{\sqrt{(h^2b^2c^2 + k^2a^2c^2 \sin^2\beta + l^2a^2b^2 + 2hlab^2c \cos\beta)}} \end{aligned}$$

$$(22)\quad \begin{aligned} \cos PA &= \frac{hbc + lab \cos\beta}{\sqrt{(h^2b^2c^2 + k^2a^2c^2 \sin^2\beta + l^2a^2b^2 + 2hl\, ab^2c \cos\beta)}} \\ \cos PB &= \frac{kac \sin\beta}{\sqrt{(h^2b^2c^2 + k^2a^2c^2 \sin^2\beta + l^2a^2b^2 + 2hl\, ab^2c \cos\beta)}} \\ \cos PC &= \frac{lab + hbc \cos\beta}{\sqrt{(h^2b^2c^2 + k^2a^2c^2 \sin^2\beta + l^2a^2b^2 + 2hl\, ab^2c \cos\beta)}} \end{aligned}$$

*b)* Die Distanz zweier Pole wird im Allgemeinen durch die Formel ausgedrückt:

$$\cos PQ = \frac{hpb^2c^2 + kqa^2c^2 \sin^2\eta + lra^2b^2 - (hr+pl)\, ab^2c \cos\eta}{\sqrt{\begin{array}{l}\{h^2b^2c^2 + k^2a^2c^2 \sin^2\eta + l^2a^2b^2 - 2hl\, ab^2c \cos\beta\} \\ \{p^2b^2c^2 + q^2a^2c^2 \sin^2\eta + r^2a^2b^2 - 2pr\, ab^2c \cos\beta\}\end{array}}} \qquad (21)$$

Sind die zwei Pole jedoch in einer bereits bekannten Zone, so ist die Zonengleichung in ihrer allgemeinen Form nöthig.

$$\frac{\operatorname{cotg} PS - \operatorname{cotg} RP}{\operatorname{cotg} PQ - \operatorname{cotg} PR} = \frac{(PQ)\,(SR)}{(QR)\,(PS)} \qquad (34)$$

Diese Gleichung vereinfacht sich analog §. 48 *b* nur für jene Zonen, wo die Distanz $PR = 90^0$ gesetzt werden kann. Während nun diess bei den orthogonalen Systemen bei jener Zone möglich war, welche durch einen Axenpunkt läuft, so ist diess im monoklinischen Systeme nur mit jenen Zonen der Fall, welche die Axe $Y = B$ (010) in sich schliessen; denn nur für diese ist es möglich, jedesmal eine Distanz $PR = 90^0$ einzuführen, da der Durchschnitt der ursprünglichen Zone mit der Symmetriebene $XZ$ immer eine Fläche liefert, welche von $Y$ $90^0$ entfernt ist.

Für den Fall also, dass $PQ$ in einer Zone mit $Y$ ist, vereinfacht sich die allgemeine Zonengleichung 34 auf

$$\frac{h}{p} = \frac{k}{q} \frac{\operatorname{cotg} PY}{\operatorname{cotg} QY} = \frac{l}{r} \qquad (86)$$

Diese allgemeinen Formeln, 11, 22, 21 können wohl dienen, aus gegebenen Beobachtungen die Elemente des Systems zu berechnen, sie kommen jedoch dann am zweckdienlichsten zur Verwendung, wenn von einem System bereits die wichtigsten Elemente bekannt und dieselben entweder bloss verbessert, oder aus ihnen für eine grosse Flächenanzahl die Winkel gerechnet werden sollen. Für die gewöhnlichen Fälle dienen diese allgemeinen Formeln mehr zur Controlle, da der auch bei den früheren Systemen befolgte Weg der Auflösung mittelst sphärischer Trigonometrie leichter, wenn auch indirect zum Ziele führt.

*c)* Bestimmung der Parameter. Die directe Bestimmung der Parameter ist insoferne schwierig, als dieselbe bekanntlich (Satz 2) die Kenntniss der Distanz $PX$, $PY$, $PZ$ voraussetzt, welche aber nur durch Rechnung, nicht durch Messung ermittelt werden können. Es ist daher die Gleichung 2 so zu transformiren, dass statt der Distanzen $PX$, $PY$, $PZ$ die Werthe von $PA$, $PB$, $PC$ in möglichst einfacher Weise substituirt werden.

Sei $A$ (100), $C$ (001), $Y = B$ (010)

$$YZ = YC = YA = YX = AZ = CX = 90^0$$

Fig. 68.

$$CA + ZX = 180^0,$$

so folgt aus Fig. 68

$$\cos PX = \sin PY \cos PYX = \sin PY \sin PYC$$
$$\cos PZ = \sin PY \cos PYZ = \sin PY \sin PYA$$
$$\frac{\cos PX}{\sin PY} = \sin PYC \times \left(\frac{\cos PY}{\cos PY} = 1\right)$$
$$\frac{\cos PZ}{\sin PY} = \sin PYA \times \left(\frac{\cos PY}{\cos PY} = 1\right)$$

woraus

$$\cos PY = \frac{\cos PX \operatorname{cotg} PY}{\sin PYC} = \frac{\cos PZ \operatorname{cotg} PY}{\sin PYA}$$

folgt.

Substituirt man diese Werthe in die bekannte Gleichung

$$\frac{a}{h} \cos PX = \frac{b}{k} \cos PY = \frac{c}{l} \cos PZ$$

so erhält man die zur directen Berechnung des Parameterverhältnisses aus den gemessenen Winkeln taugliche Formel

$$\frac{a}{h} \cos PYC = \frac{b}{k} \operatorname{cotg} PY = \frac{c}{l} \sin PYA \tag{87}$$

welche sich auch zur Ermittlung des Parameterverhältnisses in etwas transformiren lässt, wenn man eine zweite Fläche $Q$ ($pqr$) einführt; es folgt

$$\frac{h}{l} \frac{\sin PYA}{\sin PYC} = \frac{p}{r} \frac{\sin QYA}{\sin QYC} = \frac{a}{c}$$
$$\frac{k}{l} \frac{\sin PYA}{\operatorname{cotg} PY} = \frac{q}{r} \frac{\sin QYA}{\operatorname{cotg} QY} = \frac{b}{c} \tag{88}$$

*d*) Aenderungen des Axensystems. Zwei Aenderungen der Lage der Axen verdienen in diesem Systeme eine nähere Erörterung: 1. wenn die geneigte Axe constant bleibt, hingegen in der Zone $XY$ zwei neue Axen aufgesucht werden, oder 2. wenn die neuen Axen in der Symmetrieebene liegen, wobei also $Y$ als Axe der Symmetrie erhalten wird.

1. In Folge der Constanz der geneigten Axe bleibt auch die Endfläche $c$ (001) constant und ident mit $c'$, hingegen werden statt der Pinacoide $A$ (100), $B$ (010) zwei neue Flächen hierzu erwählt, welche bisher Prismen mit den Indices $A'$ ($mno$), $B'$ ($m\bar{n}o$) waren.

Dieser Fall hat sein Analogon bereits beim prismatischen Systeme §. 48 *d*.

Sollen nun nach den allgemeinen Transformationsgleichungen aus diesen Bedingungen die neuen Indices abgeleitet werden, so folgt für dieselben, da die Symbole der neuen Zonen

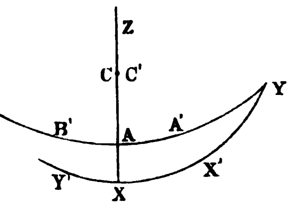
$$B'C' = n\,m\,0$$
$$C'A' = n\,\bar{m}\,0$$
$$A'B' = 0\,0\,2mn$$

sind die Gleichungen

$$\begin{aligned} u' &= nu + mv \\ v' &= nu - mv \\ w' &= w \end{aligned} \qquad (89)$$

Um die Parameter zu bestimmen, ist es nöthig, in Folge der Gleichungen 38 cos $A'X'$, cos $A'X$, cos $B'X$, cos $B'Y'$ zu entwickeln. Die Verbindung der aus der Fig. 69 entspringenden Relationen mit den Gleichungen 11 liefert unschwer die nöthigen Formeln.

Fig. 69.




Die zu erfüllenden Bedingungen sind:

$C'X = CY = A'Z = B'Z = B'X' = A'Y' = 90^0$

$A'X' = B'Y'$ $\qquad A'X = B'X$

$B'Y = 180 - A'Y \quad BA' = 180^0 - 2A'Y.$

Sucht man nun den Werth von $A'X'$ und $A'X$ zu ermitteln, so folgt aus dem Dreiecke $A'B'X'$

$$\begin{aligned} \cos A'X' &= \sin(180 - 2A'Y) \cos A'B'X' \\ &= 2 \sin A'Y \cos A'Y \cos A'B'X' \end{aligned}$$

aus dem Dreiecke $X'YB'$ hingegen

$$\cos X'Y = \sin B'Y \cos A'B'X' = \sin A'Y \cos A'B'X'$$

wodurch mittelst Elimination von $A'B'X'$ sich ergibt

(a) $$\cos A'X' = 2 \cos A'Y \cos X'Y$$

Nun ist in Folge

$$A'YC = B'YC = 90^0 - AX$$

$$\operatorname{cotg} A'Y = \frac{na}{mb} \sin A'YC = \frac{na}{mb} \cos AX$$

woraus sich, da in $\Delta$ $B\ YX$

$$o = \cos B'Y \cos X'Y + \sin B'Y \sin X'Y \cos AX$$

oder mit Berücksichtigung der obigen Bedingungen

$$\operatorname{cotg} A'Y = \operatorname{tg} X'Y \cos AX$$

ist, ergibt

$$\operatorname{tg} X'Y = \frac{na}{mb} \text{ oder } \cos X'Y = \frac{mb}{\sqrt{n^2a^2 + m^2b^2}}$$

Diess in die obige Gleichung ($a$) eingeführt, liefert als Resultat

$$\cos A'X' = 2 \frac{mb}{\sqrt{n^2a^2 + m^2b}} \cos A'Y$$

Substituirt man $\cos A'Y$ aus 11, §. 60 und bildet das Verhältniss von $A'X'$ und $A'X$, so erhält man

$$\frac{\cos A'X}{\cos A'X'} = \frac{\dfrac{mbc \sin \beta}{\sqrt{(m^2b^2c^2 + n^2a^2c^2 \sin^2\beta)}}}{\dfrac{2mb}{\sqrt{n^2a^2 + m^2b^2}} \left(\dfrac{nac \sin \beta}{\sqrt{m^2b^2c^2 + n^2a^2c^2 \sin^2\beta}}\right)}$$

Das Schlussresultat ist somit mit Berücksichtigung der oben ausgesprochenen Bedingungen

$$\frac{\cos A'X}{\cos A'X'} = \frac{\cos B'X}{\cos B'Y'} = \frac{\sqrt{n^2a^2 + m^2b^2}}{2na}$$

Diess ist in die allgemeinen Transformationsgleichungen 38 einzuführen und liefert die Werthe der Parameter

$$(90) \qquad \begin{aligned} a' &= \sqrt{n^2a^2 + m^2b^2} \\ b' &= \sqrt{n^2a^2 + m^2b^2} \\ c &= c \end{aligned}$$

Aus der Fig. 69 erhellt schliesslich, dass

$$\frac{X'Y'}{2} = 90^0 - X'Y \qquad \operatorname{tg} \frac{X'Y'}{2} = \frac{mb}{na}$$

$$\cos Z'X' = \cos Z'Y' = \cos \frac{X'Y'}{2} \cos XZ$$

wodurch nebst Indices und Parameter auch die Neigungen der neuen Axen $X'Y'Z$ gegeben sind.

2. Der zweite Fall einer Axenveränderung tritt meist dann auf, wenn zwei Domen aus der Symmetriezone als die neuen Pinacoide 100 und 001 angenommen werden. Für diesen Fall mögen also die Durchschnitte der Flächen $A'$ ($ho\bar{l}$), $B'$ (010), $C'$ ($po\bar{r}$) oder die Zonenaxen von ($ho\bar{l}$) (010) — (001) (100) — ($po\bar{r}$) (010) die neu gewählten Axen darstellen. In Folge der Zonensymbole

($\bar{r}op$) (010) ($lo\bar{h}$)

erhält man die Transformationsformel der Indices

$$(91) \qquad \begin{aligned} u' &= pw - ru \\ v' &= v \\ w' &= lu - hw \end{aligned}$$

Um die Werthe der Parameter zu erhalten, ist es nöthig, die Cosinusse $A'X'$ und $A'X$ zu entwickeln.

Fig. 70.

Aus Fig. 70 erhellt, dass

$$\cos A'X' = \cos(90^0 - A'C') = \sin A'C' =$$
$$\sin(A'X + C'X) = \sin A'X' \cos C'X + \cos A'X \sin C'X$$

Entwickelt man nun aus den durch Gleichung 11, §. 60 bekannten Werthen $\cos A'X$ und $\cos C'X$ auch die Sinuse derselben und substituirt, so folgt

$$\cos A'X' = \frac{(lp - hr)\, ac \sin\beta}{\sqrt{(l^2a^2 + h^2c^2 - 2hlac\cos\beta)(r^2a^2 + p^2c^2 - 2prac\cos\beta)}}$$

nun ist

$$\cos A'X = \frac{hbc \sin\beta}{\sqrt{hb^2c^2 + l^2a^2b^2 - 2hlab^2c\cos\beta}}$$

folglich

$$\frac{\cos A'X}{\cos A'X'} = \frac{h\sqrt{(r^2a^2 + p^2c^2 - 2prac\cos\beta)}}{a\,(lp - hr)}$$

Entwickelt man analog die übrigen Winkel und substituirt dieselben in die allgemeinen Gleichungen, so erhält man die Werthe der Parameter

$$\begin{aligned} a' &= \sqrt{r^2a^2 + p^2c^2 - 2prac\cos\beta} \\ b' &= b \\ c' &= \sqrt{l^2a^2 + h^2c^2 - 2hlac\cos\beta} \end{aligned} \qquad (92)$$

wobei $X'Z' = 180^0 - A'C'$.

Beide Fälle sind die wichtigeren und zugleich schwierigeren Transformationen der Axen, für die übrigen möglichen und zufällig versuchten Aenderungen der Axen müssen die speciellen Rechnungen im Sinne des §. 46 durchgeführt werden.

§. 61. Die holoedrische Entwicklung der Form $\{hkl\}$ bedingt §. 59 das Vorhandensein der 4 Flächen

$$hkl \quad h\bar{k}l \quad \bar{h}kl \quad \bar{h}\bar{k}l$$

Während aber im prismatischen Systeme jede Vereinfachung der Indices (einer derselben $= 0$) die Verminderung der Flächenanzahl hervorruft, ist diess hier nicht durchwegs der Fall.

Da der Charakter der Ausbildung in einem Gegensatze von vorne und rückwärts besteht, aber rechts und links gleich ausgebildet erscheint, ist es nöthig, dass sowohl das Prisma $hko$ als auch das Doma $okl$ mit der vollen Flächenanzahl, d. i. 4

$$\begin{matrix} hko & \bar{h}ko & h\bar{k}o & \bar{h}\bar{k}o \\ okl & o\bar{k}l & ok\bar{l} & o\bar{k}\bar{l} \end{matrix}$$

auftreten. Das Doma $hol$ hingegen, welches in der Symmetrieebene liegt, erhält in Folge des Gegensatzes von vorne und rückwärts nur die halbe Flächenanzahl und erscheint somit nur mit ihrer Gegenfläche, indem die homologe Form $\bar{h}ol$ in Folge anderer Lage im Raume mit ersterer unvereinbar ist.

Das Auftreten der Hemiedrie ist in diesem Systeme sehr beschränkt und die Beobachtungen Pasteur's an weinsauren Salzen und analogen Stoffen wiesen dieselbe zuerst nach. Sie besteht im Wesentlichen in der Ausbildung der halben Flächenanzahl und unterscheidet sich, je nachdem der rechts oder links von der Symmetrieebene gelegene Quadrant zur Ausbildung gelangt, in welchem Falle diese Hemiedrie mit den optischen Eigenschaften — rechts oder links drehende — des Stoffes in Connex tritt.

Ausser solchen Fällen, welche zugleich Charakteristica physikalischer Eigenschaften bilden, sind keine Meroedrien des Systems bekannt.

# XV. Kapitel.

## Diklinisches und triklinisches Krystallsystem.

§. 62. Die klinischen Systeme sind begründet durch die Annahme von drei ungleichen, ungleich geneigten Axen. Die durch das Vorhandensein einer senkrechten Axe im monoklinischen Systeme hervorgerufene Symmetrieebene entfällt hier, mit ihr zugleich auch jede höhere Symmetrie der Flächencombination.

Da sich bisher in den klinischen Systemen keine wichtigen physikalischen Beziehungen an die Axen anknüpfen liessen, so ist gleichgültig, welche Zonenaxen man als Krystallaxen betrachtet. Es treten hier nur zwei Momente von Belang auf, welche diese Wahl beeinflussen können: 1. zur Vereinfachung der Rechnung nur solche Zonen zu wählen, welche reich an Flächen sind, und 2. eine solche Wahl der Indices zu treffen, dass hiedurch eine Annäherung an einen monoklinischen Habitus erreicht wird.

Letztere Bedingung besitzt für den Zusammenhang der Formen einige Wichtigkeit, ich will die Gruppe der Feldspathe hier erwähnen, deren Causalnexus durch die Befolgung dieses Principes vollständig hervortritt.

Eine weitere Folge wird aus diesem Principe die sein, jenen Axenwinkel, der sich einem rechten am meisten nähert, in die Horizontalebene als $XY$ zu legen (wobei $X$, $Y$ und $Z$ gleiche Lage wie im monoklinischen Systeme haben); hingegen denjenigen, welcher sich am weitesten von $90^0$ entfernt, als den Winkel der vorderen Axe zur verticalen Hauptaxe als $\eta$ $(XZ)$ anzunehmen. Diess involvirt bereits die Annahme, dass im diklinischen Systeme die Pinacoide (100) und (010) als aufrechtstehende Säule dargestellt werden müssen.

Wohl wurden in den bisherigen Aufstellungen der triklinischen Krystalle vielfach andere Methoden angewendet und vollständig gesetzlos

die triklinischen Krystalle orientirt, allein jeder Blick auf den Causalnexus der Formen lässt die Nothwendigkeit der obigen Principien hervortreten, um durch dieselben eine Analogie der monoklinischen und triklinischen Formen mit ihren zahlreichen Zwischenformen zu erkennen.

§. 63. Diklinisches System. Die Annahme dreier ungleich geneigten Axen erlaubt eine Unterabtheilung und die Trennung von diklinisch und triklinisch.

Das charakteristische Merkmal des diklinischen Systems bildet der in der Horizontalebene liegende, $90^0$ betragende Axenwinkel $XY$ ($\zeta = 90^0$), während $\xi \gtrless \eta \gtrless 90^0$ sind.

Während sich im monoklinischen Systeme durch die Annahme von $\xi = \zeta = 90^0$ die Berechnungsformeln bedeutend vereinfachten, ist diess hier nicht der Fall, indem es nicht möglich ist, wie bei dem erwähnten auch zwei der Pinacoidwinkel $\alpha$ und $\gamma$ zum Wegfall zu bringen, sondern indem die Vereinfachung nur in der bereits erwähnten Relation

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta \tag{93}$$

besteht.

Die allgemeinen Formeln über die Distanz eines Poles von den Krystallaxen, sowie die Distanz zweier Pole ergeben sich durch diese Einführung als Function von nur zwei Pinacoidwinkeln, also $f\,(hkl, abc, \alpha\,\beta)$, dieselben sind in den Sätzen 8, 19, 20 dargestellt.

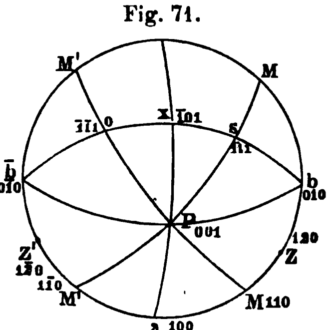
Aus der obigen Formel ergeben sich zugleich die Symmetrieverhältnisse dieses Systems, Aus der Bedingung, dass $\zeta = XY = 90^0$ folgt, dass der Winkel der Pinacoide $A$ (100) und $B$ (010) einen Winkel bilde, dessen Grösse von jenem der Neigungen ($AC$) und ($BC$) eine Function ist, und der sich immer einem rechten nähert, also die Bedingung erfüllt — limit. $(\gamma) = 90^0$. Jedoch ist wohl zu bemerken, dass der Winkel der Pinacoide $AB = \gamma$ nie einem rechten absolut gleich sein kann; denn mit der Bedingung $\gamma = 90^0$ ist das diklinische System unvereinbar, da aus der obigen Gleichung $\cos \alpha \cos \beta = 0$ und $\alpha$ oder $\beta = 90^0$ folgen würde, also der Krystall in Wahrheit nicht dem diklinischen, sondern dem monoklinischen Systeme angehöre.

Da also nie $\gamma = AB = 90^0$ als Bedingung des diklinischen Systems gelten darf, so ergibt sich hieraus, dass die Winkel der Pinacoide (100) (010) und (100) $(0\bar{1}0)$ von einander verschieden sein müssen, in der Weise, dass (100) (010) $= 180^0 -$ (100) $(0\bar{1}0)$, wobei (100)(010) $\gtrless$ (100) $(0\bar{1}0)$ gesetzt werden kann.

In gleicher Weise hat auch das diklinische Prisma oder die Flächen $M$ (110) und $M'$ $(1\bar{1}0)$ nicht gleiche Neigung gegen (100) oder (010), da dieselbe ja vermöge (34) von dem Winkel (100) (010) bedingt sind;

wenn also auch die Axenabschnitte für beide Prismen $MM'$ gleich sind, — sie also gegen die Axen gleiche Länge haben, und in Folge dessen gleichsam als eine Form $M$ (Fig. 71) zusammengefasst werden könnten, so sind doch ihre messbaren Winkel gegen die Pinacoidflächen selbst verschieden, und es zeigt — wie später beim triklinischen System — ein Unterschied in den Winkeln rechts und links, so dass also im diklinischen Systeme gleiche Winkel nur von der einzelnen Fläche und ihrer parallelen Gegenfläche gemacht werden.

Fig. 71.




Diess ist auch der Grund, warum das theoretisch mögliche und wegen der leichten Erfüllbarkeit von (93) auch wahrscheinlich öfters[1]) vorkommende diklinische System für die praktische Anwendung keine Bedeutung finden kann, da, wie aus dem oben Gesagten erhellt, die morphologischen Winkelverhältnisse ganz mit den triklinischen übereinstimmen und ferner es auch bei minder schönen Krystallen schwierig ist, die zur Erfüllung von (93) hinreichenden genauen Messungen zu gewinnen.

In mehreren mir zufällig vorgekommenen Fällen scheinen jedoch die Autoren[2]) wenig die Bedingungen des diklinischen Systems berücksichtigt zu haben.

Ein flüchtiger Blick auf ein wahrhaft diklinisches Krystallsystem kann Jeden von der Wahrheit oben aufgestellter Principien ebenso leicht überzeugen, als uns die Formel (93) ungezwungen lehrte, dass das Vorhandensein eines Pinacoidwinkels von 90⁰ bereits das Verlassen des diklinischen und die Annahme des monoklinischen Systems bedinge.

Da schliesslich die Berechnungsmethoden analog denen beim triklinischen Systeme sind, so verweise ich bezüglich letzterer auf dasselbe.

§. 64. **Triklinisches System.** In Folge der variablen Axenneigungen gestalten sich die Symmetrieverhältnisse der Formen auf das Einfachste, indem jeder Fläche nur die ihr parallele Gegenfläche entspricht.

---

[1]) Das diklinische System, von Mitscherlich am unterschwefligsaurem Kalke aufgestellt, scheint für mehrere chomische Substanzen nicht unmöglich zu sein; mindestens erhellt aus dem bisherigen Beobachtungsmaterial, dass in manchen Fällen die Winkel der Bedingung (93) nahezu entsprechen vermögen, sowie ja im Allgemeinen fast die Mehrzahl der triklinischen Substanzen sich einem Axenwinkel $\zeta$ — 90° nähert.

[2]) Die Aufstellung eines diklinischen Krystallsystems, dessen Charakteristicon nicht $\zeta = 90^0$, sondern $\gamma = 90^0$ wäre, verstösst gegen das Grundgesetz der Krystallographie, welches als Eintheilungsgrund nur Lage und Grösse der Parameter angibt. Die Winkeldimensionen von Flächen sind immer variabel, und können daher nicht als bestimmendes Merkmal gelten.

Während diese einfachen Symmetrieverhältnisse die allgemeine Bestimmung der Flächenindices erleichtert, ist hingegen die Winkelberechnung wegen der vollständigen Anzahl der Unbekannten nicht zu vereinfachen.

*a*) Die Distanz eines Poles. Hiefür sind die allgemeinen Gleichungen des Kapitel 9 anzunehmen, da die unbestimmten Werthe der Axenwinkel $\xi\ \eta\ \zeta$ keine Abkürzung zulassen.

Da jedoch beim Beginne der Untersuchung die Axenwinkel unbekannt und nur die Winkel der Pinacoidflächen ($ABC$) $\alpha\beta\gamma$ am Krystalle vorhanden und daher direct messbar sind, so ist es nöthig, die Werthe der Distanz der Pole von den Axen als Function der Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma$ umzuwandeln.

In Folge der Relationen

$$(6)\qquad \begin{aligned} \cos\xi &= \frac{\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} \\ \cos\eta &= \frac{\cos\gamma\cos\alpha - \cos\beta}{\sin\gamma\sin\alpha} \\ \cos\zeta &= \frac{\cos\beta\cos\alpha - \cos\gamma}{\sin\beta\sin\alpha} \end{aligned}$$

ergibt sich

$$(94)\qquad \begin{aligned} \cos^2 PX &= \frac{h^2b^2c^2\ A_1}{M_1} \\ \cos^2 PY &= \frac{k^2a^2c^2\ A_1}{M_1} \\ \cos^2 PZ &= \frac{l^2a^2b^2\ A_1}{M_1} \end{aligned}$$

wobei, wie bekannt

$$(95)\qquad \begin{aligned} A_1 &= [1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\zeta)] \\ M_1 &= [h^2b^2c^2\sin^2\alpha + k^2a^2c^2\sin^2\beta + l^2a^2b^2\sin^2\gamma \\ &\quad + 2abc\,(hlb\cos\beta\sin\alpha\sin\gamma \\ &\quad + hkc\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta + kla\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma)] \end{aligned}$$

Diese Formeln sind bereits genügend, aus der bekannten Lage der Pinacoidflächen und ihren Winkeln, die Lage der Axen gegen $A$, $B$, $C$ und die Axenneigungen selbst zu bestimmen; es ist

$$(96)\qquad \begin{aligned} \cos^2 AX &= \frac{A_1}{\sin^2\alpha} \\ \cos^2 BY &= \frac{A_1}{\sin^2\beta} \\ \cos^2 CZ &= \frac{A_1}{\sin^2\gamma} \end{aligned}$$

*b*) Die Distanz zweier Pole.

Die allgemeine Formel für die Distanz der Pole zweier Krystallflächen ist bezogen ebenfalls auf $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, nach 17.

Diese Gleichung, welche sich für specielle Werthe von $P$ oder $Q$ vereinfacht, genügt, um aus einzelnen Messungen direct die Unbekannten abzuleiten. Die wichtigeren Kürzungen entstehen durch Einführung von $A$ (100), $B$ (010), $C$ (001) für $Q$ und dann von $M$ (110) und $N$ (101) für $P$; es resultirt hieraus:

$$
\left.
\begin{aligned}
\cos PA &= \frac{hb^2c^2 \sin^2\alpha + lab^2c \cos\beta \sin\alpha \sin\gamma + kabc^2 \cos\gamma \sin\eta \sin\beta}{Mbc \sin\alpha} \\
\cos PB &= \frac{k^2a^2c^2 \sin^2\beta + la^2bc \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma + habc^2 \cos\gamma \sin\alpha \sin\beta}{Mac \sin\beta} \\
\cos PC &= \frac{la^2b^2 \sin^2\gamma + hab^2c \cos\beta \sin\alpha \sin\gamma + ka^2bc \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma}{Mab \sin\gamma} \\
\cos MA &= \frac{b \sin\alpha + a \cos\gamma \sin\beta}{\sqrt{(b^2 \sin^2\alpha + a^2 \sin^2\beta + 2ab \cos\gamma \sin\alpha \sin\beta)}} \\
\cos MB &= \frac{a \sin\beta + b \cos\gamma \sin\alpha}{\sqrt{(b^2 \sin^2\alpha + a^2 \sin^2\beta + 2ab \cos\gamma \sin\alpha \sin\beta)}} \\
\cos NA &= \frac{c \sin\alpha + a \cos\beta \sin\gamma}{\sqrt{(c^2 \sin^2\alpha + a^2 \sin^2\gamma + 2ac \cos\beta \sin\alpha \sin\gamma)}} \\
\cos NC &= \frac{a \sin\gamma + c \cos\beta \sin\alpha}{\sqrt{(c^2 \sin^2\alpha + a^2 \sin^2\gamma + 2ac \cos\beta \sin\alpha \sin\gamma)}}
\end{aligned}
\right\} \quad (97)
$$

*c*) Bestimmung des Parameterverhältnisses und der Axenwinkel. Aus den bisher entwickelten Gleichungen ist es möglich, beide geforderten Daten direct zu ermitteln; da jedoch diess eine ziemliche Complication der Rechnung erfordert, andererseits diese Ermittlung meist nur bei vollständiger Krystallberechnung gefordert wird, so ist es zweckmässig, eine auf die sphärische Projection gegründete Methode zu benützen.

Das Parameterverhältniss, welches zu seiner Auswerthung die Gleichung hat

$$\frac{a}{h} \cos PX = \frac{b}{k} \cos PY = \frac{c}{l} \cos PZ$$

wird durch indirecte Bestimmung von $PX$, $PY$, $PZ$ leicht gefunden.

Aus der Figur 72 ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\cos PX &= \sin PBC \sin PB = \sin PCB \sin PC \\
\cos PY &= \sin PCA \sin PC = \sin PAC \sin PA \\
\cos PZ &= \sin PAB \sin PA = \sin PBA \sin PB
\end{aligned}
$$

woraus folgt:

$$\frac{b}{k} \sin PAC = \frac{c}{l} \sin PAB$$

(98)
$$\frac{c}{l} \sin PBA = \frac{a}{h} \sin PBC$$

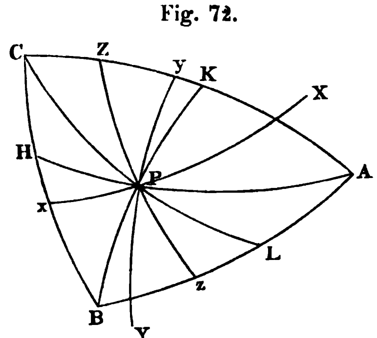
$$\frac{a}{h} \sin PCB = \frac{b}{k} \sin PCA$$

Die Axenwinkel $\xi$, $\eta$, $\zeta$ ergeben sich aus dem Verhältnisse des Dreieckes $XYZ$ zu seinem Polardreiecke $ABC$, (Fig. 72), wodurch

$$\xi = 180 - CAB, \eta = 180 - ABC, \zeta = 180 - ACB$$

wird.

Fig. 72.




Hiermit ist zugleich die mathematische Betrachtung der im Voraus berechenbaren Fälle geschlossen; bei specieller Berechnung führt die Anwendung aller früher erwähnten Lehrsätze und sphärischer Projection zur baldigen Auflösung der Dreiecke und Ermittlung der Winkel.

Die Beschränkung der Flächenanzahl bringt in diesem Systeme gegenüber den früheren eine Verminderung der Formen und Combinationen hervor, so dass die meisten Substanzen nur in wenigen Modificationen ihrer Formen auftreten, und nur einzelne Minerale, wie Chessylit und Albit besitzen einen grösseren Formenreichthum, welcher Folge der grösseren Anzahl von Flächen, nicht aber in der wechselnden Ausbildung letzterer begründet, ist.

Bei dieser Stabilität der Formen ist jedoch in vielen Fällen eine ausgesprochene Hinneigung zum monoklinischen Typus vorhanden, wovon die Feldspathe das glänzendste Zeugniss sind. Diess gibt sich namentlich durch die Annäherung des Axenwinkels $\zeta$ an $90^0$ zu erkennen, welche an sehr vielen Species: Feldspathen, vanadinsauren Salzen etc. vorkommen, und eine Symmetrie in der Zone ($XY$) anstreben.

# XVI. Kapitel.

## Theorie der Zwillingsbildung.

§. 65. Es wurden schon in dem allgemeinen Theile die möglichen Verwachsungen angedeutet und hervorgehoben, dass die Aggregate mit parallelen Axen und Flächen nur als Repetitionen zu betrachten sind; dass hingegen eine regelmässige Verwachsung nach krystallographischen Gesetzen wichtig ist und als Zwillings- oder speciell Drillings-, Vierlingsbildung bezeichnet wird.

Unter Zwillingskrystall versteht man daher ein Aggregat zweier Individuen eines und desselben Minerals, welche keinen vollständigen Parallelismus ihrer Axen und Flächen besitzen, aber nach einem mathematisch bestimmbaren Gesetze verbunden sind.

Bei der Betrachtung eines Zwillings kommt daher vor Allem die Ermittlung der relativen Stellung beider Individuen gegen einander in Betracht. Hiebei pflegt man von einer parallelen Lage beider Krystalle auszugehen, einen derselben als fix im Raume anzunehmen, und durch verschiedene Stellungen des zweiten zu ermitteln, um welchen Winkel und um welche Axe letzterer gedreht werden muss, um die betrachtete Zwillingscombination zu erzeugen. Hiedurch wurden folgende allgemeine Gesetze gefunden:

1. die Umdrehungsaxe ist eine im Systeme mögliche reelle krystallographische Linie, Kante, Axe oder Flächennormale;

2. der Drehungswinkel des zweiten Individuums kann durchwegs mit 180° angenommen werden, obgleich in einzelnen wenigen Fällen der Zwillingskrystall bereits durch eine Drehung von 60° erzeugt werden könnte.

Da sich die Umdrehungslinie als eine beiden Individuen gemeinschaftliche Axe charakterisirt, wird ihr der Name Zwillingsaxe beigelegt, sowie auch in der mathematischen Theorie immer nur die Drehung

um 180° berücksichtigt wird. Da ferner jede krystallographische Linie als Flächennormale dargestellt werden kann, so pflegt man der genaueren und leichteren Bestimmung halber die Zwillingsaxe immer als Normale auf eine Fläche anzugeben, welche hiedurch den Namen Zwillingsfläche erhält.

Diese Zwillingsfläche fällt in einzelnen, regelmässig gebildeten Fällen mit jener Fläche zusammen, welche in Folge der Zusammenwachsung beiden gemein ist. Im Allgemeinen ist diese Zusammensetzungsfläche, wenn die Individuen regelmässig und gleich ausgebildet sind, sowie sich nicht etwa gegenseitig in der Entwicklung hemmten, entweder parallel der Zwillingsaxe oder normal auf dieselbe.

Entgegen dieser Juxtaposition stehen die Verhältnisse der Penetration, welche veranlasst wird, wenn die Individuen ungleichmässig ausgebildet werden, so dass sie sich gegenseitig stören; bei solchen mehr symmetrischen Vorkommnissen pflegen sich die Krystalle zu durchwachsen, so dass sie als Durchkreuzungszwillinge um einen Mittelpunkt gebildet erscheinen.

Die Zusammensetzungsfläche ist hier von dem relativen Wachsthum beider Individuen abhängig, und da letztere keinem Gesetze unterliegt, wohl so willkürlich, dass sie gebrochen, krumm, ja selbst keine Krystallfläche zu sein nöthig hat.

Bisher wurden die Zwillinge als die Verbindung zweier Individuen dargestellt, es ist jedoch zu bemerken, dass in dieser vollendeten Form dieselben nicht in der Natur aufzutreten pflegen, sondern dass oft nur einzelne zur Entwicklung gelangte Flächen des zweiten Krystalls genügen müssen, um die krystallographischen Gesetze zu ermitteln. Der interessanteste Fall von diesen Verkürzungen ist der, wenn beide Krystalle nur zur Hälfte entwickelt sind, wodurch der Zwilling gleichsam aus den Hälften eines Individuums gebildet zu sein scheint.

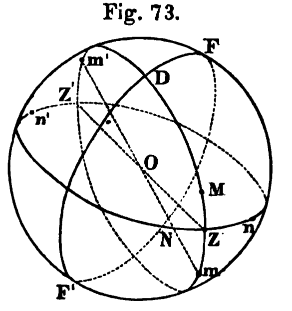
Diese Vorerinnerungen genügen, um zur mathematischen Theorie übergehen zu können, welche zu ihrer Vollständigkeit drei Punkte zu ermitteln hat: 1. die Lage der Zwillingsaxe oder die Bestimmungen der Zwillingsfläche; 2. die relative Lage der Krystallaxen des zweiten Individuums, bezogen auf die Axen des als fix angenommenen ersten Krystalls; 3. die Indices der Flächen vom zweiten, bezogen auf die Parameter und Axen des ersten Individuums.

Sind diese Punkte vollständig ermittelt, wird es möglich, alle übrigen krystallographischen Probleme zu lösen, da letztere nur Functionen nach drei bereits ermittelten Indices sind, daher jedes weitere theoretische Vorgehen, namentlich zur Winkelberechnung, als überflüssig wegfällt.

§. 66. Bestimmung der Zwillingsaxe. Von den Principien des vorigen Paragraphes ausgehend, ist es leicht, immer die Lage der Drehungsaxe von den vorhandenen Elementen abzuleiten, wenn bereits jedes Individuum des Zwillings früher krystallographisch bestimmt ist, da von der Lage der homologen Flächen die der Zwillingsaxe abhängt.

Zur leichteren Darstellung genügt es, nur die Flächen und deren Normalen in einer Kugel anzudeuten, ohne auf die möglichen Formen Rücksicht zu nehmen. Sei in Fig. 73 $ZZ'$ die willkürliche Lage einer Zwillingsaxe, so ist sie zugleich Normale der Zwillingsfläche und Zone $FF'$.

Fig. 73.




Sind nun $M, m, N, n$ Normalen von homologen Flächen beider Individuen, so müssen dieselben in Folge der Grundbedingungen solche Lage im Raume haben, dass eine Drehung von 180° um $ZZ'$ genügt, die Flächen parallel, d. i. die Normalen coincidirend zu machen. $MZm$ und $NZn$ müssen daher in einer Zone liegen und die Distanz $Mm$ durch den Pol der Zwillingsaxe halbirt werden.

Allein auch die Zwillingsfläche selbst halbirt die Distanz zweier homologen Flächen, denn lässt man im zweiten Individuum die Gegenfläche von $m$ zur Entwicklung gelangen, so muss in der Projection Fig. 68 dieser Punkt nach $m'$ zu liegen kommen und ebenfalls in die Zone $MZm$ fallen. Da

$$Zm = Z'm' = MZ \qquad DZ = DZ' = 90^0$$
$$DM = 90^0 - MZ = 90^0 - m'Z' = Dm'$$

folgt hiermit, dass 1. die Distanz der homologen Flächen der Zwillingskrystalle sowohl durch die Zwillingsaxe, als auch durch die Zwillingsfläche halbirt wird, und 2. dass der Pol der Zwillingsaxe in einer Zone mit den Polen der homologen Flächen liegt.

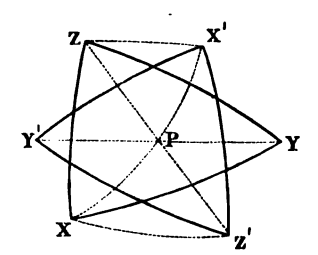
Beide Sätze genügen, um die Zwillingsaxe zu ermitteln, indem 1. durch Zuhülfenahme eines zweiten Flächenpaares $Nn$ unmittelbar der Durchschnitt beider Zonen $Nnn'$, $Mmm'$ als der Pol der Axe erkannt wird; andererseits, wenn nur ein Paar homologer Flächen auftritt, die Berechnung nach 1. die Lage im Raume angibt. Um die Lage der Zwillingsaxe zu bestimmen, genügt die Angabe der Indices der Zwillingsfläche, da die Normale letzterer mit der ersten ident ist.

§. 67. Die Lage der Krystallaxen des zweiten Individuums zu bestimmen in ihrer Beziehung zu den fixen Axen und Parametern des ersten Individuums und den Indices der Zwillingsfläche.

Die Lösung dieses Problems wird möglich, da die Lage der Krystallaxen des zweiten Individuums durch die Drehung um die Zwillingsaxe entstanden und daher ebenfalls den Gesetzen des vorigen Paragraphes unterworfen sein muss. Wendet man dieselben auf die Axen an, so folgt, dass 1. jede Axe des zweiten Individuums in eine Zone mit dem Pole der Zwillingsfläche und der homologen Axen vom ersten Krystall fallen muss; 2. der Winkel zwischen zwei homologen Axen das Doppelte des Winkels der Axe zur Zwillingsfläche ist.

Bei den Bedingungen in dem allgemeinsten Falle von $\xi, \eta, \zeta \gtreqless 90^0$, wobei $P\ (hkl)$ die Zwillingsfläche, ist in Fig. 74 entsprochen, mittelst welcher es gelingt, die Lage von $X'Y'Z'$ den Axen des zweiten Individuums genau zu bestimmen. Es sind diess die Winkel

Fig. 74.




$$X'X,\ X'Y,\ X'Z$$
$$Y'X,\ Y'Y',\ Y'Z'$$
$$Z'X,\ Z'Y,\ Z'Z,$$

welche sich aber theoretisch in zwei Gruppen, die mit gleichen und ungleichen Buchstaben trennen lassen.

*A*) Die Ermittlung der Werthe $XX'$, $YY'$, $ZZ'$, beruht auf dem obigen Satz 1); denn

$$XX' = 2PX$$
$$\cos XX' = \cos 2PX = 2\cos^2 PX - 1$$

substituirt man nun die allgemeinen triklinischen Formeln 5, 6, 7, so folgt

$$(99)\quad \cos X'X = \frac{\begin{array}{l} h^2b^2c^2\sin^2\xi + 2h^2b^2c^2\,(2\cos\xi\cos\eta\cos\zeta - \cos^2\eta - \cos^2\zeta) \\ - k^2a^2c^2\sin^2\eta - l^2a^2b^2\sin^2\zeta + 2abc\,[chk\,(\cos\zeta - \cos\xi\cos\eta) \\ + bhl\,(\cos\eta - \cos\xi\cos\zeta) + akl\,(\cos\xi - \cos\zeta\cos\eta)] \end{array}}{\begin{array}{l} h^2b^2c^2\sin^2\xi + k^2a^2c^2\sin^2\eta + l^2a^2b^2\sin^2\zeta \\ - 2abc\,[chk\,(\cos\zeta - \cos\xi\cos\eta) + bhl\,(\cos\eta - \cos\xi\cos\zeta) \\ + akl\,(\cos\xi - \cos\zeta\cos\eta)] \end{array}}$$

in analoger Weise, $Y'Y$ und $Z'Z$.

*B*) Die Bestimmung der Werthe für $X'Z$... erfolgt aus den Dreiecken mit Hülfe 99, und $\xi\ \eta\ \zeta$ der bekannten Axenwinkeln $XY$...

$$\cos X'Z = \cos\eta\cos XX' + \sin\eta\sin XX'\cos PXZ$$

$$\cos PXZ = \frac{\cos PZ - \cos\eta\cos PX}{\sin\eta\sin PX}$$

woraus nach Substitution der Werthe folgt

$$(100)\qquad \cos X'Z = 2\cos PX\cos PZ - \cos\eta$$

Zu bemerken ist hier nur, dass, wie auch eine leichte Rechnung überzeugt, die Werthe auch bei Vertauschung des Index von $X$ mit $Z$ ident bleiben, d. i.

$$X'Z = Z'X \quad Y'Z = Z'Y \quad X'Y = Y'X \tag{101}$$

Es ist daher schliesslich

$$\cos X'Z = \cos Z'X = \frac{2hlab^2c\,(1 + 2\cos\xi\cos\eta\cos\zeta - \cos^2\xi - \cos^2\eta - \cos^2\zeta)}{\begin{array}{r} h^2b^2c^2\sin^2\xi + k^2a^2c^2\sin^2\eta + l^2a^2b^2\sin^2\zeta \\ -2abc[chk(\cos\zeta - \cos\xi\cos\eta) + bhl(\cos\eta - \cos\xi\cos\zeta) \\ + akl(\cos\xi - \cos\zeta\cos\eta)] \end{array}} \tag{102}$$

Analoge Werthe folgen für $Y'Z$ und $X'Y$.

Durch diese Formeln ist die Lage der Axen $X'Y'Z'$ genau bestimmt und berechenbar, sowie auch ermöglicht, dieselben als Normalen von Flächen des ersten Individuums zu betrachten und so gleichsam durch Indices die Lage zu bestimmen, was Gegenstand des folgenden Paragraphes ist.

Diese Gleichungen 99 und 102 liefern aber vor Allem die bestimmenden Formeln für die 6 Krystallsysteme; die im Nachfolgenden angewendete Schreibweise lässt den Causalnexus klar hervortreten.

1. Triklinisches System $\xi \gtreqless \eta \gtreqless \zeta \gtreqless 90^0$.

$$\begin{aligned} M_1 &= h^2b^2c^2\sin^2\xi + k^2a^2c^2\sin^2\eta + l^2a^2b^2\sin^2\xi \\ &\quad - 2abc[chk(\cos\zeta - \cos\xi\cos\eta) + bhl(\cos\eta - \cos\xi\cos\zeta) \\ &\quad + akl(\cos\xi - \cos\zeta\cos\eta)] \\ A_1 &= (1 + 2\cos\zeta\cos\eta\cos\zeta - \cos^2\xi - \cos^2\eta - \cos^2\zeta) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} M_1 \cos X'X &= 2h^2b^2c^2 A_1 - M_1 \\ M_1 \cos Y'Y &= 2k^2a^2c^2 A_1 - M_1 \\ M_1 \cos Z'Z &= 2l^2a^2b^2 A_1 - M_1 \\ M_1 \cos X'Y &= M_1 \cos Y'X = 2hk\,abc^2\,A_1 - \cos\zeta\,M_1 \\ M_1 \cos X'Z &= M_1 \cos Z'X = 2hl\,ab^2c\,A_1 - \cos\eta\,M_1 \\ M_1 \cos Y'Z &= M_1 \cos Z'Y = 2kl\,a^2bc\,A_1 - \cos\xi\,M_1 \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

2. Monoklinisches System $\xi = \zeta = 90^0 \; \eta \gtreqless 90^0$

$$\begin{aligned} M_2 &= h^2b^2c^2 + k^2a^2c^2\sin^2\eta + l^2a^2b^2 - 2ab^2chl\cos\eta \\ A_2 &= 1 - \cos^2\eta = \sin^2\eta \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} M_2 \cos X'X &= 2h^2b^2c^2\sin^2\eta - M_1 \\ M_2 \cos Y'Y &= 2k^2a^2c^2\sin^2\eta - M_1 \\ M_2 \cos Z'Z &= 2l^2a^2b^2\sin^2\eta - M_1 \\ M_2 \cos X'Y &= M_2 \cos Y'X = 2hk\,abc^2\sin^2\eta \\ M_2 \cos X'Z &= M_2 \cos Z'X = 2hl\,ab^2c\sin^2\eta - \cos\eta\,M_2 \\ M_2 \cos Y'Z &= M_2 \cos Z'Y = 2kl\,a^2bc\sin^2\eta \end{aligned}\right\} \tag{104}$$

3. **Orthogonale Systeme.** $\xi = \eta = \zeta = 90^0; \; A = o.$

*a*) Prismatisch. Parameterverhältniss $= a : b : c.$

$$M_3 = h^2b^2c^2 + k^2a^2c^2 + l^2a^2b^2.$$

$$
\begin{aligned}
&M_3 \cos X'X = h^2b^2c^2 - k^2a^2c^2 - l^2a^2b^2 \\
&M_3 \cos Y'Y = k^2a^2c^2 - h^2b^2c^2 - l^2a^2b^2 \\
&M_3 \cos Z'Z = l^2a^2b^2 - h^2b^2c^2 - k^2a^2c^2 \\
&M_3 \cos X'Y = M_3 \cos Y'X = 2hk\; abc^2 \\
&M_3 \cos X'Z = M_3 \cos Z'X = 2hl\; ab^2c \\
&M_3 \cos Y'Z = M_3 \cos Z'Y = 2hk\; a^2bc
\end{aligned}
\tag{105}
$$

*b*) Orthohexagonal. Parameterverhältniss $= \sqrt{3}\, a : a : c.$

$$M_4 = h^2c^2 + 3k^2c^2 + 3l^2a^2.$$

$$
\begin{aligned}
&M_4 \cos X'X = h^2c^2 - 3k^2c^2 - 3l^2a^2 \\
&M_4 \cos Y'Y = 3k^2c^2 - h^2c^2 - 3l^2a^2 \\
&M_4 \cos Z'Z = 3l^2a^2 - h^2c^2 - 3k^2c^2 \\
&M_4 \cos X'Y = M_4 \cos Y'X = 2hk \sqrt{3}\, c^2 \\
&M_4 \cos X'Z = M_4 \cos Z'X = 2hl \sqrt{3}\, ac \\
&M_4 \cos Y'Z = M_4 \cos Z'Y = 2kl\; 3\; ac
\end{aligned}
\tag{106}
$$

*c*) Pyramidal. Parameterverhältniss $a : a : c.$

$$M_5 = h^2c^2 + k^2c^2 + l^2a^2$$

$$
\begin{aligned}
&M_5 \cos XX' = h^2c^2 - k^2c^2 - l^2a^2 \\
&M_5 \cos Y'Y = k^2c^2 - h^2c^2 - l^2a^2 \\
&M_5 \cos Z'Z = l^2a^2 - h^2c^2 - k^2c^2 \\
&M_5 \cos X'Y = M_5 \cos Y'X = 2hk\; c^2 \\
&M_5 \cos X'Z = M_5 \cos Z'X = 2hl\; ac \\
&M_5 \cos Y'Z = M_5 \cos Z'Y = 2kl\; ac
\end{aligned}
\tag{107}
$$

*d*) Tesseral. Parameterverhältniss $a : a : a.$

$$M_6 = h^2 + k^2 + l^2.$$

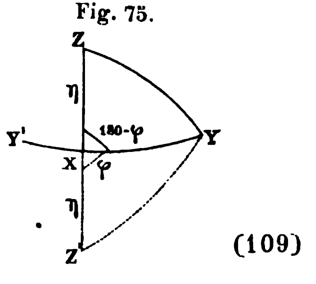
$$
\begin{aligned}
&M_6 \cos X'X = h^2 - k^2 - l^2 \\
&M_6 \cos Y'Y = k^2 - h^2 - l^2 \\
&M_6 \cos Z'Z = l^2 - k^2 - h^2 \\
&M_6 \cos X'Y = M_6 \cos Y'X = 2hk \\
&M_6 \cos X'Z = M_6 \cos Z'X = 2hl \\
&M_6 \cos Y'Z = M_6 \cos Z'Y = 2kl
\end{aligned}
\tag{108}
$$

Die bisher entwickelten Gleichungen basiren auf der Voraussetzung, dass die Zwillingsaxe Normale einer Krystallfläche ist. Allein im monoklinischen und triklinischen treten auch Zwillinge auf, deren Axen die Krystallaxen selbst sind. Um in diesem Falle nicht die Indices von $XYZ$

bestimmen zu müssen, führt eine zweite Methode zur Kenntniss der Lage von $X'Y'Z'$.

Setzt man den Fall, dass $X$ die Zwillingsaxe ist (Fig. 75), so ist

Fig. 75.




$$XX' = o \quad Y'X = YX \quad Z'X = ZX$$

die übrigen Distanzen ergeben sich aus den Dreiecken, wenn $\varphi$ als Function von $(\xi\eta\zeta)$ dargestellt wird, wie (100)

$$\begin{aligned} \cos X'Y &= 2 \cos \xi \cos \eta - \cos \zeta \\ \cos X'Z &= 2 \cos \xi \cos \zeta - \cos \eta \\ \cos Y'Z &= 2 \cos \zeta \cos \eta - \cos \xi \end{aligned} \tag{109}$$

Im monoklinischen Systeme vereinfacht sich diess, und für $X$ als Zwillingsaxe ist $X'Z = 180^0 - \eta$.

Bei orthogonalen Systemen fallen die Axen und Pinacoide ohnehin zusammen, daher diese Betrachtung nur auf die schiefwinkeligen Systeme beschränkt ist.

§. 68. Es sind die Indices der Axen und Flächen des zweiten Individuums, bezogen auf die Axen des ersten, zu ermitteln.

Da durch den vorigen Paragraph die Lage der Axen $X'Y'Z'$ gegen $XYZ$ bekannt ist, so ist es möglich, erstere als Normalen auf beliebige Flächen des ersten Individuums aufzufassen und mittelst Indices ihre Lage im Raume zu bestimmen, welche Indices sich dann auf die fixen, $X$, $Y$, $Z$ beziehen werden. (Das Parameterverhältniss ist, wie von selbst verständlich, für beide Krystalle dasselbe.)

Nun ist für

$$\begin{aligned} X' &: \frac{a}{x_1} \cos X'X = \frac{b}{x_2} \cos X'Y = \frac{c}{x_3} \cos X'Z \\ Y' &: \frac{a}{y_1} \cos Y'X = \frac{b}{y_2} \cos Y'Y = \frac{c}{y_3} \cos Y'Z \\ Z' &: \frac{a}{z_1} \cos ZX = \frac{b}{z_2} \cos Z'Y = \frac{c}{z_3} \cos Z'Z \end{aligned}$$

daher die Indices für

$$\begin{aligned} X_1 : x_1 &= a \cos X'X \quad x_2 = b \cos X'Y \quad x_3 = c \cos X'Z \\ Y_1 : y_1 &= a \cos Y'X \quad y_2 = b \cos Y'Y \quad y_3 = c \cos Y'Z \\ Z_1 : z_1 &= a \cos Z'X \quad z_2 = b \cos Z'Y \quad z_3 = c \cos Z'Z \end{aligned} \tag{110}$$

Da bereits die Winkel $(X'Y'Z' : XYZ)$ als $f\ (abc\ hkl\ \xi\eta\zeta)$ bekannt sind, so sind durch (110) auch die Indices gegeben, welche auf $XYZ$ bezogen sind.

Eine directe Anwendung dieses Satzes ist für die Construction des zweiten Zwillingsindividuums zu machen, welche als genauere — erfordert die Construction der Flächen $(x_1 x_2 x_3)$, $(y_1 y_2 y_3)$, $(z_1 z_2 z_3)$ — der gewöhnlichen zur Controle dienen kann.

Da ferner durch (110) die Axen von einem Individuum als Flächennormalen zum anderen dargestellt sind, so wird es hiedurch auch möglich, die Winkel zu berechnen, welche eine beliebige Fläche von einem gegen die Axen $X' Y' Z$ des zweiten Individuums bildet.

Sei nämlich $M$ $(uvw)$ eine Fläche des Krystalls $(XYZ)$ und die Winkel von $M$ gegen die Axen des zweiten $X' Y' Z'$ zu suchen, so werden vor Allem mittelst (110) die Indices von $X' Y' Z$, bezogen auf $(XYZ)$ zu suchen sein. Sind diese bekannt, so ist, da sich dann $uvw$ und $x_1 x_2 x \ldots$ auf dieselben Axen $(XYZ)$ beziehen

$$\begin{aligned} \cos MX' &= \cos (uvw)\,(x_1 x_2 x_3) \\ \cos MY' &= \cos (uvw)\,(y_1 y_2 y_3) \\ \cos MZ' &= \cos (uvw)\,(z_1\, z_2\, z_3) \end{aligned} \tag{111}$$

welche Werthe sich nach den bekannten Formeln berechnen.

Die Gleichung (111) führt zur schliesslichen Lösung des Problems, die Indices einer Fläche von $(XYZ)$ als Functionen der Axen $X' Y' Z'$ darzustellen:

Die Indices $uvw$ der obigen Fläche $M$ sind Functionen der Axen $XYZ$, es werden $u'v'w' = f\,(X' Y' Z'\ uvw)$ gesucht. Da für beide Krystalle des Zwillings das Parameterverhältniss ident bleibt, so gilt auch für $M$

$$\frac{a}{u'} \cos MX' = \frac{b}{v'} \cos MY' = \frac{c}{w} \cos MZ'$$

oder nach Substitution

$$\begin{aligned} u' &= a \cos (uvw)\,(x_1\, x_2\, x_3) \\ v' &= b \cos (uvw)\,(y_1\, y_2\, y_3) \\ w' &= c \cos (uvw)\,(z_1\, z_2\, z_3) \end{aligned} \tag{112}$$

Nach diesem Principe folgen für die Krystallsysteme nachstehende Formeln, bei welchen nur die gemeinschaftlichen Factoren weggelassen, für $M$ und $A$ aber die früher bekannten Werthe zu substituiren sind.

Aus der Lösung dieser Gleichungen erhält man $(u'v'w')$ als Functionen von $(uvw)$, da aber die Individuen I, II ident sind, so müssen diese Transformationen für den Fall $uvw$ als $f\,(u'v'w')$ Geltung haben und die Relationen zwischen den Indices der Flächen beider Individuen im Allgemeinen darstellen.

1. Triklinisches System.

$$u' = \frac{\begin{array}{l} u\,(2h^2b^2c^2\,A_1 - M_1) + v\,(2hk\;abc^2\,A_1 - \cos\zeta\,M_1) \\ + w\,(2hl\;ab^2c\,A_1 - \cos\eta\,M_1) \end{array}}{\begin{array}{l} \sqrt{[(2h^2b^2c^2\,A_1 - M_1)^2 + (2hk\;abc^2\,A_1 - \cos\zeta\,M_1)^2} \\ + (2hl\;ab^2c\,A_1 - \cos\eta\,M_1)^2] \end{array}}$$

$$v' = \frac{\begin{array}{l} u\,(2hk\;abc^2\,A_1 - \cos\zeta\,M_1) + v\,(2k^2a^2c^2\,A^1 - M_1) \\ + w\,(2kl\;a^2bc\,A_1 - \cos\xi\,M_1) \end{array}}{\begin{array}{l} \sqrt{[(2hk\;abc^2\,A_1 - \cos\zeta\,M_1)^2 + (2k^2a^2c^2\,A_1 - M_1)^2} \\ + (2kl\;a^2bc\,A_1 - \cos\xi\,M_1)^2] \end{array}} \qquad (113)$$

$$w' = \frac{\begin{array}{l} u\,(2hl\;ab^2c\,A_1 - \cos\eta\,M_1) + v\,(2kl\;a^2bc\,A_1 - \cos\xi\,M_1) \\ + w\,(2l^2a^2b^2\,A_1 - M_1) \end{array}}{\begin{array}{l} \sqrt{[(2hl\;ab^2c\,A_1 - \cos\eta\,M_1)^2 + (2kl\;a^2bc\,A_1 - \cos\xi\,M_1)^2} \\ + (2l^2a^2b^2\,A_1 - M_1)^2] \end{array}}$$

2. Monoklinisches System.

$$u' = \frac{\begin{array}{l} u\,(2h^2b^2c^2\sin^2\eta - M_2) + v\,(2hk\;abc^2\sin^2\eta) \\ + w\,(2hl\;ab^2c\sin^2\eta - \cos\eta\,M_2) \end{array}}{\begin{array}{l} \sqrt{[(2h^2b^2c^2\sin^2\eta - M_2)^2 + (2hk\;abc^2\sin^2\eta)^2} \\ + (2hl\;ab^2c\sin^2\eta - \cos\eta\,M_2)^2] \end{array}}$$

$$v' = \frac{u(2hk\,abc^2\sin^2\eta) + v(2k^2a^2c^2\sin^2\eta - M_2) + w(2kl\,a^2bc\sin^2\eta)}{\sqrt{[(2hk\,abc^2\sin^2\eta)^2 + (2k^2a^2c^2\sin^2\eta - M_2)^2 + (2kl\,a^2bc\sin^2\eta)^2]}} \qquad (114)$$

$$w' = \frac{\begin{array}{l} u\,(2hl\;ab^2c\sin^2\eta - \cos\eta\,M_2) + v\,(2kl\;a^2bc\sin^2\eta) \\ + w\,(2l^2a^2b^2\sin^2\eta - M_2) \end{array}}{\begin{array}{l} \sqrt{[(2hl\;ab^2c\sin^2\eta - \cos\eta\,M_2)^2 + (2kl\;a^2bc\sin^2\eta)^2} \\ + (2l^2a^2b^2\sin^2\eta - \mathrm{M}_2)^2] \end{array}}$$

3. Orthogonale Systeme.

In den orthogonalen Systemen bilden $(M)^2$ die Nenner von $uvw$ und dieselben können daher eliminirt werden.

*a*) Prismatisch.

$$\begin{array}{l} u' = u\,(h^2b^2c^2 - k^2a^2c^2 - l^2a^2b^2) + 2ha^2\,(vkc^2 + wlb^2) \\ v' = v\,(k^2a^2c^2 - h^2b^2c^2 - l^2a^2b^2) + 2kb^2\,(wla^2 + uhc^2) \\ w' = w\,(l^2a^2b^2 - h^2b^2c^2 - k^2a^2c^2) + 2lc^2\,(ub^2h + vka^2) \end{array} \qquad (115)$$

*b*) Orthohexagonal.

$$\begin{array}{l} u' = u\,(h^2c^2 - 3k^2c^2 - 3l^2a^2) + 6h\,(vkc^2 + wla^2) \\ v' = v\,(3k^2c^2 - h^2c^2 - 3l^2a^2) + 2k\,(uhc^2 + 3wla^2) \\ w' = w\,(3l^2a^2 - h^2c^2 - 3k^2c^2) + 2lc^2\,(uh + 3vk) \end{array} \qquad (116)$$

*c)* Pyramidal.

$$(117)\quad \begin{aligned} u' &= u\,(h^2c^2 - k^2c^2 - l^2a^2) + 2h\,(vkc^2 + wla^2) \\ v' &= v\,(k^2c^2 - h^2c^2 - l^2a^2) + 2k\,(uhc^2 + wla^2) \\ w' &= w\,(l^2a^2 - h^2c^2 - k^2c^4) + 2lc^2\,(uh + kv) \end{aligned}$$

*d)* Tesseral.

$$(118)\quad \begin{aligned} u' &= u\,(h - k^2 - l^2) + 2h\,(vk + wl) \\ v' &= v\,(k^2 - h^2 - l^2) + 2k\,(uh + wl) \\ w' &= w(l^2 - h^2 - k^2) + 2l\,(uh + kv) \end{aligned}$$

Ohne vorerst auf eine Discussion dieser Gleichungen einzugehen, erhellt, dass durch dieselben zugleich auch das Problem lösbar gemacht ist, jeden beliebigen an einem Zwilling vorkommenden Winkel zu berechnen, indem es nur nöthig wird, die Indices einer der Flächen auf das Axensystem der andern zu transformiren. Seien beispielsweise $pqr$ die Indices der Fläche $Q$ in II. Individuen bezogen auf die Axen $X'Y'Z'$, und $uvw$ von $M$ im ersten Krystalle abhängig von $XYZ$, so wird $u'v'w'$ zu bestimmen sein und hiedurch

$$\cos QM = \cos\,(pqr)\,(u'v'w')$$

wodurch, da in den Formeln nur $(abc,\ hkl,\ \xi\eta\zeta)$ enthalten, der Werth sich leichthin ergibt.

Geht man auf die Betrachtung der Gleichungen zurück, so ersieht man, dass für das triklinische und monoklinische System eine Transformation der Indices in ganze reelle Zahlen durch die Form der Gleichung ziemlich beschränkt ist. Es steht hiermit das Vorkommen in der Natur gleichsam im Zusammenhange, welches sich für beide Systeme entweder die Krystallaxen oder die Pinacoidflächen zu Zwillingsaxen wählt, um durch diese Vereinfachung möglichst reelle Transformationszahlen oder Lagen im Raume zu erzielen.

Eine Vorausberechnung der nach (113—118) transformirten Indices wäre wohl für alle bekannten Fälle möglich, doch gewährt diess nur im tesseralen Systeme Interesse, da wir hiedurch zwei einfache für alle Fälle geltenden Formeln erhalten.

Die Zwillingsaxen des tesseralen Systemes sind nämlich 1. die Normale auf (110) — 2. die Normale auf (111). Man erhält nun für

$$(119)\quad 1.\ (110)\quad \begin{aligned} u' &= v \\ v' &= u \\ w' &= -w \end{aligned}$$

$$(120)\quad 2.\ (111)\quad \begin{aligned} u' &= (-u + 2v + 2w) \\ v' &= (-v + 2u + 2w) \\ w' &= (-w + 2u + 2v) \end{aligned}$$

eine Transformation nach (120) liefert

| *uvw* | 100 | 110 | 111 | 211 | 221 | 321 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *u'v'w'* | $\bar{1}22$ | 114 | 111 | 255 | 447 | 123 |

wobei nur zu bemerken, dass die Vorzeichen der Indices berücksichtigt werden müssen.

§. 69. Durch die beiden vorhergehenden Paragraphe ist die vollständige mathematische Theorie gegeben, es erübrigt, sowohl den Charakter der Zwillingsaxen als auch die Ausbildung und das Vorkommen der Zwillinge selbst zu erörtern.

Die Zwillingsaxen, welche §. 67 und §. 68 zu Grunde gelegt sind, zeichnen sich dadurch aus, dass sie den einfachsten Indices entsprechen; allein wie schon früher erwähnt, ist es in einzelnen Fällen möglich, die Zwillinge nicht bloss durch diese, sondern auch durch eine hievon abweichende Anordnung zweier Individuen, sei diess durch Wahl eines andern Drehungswinkels oder einer anderen Zwillingsaxe zu erzeugen.

Die Annahme eines anderen Drehungswinkels, z. B. 60°, 120° ist im orthohexagonalen Systeme, in Folge der demselben innewohnenden Symmetrie möglich; bei einzelnen Fällen der schiefwinkeligen Systeme (Breithaupt bei Feldspath) versuchte man die Anwendung von Drehung von 90°, allein beides sind nur Variationen der Zusammensetzung und vollständig richtig bei gehöriger Bestimmung der Zwillingsaxe mittelst einer Drehung um 180° zu erzeugen.

Eine zweite Abweichung bildet die Annahme von äquivalenten Zwillingsaxen, d. i. jener Axen, welche durch ihre specielle Relation mit der richtigen Axe, ebenfalls mittelst einer Drehung um 180° den Zwillingskrystall zu erzeugen vermögen. Sie unterscheiden sich nur durch die geringere Einfachheit der Indices.

Diese äquivalenten Axen finden ihre Erklärung in der Vertauschung der Zusammensetzungs- und Zwillingsfläche, welche bei normaler Ausbildung auf einander rechtwinkelig sind, daher auch die äquivalenten Axen Normalen auf die eigentlichen Zwillingsaxen sind.

Naumann hat in seinem Lehrbuch der Krystallographie die Grundsätze derselben entwickelt, und seine Angaben habe ich in den nachfolgenden Zeilen beibehalten.

Liegt die Zwillingsaxe in der Ebene zweier Krystallaxen, auf welchen die dritte senkrecht steht, so ist die äquivalente Axe in derselben Ebene gelegen und senkrecht gegen die Zwillingsaxe.

In Folge dieses Satzes können als äquivalent gelten zwei Flächen der Form ($h10$) im tesseralen und pyramidalen Systeme, für letzteres und das orthohexagonale ist äquivalent mit ($okl$) die Fläche ($o, a^2l, c^2k$);

im prismatischen und monoklinischen Systeme sind äquivalente Axen:die Normalen und Parallelen zu den Domenflächen.

2. wenn die dritte und die Zwillingsaxe gleich geneigt gegen zwei gleiche Parameter sind, so kann auch jene Normale zur Zwillingsaxe als äquivalente Zwillingsaxe angenommen werden, welche in der Ebene der Zwillings- und dritten Axe liegt.

Es ergibt sich hieraus, dass im tesseralen Systeme als äquivalente Zwillingsflächen angenommen werden können für *hhl* — 2*h ll*, für *hll* — *hh* 2*l* oder 2*l hh*, im pyramidalen Systeme für *hhl* — ($a^2l$, $a^2l$, $2c^2h$).

Trotz der möglichen Supposition von äquivalenten Axen sind dennoch die reellen Zwillingsaxen meist Normalen auf Flächen mit den einfachsten Indices, und das Vorkommen in der Natur überschreitet nur selten diese Grenzen. Im triklinischen Systeme sind ausser der Normale auf (010) und (021) auch noch die Krystallaxen *XYZ* Zwillingsaxen (Albit); im monoklinischen sind die Flächen (001), (010), (*hol*), ($\bar{h}ol$), (*okl*) im prismatischen, in welchem die häufigsten Fälle aufzutreten pflegen, sind (110), (011), (101), im orthohexagonalen (001), (111), (101), im pyramidalen (101), (111), (110), im tesseralen (111) die Zwillingsflächen.

Nach diesen Gesetzen können aber nicht bloss zwei Individuen, sondern auch mehrere zu einem Ganzen verbunden sein. Ist die Zwillingsbildung nur vermehrt durch ein Hinzutreten eines dritten oder vierten Individuums, welches in genau derselben relativen Lage gegen II sich befindet, wie II zu I, so sind diess vollständig geschlossene Complexe unter dem Namen Drillinge oder Vierlinge.

Es pflegen sich noch zahlreichere Individuen zu verbinden, und diess kann dann entweder durch parallele Gruppirung der Zwillinge selbst, oder durch eine kreisförmige Verbindung der einzelnen Zwillingsindividuen, welche so lange fortgesetzt werden kann, bis das Schlussglied im Raume mit dem Anfangsgliede nahezu coincidirt (kreisförmige Verwachsung des Rutils). Die Zahl der beiden letzten Anordnung möglichen Individuen ergibt sich durch den Bruch $\frac{360°}{n}$, wobei *n* den Winkel bedeutet, welchen jedesmal das Axensystem (*X'Y'Z'*) mit einem anderen Axensysteme (*XYZ*) bildet und dem der einspringende Winkel an der Zwillingsfläche entspricht. Während letztere Fälle wirkliche Zwillinge sind, so bildet eine Repetition derselben Gestalten nur parallele Gruppirung.

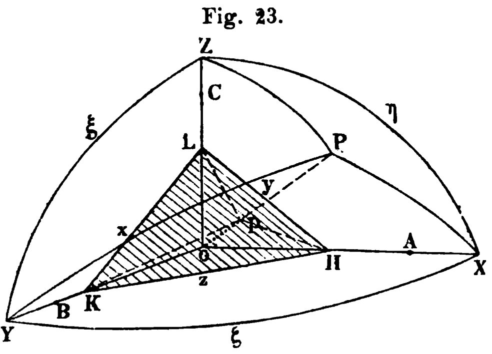
# XVII. Kapitel.

## Berechnung der Oberfläche und des Volumen.

§. 70. Der Körperinhalt jeder Form kann angesehen werden als die Summe der Volumina der von jeder Fläche als Basis mit dem Scheitel im Coordinatenmittelpunkte gebildeten Pyramiden; die Oberfläche des Körpers wird repräsentirt durch die Gesammtsumme der Flächen dieser Basen.

Es erübrigt somit nur, die Formeln für die Oberfläche einer der als Basis betrachteten Flächen aufzustellen, da einerseits das Volumen eine bekannte Function der Oberfläche und Höhe, letztere als ident mit der Länge der Flächennormale leicht bestimmbar, andererseits die Addition dieser Werthe bis zur im Systeme möglichen Flächenanzahl die für den Gesammtkörper geltende Summe liefern wird. Die Specialisirung von $(\xi\eta\zeta\ abc)$ wird die besonderen Systeme, die Specialisirung von $(hkl)$ die einzelnen Formen geben; erstere sowohl als auch letztere werde ich so weit wie möglich durchführen.

Fig. 23.




Sei in Fig. 23 das Volumen der Pyramide $(HKLO)$ zu ermitteln, so ist unter der Voraussetzung beliebiger Werthe von $(\xi\eta\zeta)$ und $(abc)$, welche letztere ident sind mit den Axenlängen $OA$, $OB$, $OC$ und $OP$ die Normale auf die Fläche $P\,(hkl)$

$$\mathrm{Vol}\,(HKLO) = \tfrac{1}{3}\,Op\,.\,\Delta\,(HKL) \qquad (121)$$

Bekanntlich ist nun

$$Op = \frac{a}{h} \cos PX = \frac{b}{k} \cos PY = \frac{c}{l} \cos PZ.$$

Die Oberfläche des Dreieckes $(HKL)$ hingegen ist

$$Ob.(HKL) = \tfrac{1}{2}\, xy \sin L =$$

$$= \tfrac{1}{2}\, xy\left(\frac{1}{xy}\sqrt{x^2y^2 - \left(\frac{x^2+y^2-z^2}{2}\right)^2}\right)$$

Entwickelt man diese Gleichung, in welcher

$$OH = \frac{a}{h} \quad OK = \frac{b}{k} \quad OL = \frac{c}{l}$$

und

$$\begin{aligned} x^2 &= OL^2 + OK^2 - 2OK.OL \cos \xi \\ y^2 &= OL^2 + OH^2 - 2OH.OL.\cos \eta \\ z^2 &= OH^2 + OK^2 - 2OH.OK.\cos \zeta \end{aligned}$$

zu substituiren ist, so folgt

$$(122)\quad Ob.(HKL) = \frac{1}{2hkl^2}\sqrt{\Big[(c^2k^2 + b^2l^2 - 2bckl \cos\xi)(c^2h^2 + a^2l^2 - 2achl \cos \eta) - (c^2hk + abl^2 \cos\zeta - ackl\cos\eta - bchl\cos\xi)^2\Big]}$$

Die Verbindung der Gleichungen (121) und (122) liefert für die einzelnen Krystallsysteme, wenn man die im vorigen Kapitel angegebenen Werthe von $A_1$ und $M_1 \ldots 6$ beibehält, folgende Formeln zur Berechnung des Volum und Oberfläche der Partialpyramide $(hkl)$; der Factor $\varphi_1 \ldots$ gibt an, wie viele Flächen im Systeme der Symmetrie zu Folge möglich sind, ist daher im triklinischen 2, im monoklinischen 4, in den orthogonalen 8; indem die höheren Symmetrieverhältnisse, wohl auch mit denselben Formeln berechenbar, doch hier ausgeschlossen und späterer Betrachtung vorbehalten bleiben müssen, da die Grundlage der Gleichung (121) war, dass jede Theilpyramide durch einen vollständigen Quadranten gebildet wird.

Es ergibt sich somit:

1. Triklinisch.

$$(123)\quad \begin{aligned} O_1 &= \frac{\varphi_1}{2hkl^2}\sqrt{\Big[(c^2k^2 + b^2l^2 - 2bckl \cos \xi)(c^2h^2 + a^2l^2 - 2achl \cos \eta) - (c^2hk + abl^2 \cos\zeta - ackl \cos\eta - bchl \cos\xi)^2\Big]} \\ V_1 &= \frac{abc\sqrt{A_1}}{3\sqrt{M_1}}\, O_1 \end{aligned}$$

2. Monoklinisch.

$$O_2 = \frac{\varphi_2}{2hkl^2} \sqrt{\left[(c^2k^2 + b^2l^2)(c^2h^2 + a^2l^2 - 2ac\,hl\cos\eta) - (c^2hk - ackl\cos\eta)^2\right]} \tag{124}$$

$$V_2 = \frac{abc}{3\sqrt{M_2}} \sin\eta\; O_2$$

3. Prismatisches Krystallsystem.

$$O_3 = \frac{\varphi_3}{2hkl^2} \sqrt{\left[(c^2k^2 + b^2l^2)(c^2h^2 + a^2l^2) - c^4h^2k^2\right]}$$

$$V_3 = \frac{abc}{3\sqrt{M_3}}\; O_3 \tag{125}$$

4. Orthohexagonales Krystallsystem.

$$O_4 = \frac{\varphi_3}{2hkl^2} \sqrt{\left[(c^2k^2 + a^2l^2)(c^2h^2 + 3a^2l^2) - c^4h^2k^2\right]}$$

$$V_4 = \frac{ac}{\sqrt{3M_4}}\; O_4 \tag{126}$$

5. Pyramidal.

$$O_5 = \frac{\varphi_3}{2hkl^2} \sqrt{\left[(c^2k^2 + a^2l^2)(c^2h^2 + a^2l^2) - c^4h^2k^2\right]}$$

$$V_5 = \frac{ac}{3\sqrt{M_5}}\; O_5 \tag{127}$$

6. Tesseral.

$$O_6 = \frac{\varphi_3}{2hkl^2} \sqrt{\left[(k^2 + l^2)(h^2 + l^2) - h^2k^2\right]}$$

$$V_6 = \frac{1}{3\sqrt{M_6}}\; O_6 \tag{128}$$

§. 71. Durch diese Formeln ist es möglich, zur Kenntniss der Volum in allen jenen Fällen zu gelangen, in welchen die Endpunkte der Partialpyramiden in den Axenebenen liegen und also einen vollständigen Octanten begreifen. Durch die höhere Symmetrie der gleichen Parameter entstehen Formen, wo in einem Octanten mehrere Flächen vorkommen und hiedurch die directe Anwendung von (126—128) unmöglich machen. Die Berechnung solcher Formen, ich erwähne die Tetracontaoctaeder, 8seitige, 12seitige Pyramiden, das Rhomboeder, Skalenoeder kann nur darauf basirt sein, die Zwischenaxen, die die Verbindungslinien des Coordinatenmittelpunktes mit den Endpunkten der Flächen, welche jedesmal in Dreiecke zerlegt werden müssen, als neue secundäre aber tri-

klinische Axen aufzufassen, deren Länge und Lage aus den bekannten Daten zu berechnen und schliesslich mittelst 122 Oberfläche und Volum bestimmen. In einzelnen Fällen, namentlich beim Vorhandensein eines symmetrischen horizontalen Durchschnitts, kann auch eine zweite Methode zum Ziele führen, welche darin besteht, die in der Coordinatenebene ($XY$) liegende Fläche als Basis und die hierauf Normale (parallel mit $Z$) als Höhe der Pyramide anzunehmen.

Einfache, aber weitläufige Rechnungen [1]) führen zur Kenntniss der hier im Nachfolgenden mitgetheilten Daten. Dieselben stimmen mit denen von Naumann in seinem Lehrbuche 1830 angegebenen überein, wenn man bedenkt, dass Naumann dieselben als unabhängig vom Parameter $a$ ($a = 1$ gesetzt) angab, während dieser in meinen Formeln berücksichtigt wird, ein Unterschied, welcher durch die Verschiedenheit der Schulen begründet ist.

Im Nachstehenden folgen die Gleichungen für die Volumina der wichtigsten Formen, da die Oberfläche hieraus nach 123—128 leicht ableitbar ist.

*a*) Tesserales Krystallsystem.

1. Holoedrische Formen:

$$(129)\quad \begin{aligned} &\text{Für } (100) & V_6 &= 8 \\ &(111) & &= \frac{4}{3} \\ &(110) & &= 2 \\ &(hko) & &= 8\,\frac{1}{h\,(h+k)^2} \\ &(hhl) & &= 4\,\frac{1}{h^2\,(2h+l)} \\ &(hll) & &= 8\,\frac{1}{h\,(h+l)\,(h+2l)} \\ &(hkl) & &= 8\,\frac{1}{h(h+k)(h+k+l)} \end{aligned}$$

2. Die geneigtflächig hemiedrischen Formen: Tetraeder, Deltoiddodecaeder, Trigondodecaeder und Hexakistetraeder.:

$$(130)\quad \begin{aligned} &\text{Für } \varkappa\,(111) & V_6 &= \frac{8}{3} \\ &\varkappa\,(hhl) & &= 8\,\frac{1}{h\,(4h^2-l^2)} \\ &\varkappa\,(hll) & &= 8\,\frac{1}{h^2\,(h+2l)} \\ &\varkappa\,(hkl) & &= 8\,\frac{1}{h\,(h+k)^2-l^2} \end{aligned}$$

[1]) Vergleiche Schrauf. Sitzungsber. der k. Academie zu Wien. 1861.

3. Die parallelflächig hemiedrischen Formen: Pentagondodecaeder und Dyakisoctaeder:

$$\text{Für } \pi\,(hko) \quad V_6 = 4\,\frac{(2h - k)}{h^3\,(h + k)} \tag{131}$$
$$\pi\,(hkl) \quad = 4\,\frac{(2h^2 - hk - hl)}{h\,(h^2 - kl)(h^2 + hk + hl)}$$

*b*) Pyramidales System.

1. Holoedrische Formen: Domen, 4- und 8seitige Pyramiden:

$$\text{Für } hol \quad V_5 = \frac{8}{3}\,\frac{a^2c}{h^2l}$$
$$hhl \quad = \frac{4}{3}\,\frac{a^2c}{h^2l} \tag{132}$$
$$hkl \quad = \frac{8}{3}\,\frac{a^2c}{hl\,(h + k)}$$

2. Geneigtflächig hemiedrische Formen: Sphenoide und tetragonale Skalenoeder:

$$\text{Für } \varkappa\,(hhl) \quad V_5 = \frac{8}{3}\,\frac{a^2c}{h^2l} \tag{133}$$
$$\varkappa\,(hkl) \quad = \frac{8}{3}\,\frac{a^2c}{h^2l}$$

3. Parallelflächig hemiedrische Form: Tetragonale Trapezoeder:

$$\text{Für } \pi\,\{hkl\} \quad V_5 = \frac{8}{3}\,\frac{a^2c}{h^2l}\,\frac{(h^2 + 2hk - k^2)}{(h + k)^2} \tag{134}$$

*c*) Orthohexagonales System.

1. Holoedrische Formen: 6- und 12seitige Pyramiden:

$$\text{Für } \{okl\} \quad V_4 = \frac{4}{\sqrt{3}}\,\frac{a^2c}{k^2l}$$
$$\{kkl\} \quad = \sqrt{3}\,\frac{a^2c}{k^2l} \tag{135}$$
$$\{hkl\} \quad = 4\sqrt{3}\,\frac{a^2c}{kl\,(h + 3k)}$$

2. Für die parallelflächig hemiedrischen Formen: Rhomboeder und Skalenoeder.

$$\text{Für } \pi\{kkl\} \quad V_4 = \frac{4}{\sqrt{3}}\,\frac{a^2c}{k^2l} \tag{136}$$
$$\pi\{hkl\} \quad = \frac{4}{\sqrt{3}}\,\frac{a^2c}{k^2l}$$

3. **Für die geneigtflächig hemiedrische Form: hexagonale Trapezoeder**

(137) $$\varkappa\{hkl\} \quad V_4 = 4\sqrt{3}\,\frac{a^2c\,(h+k)\,(3k-h)}{k^2l\,(h+3k)^2}$$

4. Für die parallelflächig tetartoedrische Form: Tritorhomboeder

(138) $$\frac{\varkappa}{2}\{hkl\} \quad V_4 = \frac{4}{\sqrt{3}}\,\frac{a^2c}{l\,(h^2+3k^2)}$$

5. Für die geneigtflächig tetartoedrische Form der trigonalen Trapezoeder

(139) $$\frac{\varkappa}{2}\{hkl\} \quad V_4 = \frac{2}{\sqrt{2}}\,\frac{a^2c}{k^2l}\,\frac{(6hk+k^2-h^2}{(h+k)^2}$$

Nur auf diese drei Systeme ist das Vorkommen von selbstständig geschlossenen Formen beschränkt. Im prismatischen Systeme haben wir ausser den möglichen Sphenoiden nur Combinationen von verschiedenen Formen. Diess ist der Grund, warum die Angabe specieller Formeln für dieses System bereits entfallen muss. Für jeden besonderen Fall einer Combination wird es nöthig, die geometrische Lage der Sectionspunkte der verschiedenen Kanten vorerst zu suchen, um hierauf die Zerlegung in Partialpyramiden vornehmen zu können.

Analog hiermit sind die Verhältnisse des monoklinischen und triklinischen Systems.

Die im Vorigen entwickelten Formeln für die speciellen Gestalten lassen auch zugleich die Relationen erkennen, welche zwischen den Volumverhältnissen verschiedener Formen von selbst verschiedenen Krystallsystemen existiren, wenn für die Werthe von $a$, $b$, $c$ die nöthigen Annahmen gemacht sind. Auf diese Weise bieten die Formeln zugleich das Mittel, auf theoretischem Wege alle die Sätze zu controlliren, welche Herr Regimentsarzt Wolf in Libin bei Prag bei der Herstellung seiner ausgezeichneten combinatorischen Krystallmodelle entwickelt hat.

Es erhellt beispielsweise augenblicklich aus den Formeln 129 und 136, dass unter der Voraussetzung (vergl. Satz 50)

$$M = 2 \qquad \mathrm{tg}\,(001)\,(111) = 63^\circ\,27'$$
$$V_4\,\varkappa\{111\} = \tfrac{1}{2}\,V_6\,(100)$$

also der Kubikinhalt zweier Rhomboeder mit dem eines Würfels coincidiren kann.

Aus der Annahme der nöthigen Bedingungen lassen sich zahlreiche und interessante Volumvergleichungen ableiten.

---

# III. Abtheilung.

## Praktische Morphologie.

# XVIII. Kapitel.

## Anleitung zum Messen der Krystallwinkel. — Theorie der Messinstrumente.

§. 72. Alle Untersuchungen auf dem Gebiete der praktischen Morphologie haben ihr Ziel darin, durch Beobachtungen an dem von der Natur dargebotenen Materiale Daten zur Berechnung zu sammeln, um durch Lösung aller Probleme ein gesetzmässiges Bild der Naturkörper sowohl durch die mathematischen Formeln und Werthe, als auch durch die krystallographische Zeichnung liefern zu können.

In Kenntniss dieses Zieles wird es auch unsere Aufgabe sein, vorerst die Messung, dann Berechnung und zum Schlusse die Constructionsmethoden zu erörtern.

Alle unsere mathematische Kenntniss der Krystalle basirt auf der genauen Bestimmung der Axenneigungen, dem Verhältnisse der Parameter und den Werthen der Indices der Flächen. In den Kapiteln der vorigen Abtheilung wurden alle Winkel am Krystalle als Functionen dieser Veränderlichen dargestellt, da aber letztere unbekannt sind, indem die Natur an den Formen nur das Vorhandensein der Winkel darbietet und uns deren Messung anheimstellt, so ist die Lösung des Problems eine entgegengesetzte.

Um zur Kenntniss der für die Bestimmung des Systems und Flächen nöthigen Daten zu gelangen, ist es daher nöthig, an Krystallen so viele Winkelwerthe zu bestimmen, als zur Lösung der Gleichungen (4), (5), (6) nach den Unbekannten $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $a$, $b$, $c$, $h$, $k$, $l$ nöthig ist. Die Zahl der Winkel ist mit der Anzahl eben der zu suchenden Unbekannten gleich, verringert sich jedoch durch eine passende Wahl der Flächencombinationen, wenn diese es erlauben, $hkl$ der Flächen nicht aus den Gleichungen 5, 6, sondern aus dem Zonenverbande und der Annahme der Grundpyramide zu berechnen.

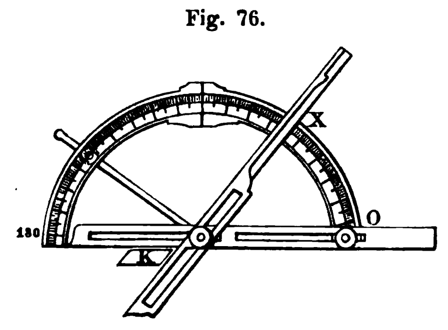
Ist eine solche Vorausbestimmung der zu messenden Winkel geschehen, was durch die theoretischen Untersuchungen der früheren Kapitel immer ermöglicht wird, so können dieselben mittelst 3 Methoden, je nach Grösse und Ausbildung der Flächen bestimmt werden. Die zwei ersten Methoden, welche den Körperwinkel direct bestimmen, sind die Anwendung von Contact- oder Reflexionsgoniometer, die letzte basirt auf mikroskopischer Messung von ebenen Kantenwinkeln.

Die Angaben der beiden ersten Instrumente unterscheiden sich jedoch, dass die Messungen mittelst Reflexionen den Winkel der Normalen, die durch Contact den inneren Körperwinkel angeben, letzterer ist 180 weniger ersterem. Ebenso verhalten sich auch die Angaben der auf diesem unterscheidenden Merkmale basirten krystallographischen, analytischen und sphärischen Rechnungen. Bei letzteren, welchen wir folgen, sind immer nur die Messungen der Normalen angegeben.

§. 73. Der allen Contactinstrumenten zu Grunde liegende Gedanke ist, den inneren Körperwinkel zweier Flächen durch eine directe Vergleichung mit einem Winkel am getheilten Kreise zu bestimmen.

Die Entwicklung dieser Methode ist so vor sich gegangen, dass man anfangs den zu messenden Krystallwinkel mit seinem Scheitel in den Mittelpunkt eines Kreises brachte, sich die Flächen verlängert dachte, bis sie die Kreistheilung erreichten und hiedurch einen ablesbaren Winkel angaben; um diese nöthige Verlängerung der Flächen genau vornehmen zu können, übertrug man den Winkel mittelst eines beweglichen Winkelhakens auf den Kreis; die schliessliche Vereinigung dieser beweglichen Schenkel mit dem Kreise selbst durch Carangeau führte zu dem jetzt unter seinem Namen bekannten Instrumente — Anlegegoniometer — welcher mit Einfachheit Genauigkeit vereinigt.

Fig. 76.




Das Instrument besteht in der jetzt gewöhnlichen Form (Fig. 76) aus dem getheilten Halbkreise, in dessen Mittelpunkte eine fixe und eine um denselben bewegliche Alhidade befestigt sind; erstere gibt den Punkt 0° und 180° an; bringt man daher den zu messenden Winkel $K$ zwischen beide, so wird die bewegliche Alhidade den Winkel $OX$ angeben, welcher dem Körperwinkel ident ist.

Die Genauigkeit, welche solche gemessene Winkel haben, ist bei Erfüllung aller noch ausführlich zu erwähnenden Bedingungen ungefähr

¼ Grad, was für die hiermit anzustrebenden Ziele, schnelle Orientirung über die Lage der Flächen mehr als genügt.

Die Genauigkeit ist hiebei im Allgemeinen davon abhängig, dass die durch die Alhidaden erzeugten Winkel mit den Flächenwinkeln ident sind, und wird daher beeinträchtigt, wenn die Schenkeln des Winkels die Flächen nicht vollständig berühren, was bei unvollkommener Ausbildung des Krystalls oder nicht verticaler Lage des letzteren gegen die Kreisebene der Fall sein muss.

Um also eine vollständige Berührung der Alhidaden mit dem Krystalle hervorzubringen, ist es nöthig, dass die Flächen möglichst eben, regelmässig ausgebildet und von bedeutender Grösse sind. Je grösser der Krystall, desto leichter und genauer wird eine Contactmessung; kleine Krystalle sind daher nahezu von dieser Methode ausgeschlossen.

Die Verticalstellung des Krystalls hingegen zur Ebene des Kreises — welche absolut nöthig ist, da nur in diesem Falle der gemessene ebene Winkel mit der Projection des Körperwinkels ident — ist von der Uebung und dem Augenmasse des Beobachters abhängig, welcher durch zahlreiche Beobachtungen die möglichen Fehler zu eliminiren trachten muss.

Um Krystalle zu messen, welche auf Drusen aufsitzen, ist der Halbkreis bei 90° gebrochen und umlegbar.

Zahlreiche Versuche von Abänderungen wurden an dem Anlegegoniometer versucht von Adelmann, Baumgartner, Breithaupt, Riese, Rudberg, allein dieselben lieferten trotz grösserer Complication des Instrumentes keine grössere Genauigkeit der Messung und wurden daher in Praxis vom ersteren in seiner einfachen Form verdrängt.

**§. 74.** Complicirter als die vorerwähnte Gruppe der Messinstrumente, aber ungleich wichtiger durch den hohen Grad der Genauigkeit der durch sie ermittelbaren Winkel sind die Reflexionsinstrumente.

Fig. 77.



Dem ersten einfachsten, von Wollaston angegebenen Instrumente liegt folgendes Verfahren zu Grunde:

Sei in Fig. 77 $MoN$ der zu messende Krystallwinkel, so wird der in der Richtung $Ao$ einfallende Lichtstrahl von der ersten Fläche nach bekannten Reflexionsgesetzen nach dem Punkte $B$ reflectirt; bringt man durch eine Drehung um die Kante $o$ als Axe die Fläche $oN$ in parallele Lage mit $oM$, nach $oN'$, so muss bei gleichgebliebener Incidenz die Reflexion parallel $oB$ vorgehen, und also auch, da nie ein Strahl, sondern ein paralleles Lichtbüschel eintritt, in den Punkt $B$, wo das fixe Auge des Beobachters gedacht werden kann,

gelangen. Um die Reflexion möglich zu machen, erfolgt somit als erste Bedingung, dass die Punkte $ABo$ in einer Ebene liegen müssen.

Gelangt also der Reflex des Fixpunktes $A$ sowohl von der ersten Fläche nach $B$, als auch von der zweiten nach einer beliebigen Drehung, so ist der Drehungswinkel $NoN' = 180^0 - NoM$, also dem Winkel der Flächennormalen ident, wodurch diese Angaben von denen der Contactinstrumente sich unterscheiden.

Um nun den Drehungswinkel zu messen, ist es nur nöthig, die Kante $o$ in die Verlängerung der Axe des Kreises zu bringen; ist mit dieser Axe zugleich ein getheilter Kreis drehbar, so wird durch eine fixe Alhidade, sowie durch die Anzeigen letzterer die Drehung des Krystalls zugleich als Drehung des Kreises um den Winkel $(ab)$ abgelesen werden können.

§. 75. Aus diesen Angaben ergeben sich für die Richtigkeit der Messung ausser der bereits erwähnten folgende Bedingungen: 1. müssen sowohl Object $A$ als auch der Beobachter $B$ während der Beobachtung in ihrer Lage unverändert verharren; 2. die Kante $o$ muss mit der Axe, d. i. Centrum des getheilten Kreises zusammenfallen, also centrirt sein; 3. die Flächen und Kanten müssen rechtwinkelig zur Ebene des Kreises, d. h. justirt sein.

Die durch Nichterfülltsein dieser Bedingungen hervorgebrachten Fehler nennen wir $dw_1$, $dw_2$, $dw_3$ und werden ihren Werth sowohl im Nachfolgenden bestimmen, als auch die Mittel angeben, dieselben zu vermeiden.

$dw_1$) Der Fehler im Winkel, welcher hervorgebracht wird durch eine Aenderung der Fixpunkte $A$ oder $B$ während der Messung um einen beliebigen Winkel $\varphi$, ist

$$dw_1 = \frac{1}{2}\varphi \tag{140}$$

denn jede Aenderung der Punkte $AB$, also der Linien $AM$, $BM$ kann identificirt werden mit einer dem Gesetze der Spiegelung zufolge halb so grossen Aenderung in der Lage von $Mo$, welche der gesuchte Fehler $dw$ ist.

Um nun diesen beim einfachen Wollaston'schen Instrumente nahezu unvermeidlichen Fehler zu eliminiren, sind von vornherein die Bestrebungen der Krystallographen gewesen.

Anfangs wurden durch Kupffer und Neumann für das Auge des Beobachters Hülfsmittel der Stabilität gesucht und diese in einem in der Richtung der reflectirten Strahlen $Bo$ rückwärts des Krystalls aufzustellenden Spiegel gefunden, dessen constanter Reflex auch mit dem Reflex von der ersten und zweiten Fläche coincidiren müsse.

Der wichtigste Fortschritt ward jedoch von **Mitscherlich** durch Einführung von Fernröhren an die Stelle von *AB* gemacht, und hiedurch die Instrumente auf einen hohen Grad der Vollendung gebracht.

In Fig. 78 ist ein nach diesen Principen gebauter Goniometer von zweckmässigster Form in seinen Umrissen dargestellt.

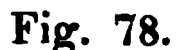
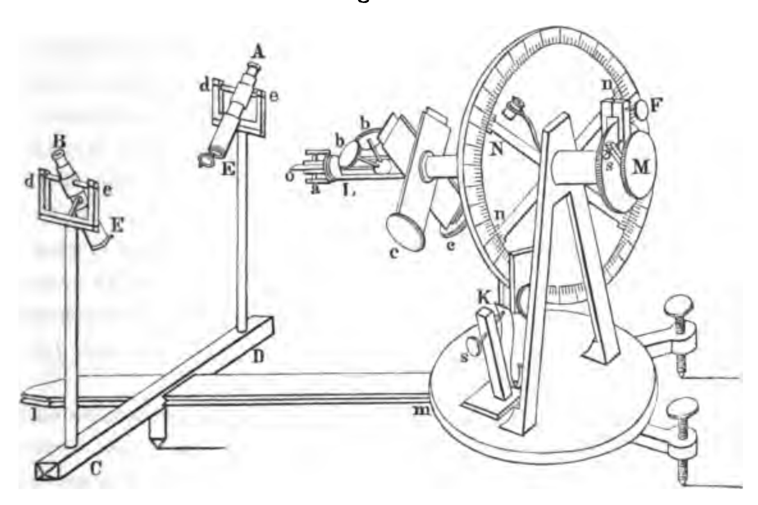


Fig. 78.




Die Fernröhre *A*, *B* sind längs des Fussgestelles *lm* parallel mit der Axe *LM* verschiebbar, um verschiedene Grössen des Krystalles *o* und Krystallträgers zuzulassen, fernerhin erlauben ihre Axen *de* eine Drehung in der Verticalebene, um beide Fernröhre so zu neigen, dass die Winkel beider gegen die Verticalebene gleich werden, damit sich dann — wegen der Gleichheit des Incidenz- und Reflexionswinkels — die im Oculare beider Fernröhre befindlichen Fadenkreuze bei Reflexion eines Lichtstrahls von der Horizontalebene decken müssen.

Mit dieser Stabilität des Beobachters und Objects und der Coincidenz der reflectirten Fadenkreuze sind die Fehler $dw_1$ auf ein Minimum reducirt, und bei Anwendung dieser Methode wohl nie in Rechnung zu bringen.

Die Einführung der Fernröhre erlaubt auch die obige Bedingung, dass *AOB* in eine Ebene fallen müssen, auf leichte mechanische Weise so zu erfüllen. Um aber weiterhin noch auf die Eliminirung des später zu erwähnenden Fehlers $dw_3$ Rücksicht zu nehmen, ist es nöthig, dass diese Ebene *AoB* zugleich der Ebene des Limbus parallel wird. Diess ist erreichbar, da die Axen *de* der horizontal gestellten Fernröhre mittelst Schrauben zur Axe *LM* zu neigen sind, bis die Fadenkreuze beider Fern-

röhre sich decken und zugleich mit terrestischem Verticalfaden correspondiren. Sind hiedurch die optischen Axen von *A*, *B* parallel, so ist es möglich, durch verticale Drehung des Instrumentes um $90^0$ und horizontales Nivelliren die Ebene des Limbus und die Ebene *AB* parallel zu stellen.

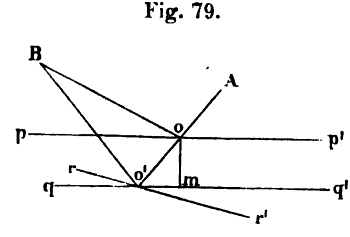
Schliesslich ist zu bemerken, dass, da durch *B* das Fadenkreuz von *A* beobachtet werden soll, die Sehweiten beider auf Unendlich gestellt sein müssen, wodurch erzielt wird, dass aus *A* parallele Strahlen austreten. In Folge dessen tragen auch *A* und *B* verschiebbare Aufstecklupen *E*, damit die Krystalle zu ihrer Centrirung gesehen werden können.

Da der Fixpunkt *A* weniger Schwankungen ausgesetzt ist, als das Auge des Beobachters, so haben einzelne Instrumente nur ein Beobachtungsfernrohr, während das Beleuchtungsfernrohr *A* durch einen fixen, entfernten Punkt, z. B. Kirchthurmspitze oder Fensterkreuz ersetzt wird.

$dw_2$) Die zweite Bedingung ist, dass die Kante des zu messenden Winkels mit der Axe zusammenfällt, damit die Reflexion an beiden Flächen vom Centrum des getheilten Kreises ausgeht, also mit dem abgelesenen Winkel identificirt werden kann.

Bei dem Instrumente Fig. 78 wird diess erreicht, wenn man den Krystall *O* auf den Krystallträger befestigt, hierauf mittelst des Fernrohres *B* und vorgebrachter Lupe die Kante der zu messenden Flächencombination mit dem Horizontalfaden des Fadenkreuzes *B* so zur Coincidenz zu bringen sucht, dass dieselbe bei jeder Drehung der Axe *LM* im Gesichtsfelde *B* constant bleibt. Hiezu dienen, sobald die erste annähernde Einstellung mit Wachs am Krystallträger aus freier Hand vollendet ist, zwei Schlitten *c*, welche in zwei gegen einander senkrechten Richtungen den vorderen Theil der Axe *Lb* parallel zum Limbus verschieben.

Fig. 79.




Der Fehler $dw_2$, welcher durch eine Excentricität der Flächen hervorgebracht wird, lässt sich folgendermassen ermitteln. Sind die Flächen $pp'$ $qq'$ in ungleicher Distanz von der Axe *o*, Fig. 79, so wird während z. B. $pp'$ mit *o* zusammenfällt, die zweite Fläche $qq'$ wohl durch eine Drehung parallel der ersten gestellt werden können, allein in der Distanz $om = d$ von der Axe. Damit also das Auge *B* von *A* Strahlen empfängt, ist es nöthig, $qq'$ bis $rr'$ zu drehen, damit $Ao'r' = Bo'r$ das Gesetz der Reflexion erfüllt ist.

Der Fehler im gemessenen Winkel ist $dw_2 = q'o'r' = \frac{1}{2}\, oBo'$; letzteres nach dem bereits bei $dw_1$ erwähnten Gesetze.

Nennt man den Incidenzwinkel $i = Aop'$, so ist $Boo' = 2i$; die Entfernung des Beobachters vom Krystalle sei schliesslich $r = Bo'$, so folgt

$$\frac{oo'}{\sin oBo'} = \frac{Bo'}{\sin Boo'}; \quad \frac{oo'}{\sin 2\,dw_2} = \frac{r}{\sin 2i}$$

$$oo' = \frac{om}{\sin oo\,m} = \frac{d}{\sin i}$$

Hieraus folgt

$$\frac{d}{r}\,\frac{\sin 2i}{\sin i} = \sin 2dw_2$$

Setzt man für $\sin 2i$ das Product von sin und cos, für den Sinus des kleinen Winkels $dw$ den Bogen, so ist

$$dw = \frac{d}{r}\cos i \tag{141}$$

Aus dieser Formel erkennt man, dass dieser Fehler bei streifender Incidenz das Maximum $\frac{d}{r}$ hat, welches mit der Vergrösserung der Entfernung des Beobachters abnimmt, und wird dieser Fehler bei auf unendliche Sehweite gerichteten Fernröhren $r = \infty$ ein verschwindendes Minimum, hingegen ohne Gebrauch derselben bei grosser Nähe des Auges von Einfluss werden.

Für das mit Fernröhren versehene Instrument hat daher die Bedingung der Centrirung nur den untergeordneten Werth, dass durch das Constantbleiben der Kante in der Mitte des Gesichtsfeldes das Erkennen der zu messenden Flächen sehr erleichtert wird.

$dw_3$) Die letzte Bedingung ist, dass die Kanten und Flächen des zu messenden Winkels senkrecht zur Ebene des Limbus sind.

Sind, wie früher bei $dw_1$, die Fernröhre parallel zum Limbus, so lässt sich diese Bedingung leicht erfüllen, indem es genügt, die Flächen senkrecht zur optischen Axe von $AB$ zu stellen.

Diese Erleichterung ist zugleich Grund, warum man die Ebene $AB$ parallel zum Limbus wählt, da bei jeder anderen Lage derselben ein complicirtes Verfahren zur Eliminirung von $dw_3$ gewählt werden müsste.

Die Methode der sogenannten Justirung besteht in nachfolgendem Verfahren. Das Fadenkreuz von $A$, reflectirt von einer Fläche des bereits centrirten Krystalls wird gesucht in $B$ zu sehen und mittelst der beiden vertical zu einander wirkenden Schrauben $b$ (Fig. 78), welche den Krystallträger in einer Nuss bewegen, so ins Gesichtsfeld zu bringen, dass die Verticalfäden sich decken, analog bei der zweiten Fläche der zu untersuchenden Combination.

Da durch diese Justirung Aenderungen in der Centrirung hervorgebracht werden, so muss neuerdings centrirt und wieder justirt werden; zwei auf einander folgende Operationen genügen meist, wenn man die Vorsicht gebraucht hat, den Krystall so zu befestigen, dass die Schrauben nahezu senkrecht gegen die Flächen — also mit ihrer Maximalleistung wirken.

Der Fehler $dw_3$, der durch die Nichterfüllung dieser Bedingungen eintritt, lässt sich mittelst der uns geläufigen Methode der sphärischen Projection leicht ermitteln.

Fig. 80.



Sei $bcb'$ die Projection der Ebene des Limbus (Fig. 80), die Linie $ac$ die Axe und beide zugleich die Coordinatenebenen der Kugel.

Jeder am Limbus gemessene Kreis wird somit ident sein mit den an der Linie $bb'$ angegebenen Werthen. Ist die Bedingung erfüllt, dass das Flächenpaar senkrecht zum Limbus oder parallel zur Axe ist, so fällt die Projection der Flächennormalen in die Coordinatenebene $bb'c$, z. B. in die Punkte $mn$. Ist hingegen eine Neigung der Flächen gegen den Limbus vorhanden, so werden die Normalen $m$ $n$ näher an $a$ rücken, jedoch so, dass der Flächenwinkel selbst constant bleibt; die Normalen rücken also so in den Zonen $mm'$, $nn'$ vor, so dass für jeden beliebigen Punkt in der Zone der Bedingung entsprochen wird

$$m'n' = pq = mn$$

Allein die Messungsdaten werden nicht constant bleiben, denn jede Messung besteht dem Wesen dieser Projection zu Folge darin, dass der Kreis um so viel gedreht wird, als benöthigt, um die Punkte rechts mit den analogen links zusammenfallen zu lassen, und dass diese Drehung gemessen wird nur an Punkten in der Linie $bcb'$. Nun wird eine Drehung um den Winkel $mn$ alle in der Zone $an$ liegenden Punkte mit den analogen in $am$ zur Coincidenz bringen, eine Drehung um $p'q'$ die Zone $aqq'$ mit $app'$ und endlich eine Drehung von $180^0$ $b$ mit $b'$ und $n'$ mit $m'$.

Man ersieht somit, dass mit der zunehmenden Neigung der Flächen gegen den Limbus das Messungsresultat eines beliebigen Winkels bis auf 180 steigen kann.

Um den Fehler $dw_3$ zu bestimmen, sei $mn$ der wahre Werth des zu messenden Winkels $W$, ferner nehmen wir an, dass die Flächen $p$ $q$ um die Winkel $v$ $v'$ gegen die Axe geneigt seien. Es wird somit nicht der Winkel $W$ am Limbus abgelesen, sondern $p'q' = paq = W'$. Da nun

$$pp' = v \qquad qq' = v'$$
$$pq = mn = W$$

so folgt aus dem Dreiecke *apq* unmittelbar

$$\cos W = \sin v \sin v' + \cos v \cos v' \cos W'$$

$$\cos W' = \frac{\cos W - \sin v \sin v'}{\cos v \cos v'} \qquad (142)$$

Sucht man nur Differenzialwerthe, so kann man in dieser Gleichung annehmen, dass die Ebene *bpqb'* nahe mit *bcb'* also der Ebene des Limbus zusammenfällt und $v$ und $v'$ nahezu gleich 0 werden, wodurch

$$\cos W - \cos W' = \sin v \sin v'$$

Löst man die Differenz der Cosinusse als Produkt der Sinusse und setzt $W$ statt $\frac{W + W'}{2}$, da $W'$ nahe gleich $W$ sein wird, so folgt

$$dw_3 = \frac{vv'}{2 \sin W} \qquad (143)$$

Nach dieser Erörterung der Fehlerquellen wird es leicht sein, die Methoden zur genauen Messung sowohl mit dem Wollaston'schen als Mitscherlich'schen Goniometer zu finden.

Der Krystall wird am Träger — der Verlängerung der Axe — mit Wachs befestigt und mit freier Hand die beiläufige Centrirung und Justirung der zu messenden Kante vorgenommen; ist diess nahezu erreicht, so wird man durch die dem Apparate beigegebenen feineren Hülfsmittel die genaue Einstellung nach den schon oben angegebenen Regeln bewerkstelligen.

Ist diess beendet, so verbindet man die Axe des Instrumentes mittelst Klemme $F$ — es ist meist die Einrichtung getroffen, dass Axe und Limbus für sich getrennt sowohl als auch verbunden zu bewegen sind, um die Einstellung des Krystalls ausführen zu können, ohne immer den getheilten Kreis zu drehen — mit dem Limbus, bringt den Reflex des Fadenkreuzes von der ersten Fläche mit dem Fadenkreuze in $B$ zur Coincidenz, liest am Nonius $N$ den Winkelwerth: hierauf dreht man, bis die zweite Fläche einspiegelt und liest nochmals ab. Die Differenz der Ablesungen ist der gemessene Winkel.

Zur Vereinfachung der Ablesung kann man durch eine Modification des Verfahrens immer bei 0° beginnen, worauf mittelst der Klemme $K$ und Mikrometerschraube $s$ immer der getheilte Kreis eingestellt werden kann.

Um die Excentricität in der Theilung des Kreises und zugleich die persönlichen Beobachtungsfehler zu eliminiren, pflegt man an zwei um 180° entfernte Nonien $nn$ abzulesen und jede Messung mehrmals zu wiederholen, und erst das Mittel dieser Messungen als den wirklichen Werth des zu suchenden Winkels anzunehmen.

Um aber mit Sicherheit auf genaue Resultate hoffen zu können, ist es im Gegensatze zu den Anlegegoniometern nöthig, bei Anwendung des Reflexionsverfahrens nur kleine Krystalle mit spiegelnden Flächen zu untersuchen. Will man hingegen die matten Flächen dennoch mittelst eines Reflexionsgoniometers messen, so kann man sich, wenn schwache Spuren eines Reflexes noch sichtbar sind, mit der Coincidenz desselben begnügen, oder man kann successive beide Flächen in eine solche Stellung bringen, dass sie sich zu einer Linie verkürzt im Gesichtsfelde projiciren; beide Verfahren werden für solche Fälle annähernd genaue Resultate liefern.

§. 76. Da Contact- und Reflexionsgoniometer nur zur Messung grösserer Krystalle dienen, erübrigt, noch im Kurzen die letzten Methoden, welche bei mikroskopisch kleinen Individuen in Anwendung zu bringen sind, zu erörtern.

Von vornherein zeigt es sich klar, dass im Mikroskope keine Körperwinkel gemessen werden können, sondern nur Winkel, welche in einer Ebene liegen. Es sind daher die drei Flächenwinkel an den einzelnen Körperecken einer Messung zu unterziehen, indem dieselben genügen, mittelst sphärischer Trigonometrie letztere — sie stehen im Verhältnisse von Winkel und Seiten — zu berechnen.

Die Bedingung, dass nur in einer Ebene liegende Winkel gemessen werden können, ist auf die Genauigkeit von ziemlichem Einfluss, da bei Nichterfüllung derselben eine Verzerrung des Bildes eintritt — sie lässt sich jedoch praktisch mittelst keiner anderen Weise erzielen, als dass man gleichmässige Deutlichkeit der Flächen und eine Verticalstellung zur optischen Axe des Rohres zu erreichen strebt, welches letztere sich aus der Projection des Bildes der Seitenflächen bestimmen lässt.

Die Messung des Flächenwinkels wird bewerkstelligt, dass entweder 1. im Oculare eine fixe Linie und am Oculare ein getheilter Kreis befindlich ist, lässt man successive beide Seiten der Fläche mittelst Drehung des Oculars mit dem fixen Faden zusammenfallen, so wird der Nonius am getheilten Kreise die Drehung und hiedurch den zu messenden Winkel angeben, oder 2. der getheilte Kreis ist am Objecttische befestigt und daher nicht das Ocular, sondern das Object selbst zu drehen.

Nach beiden Methoden wurden Instrumente gebaut, zuerst von Brewster augewendet, allein die hiedurch erzielte Genauigkeit ist gering und entzieht sich beinahe jeder Beurtheilung; diese Messungen können daher wohl nur zur allgemeinen Orientirung dienen.

In letzter Zeit hat man versucht, eine andere Methode praktisch zu verwerthen [1]), welche aus der Länge der Kanten die Winkel zu be-

[1]) Zenger. Mikroskopische Messungen an Krystallgestalten. Wien. Acad. Sitz. 1863.

rechnen versucht; wohl sind Längenmessungen mittelst eines Glasmicrometers leicht und genau, allein wenn man die in der Natur so häufigen Verzerrungen der Flächen bedenkt, wird man diese Methode für nicht genauer als die oben erwähnten halten können.

§. 77. Nachdem die vorigen Paragraphe der Theorie der Messinstrumente und der bei ihrer Benützung nöthigen Verfahren gewidmet sind, sollen nun einige Worte die Anordnung der successiven Messungen erörtern, um die zur Bestimmung der Unbekannten zweckmässigsten Methode zu wählen.

Auf Grundlage der Untersuchungen der II. Abtheilung lässt es sich voraussetzen, dass ausgebildete Krystalle wohl in ihren Hauptelementen: System und Zonenverhältnisse bereits vor der Messung erkannt werden können.

Da die Wahl der Hauptpyramide und daher die Bestimmung der Indices freigestellt oder schon bekannt, so ist für das pyramidale und orthohexagonale System nur ein Pyramidenwinkel zu bestimmen, im prismatischen genügen zwei, die Combination eines Prisma oder eines Doma oder eines dieser mit einer Pyramide; im monoklinischen Systeme sind 3 Winkel nöthig, wovon die zweckmässigsten sind die Combinationen (100) (101), (010) (111), (001) (101); endlich sind im triklinischen Systeme 5 Winkel zu messen, die Werthe der Combinationen von Flächen mit den einfachsten Indices, namentlich (001) (100), (100) (010), (001) (010), (110) (010), (011) (001).

Durch die Wahl solcher Messungen wird es bei richtiger Anwendung der theoretischen Principien möglich, alle Verhältnisse zu berechnen, welche innerhalb des durch dieselben eingeschlossenen Zonenverbandes liegen; für jede Fläche hingegen, welche ausserhalb letzterer ist, müssen zur Bestimmung ihrer Indices und ihrer Lage im Raume zwei Neigungen derselben gegen schon bekannte Flächen gemessen werden.

Sollte hingegen der Krystall nicht vollkommen ausgebildet und eine Erkenntniss seiner Form unmöglich, so führt die Verbindung der sphärischen Projection mit der Messung zum richtigen Verständniss.

Man wird am Goniometer bei jeder Messung eines Winkels durch vollständige Drehung des Krystalls zu ermitteln suchen, ob nicht noch eine oder mehrere Flächen einspiegeln, also in einer Zone mit der gemessenen Combination liegen; sind 2 Flächen justirt, so müssen, da alle Kanten einer Zone parallel sind, auch alle übrigen mit den ersten in einer Zone liegenden Flächen justirt sein. Man wird alle Winkel dieser Zone messen und in eine sphärische Projection eintragen. Indem so Schritt für Schritt gleichzeitig Zonen und Winkel ermittelt werden, erhält man ein genaues Bild des Krystalls.

Obige geringe Anzahl von Messungen genügt, um die Orientirung des Krystalls zu gewinnen; um hingegen ein Materiale zur Controlle der Genauigkeit und zur Verbesserung der Elemente zu sammeln, ist es nöthig, alle übrigen Winkel zu messen.

Will man die erzielte Genauigkeit beurtheilen, so muss der Werth, d. h. das Gewicht der einzelnen Messungen bestimmt werden. Diess geschieht, indem man den einzelnen Winkel je nach der Vollständigkeit des Reflexes an den Flächen der den Winkel bildenden Combination, die Gewichte 1, 2, 3 beilegt, so dass minder gut spiegelnde Flächen den Werth 1, hingegen die ausgezeichneten den Werth 3 erhalten.

Da man ferner voraussetzen kann, dass bei ein und demselben Beobachter jede Messung gleichmässig richtig ist, so ist in Bezug auf das Gewicht des Winkels die Zahl der Repetitionen desselben an einer und derselben Kante ohne wichtigen Einfluss, allein die Zahl der Messungen desselben Winkels an verschiedenen Kanten ist zu berücksichtigen, und die Summe derselben, jede mit ihrem Gewichte multiplicirt, gibt das Gewicht des Winkels im Systeme.

# XIX. Kapitel.

## Anleitung zum Berechnen der Krystalle.

§. 78. Sind nach den Methoden des vorigen Kapitels die Winkel des zu untersuchenden Krystalles gemessen, so ist es nächste Aufgabe des Mineralogen: aus diesen Beobachtungen mittelst der Lehrsätze der theoretischen Morphologie die Elemente des Minerals abzuleiten. Die Berechnung eines Krystalls umfasst somit die Bestimmung der Parameter, Axenneigungen und der Indices aller ausserhalb des directen Zonenverbandes liegender Flächen, und die Methoden hiezu sind doppelter Art, je nach der Anzahl der zu Grunde gelegten Beobachtungen.

Wird der Berechnung nur eine den Unbekannten gleiche Zahl zu Grunde gelegt, so erhält man Werthe in der ersten Annäherung, die den wahren desto näher kommen, je grösser der Grad der Genauigkeit der Messungen ist; allein die aus diesen Elementen berechneten übrigen Krystallwinkel werden gegen die Messungen grössere oder geringere Differenzen zeigen. Um diese Differenzen zu einem Minimum zu machen, wird es nöthig sein, mittelst aller gemessenen Winkel die früher erhaltene erste Annäherung der Elemente zu verbessern.

Man pflegt sich auf die erste directe Methode zu beschränken, welche bei guter Wahl der als bekannt anzunehmenden Winkel und in Folge der durch Reflexionsgoniometer an glänzenden Flächen erreichbaren hohen Grad der Genauigkeit nahezu absolut richtige Elemente liefert.

Zur definitiven Lösung des Problems: die Fehler zwischen Beobachtung und Rechnung zum Minimum zu machen, ist jedoch die zweite Methode anzuwenden, welche man Krystallberechnung mittelst Methode der kleinsten Quadrate nennen kann.

Um hingegen Abnormitäten im Krystallbau zu erkennen, ist nur erstere Methode die richtige, denn dieselbe gibt eben durch ihre Differenzen an, dass der Bau des Krystalls nicht absolut homogen, sondern

einzelne Winkel nach verschiedenen Parametersystemen gebildet sind; die letztere Methode gibt wohl durch das Zusammenfassen aller Beobachtungen das theoretische Mittel dieser verschiedenen Parameter, allein verwischt hiedurch die Spuren der Unregelmässigkeiten im Baue.

Es ist daher begründet, wenn man — theoretische Untersuchungen ausgenommen — zur Ermittlung der morphologischen Elemente an Krystallen, deren Flächen vollkommen spiegeln, nur die directe Methode anwendet, und die zweite Methode nur bei solchen Species, deren Flächen schlecht ausgebildet und undeutlich spiegelnd sind.

§. 80. Die directe Methode ist darauf gegründet, aus den sphärischen Dreiecken, welche durch den Zonenverband auf der Kugelprojection gebildet werden, jene Stücke zu berechnen, welche in Verbindung mit einigen theoretischen Gleichungen genügen, die Parameter und Axenneigungen abzuleiten.

Die fortwährend nöthigen Formeln zur Berechnung des Dreieckes sind im Nachfolgenden zusammengestellt, wobei $a$, $b$, $c$ die Seiten und $A$, $B$, $C$ die denselben (vergl. beifolgendes Schema) gegenüberliegenden Winkel sind.

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & b & & c & \\ C & & a & & B \end{array}$$

(144) I. Schiefwinkelige sphärische Dreiecke.

1. Bekannt $a.b.c$

$$\sin {}^1/_2 A = \sqrt{\frac{\sin {}^1/_2 (a + b - c) \sin {}^1/_2 (a + c - b)}{\sin b \sin c}}$$

$$\cos {}^1/_2 A = \sqrt{\frac{\sin {}^1/_2 (a + b + c) \sin {}^1/_2 (b + c - a)}{\sin b \sin c}}$$

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$\cos A = \operatorname{cotg} b \operatorname{tg} {}^1/_2 (c + x)$$

$$\cos B = \operatorname{cotg} a \operatorname{tg} {}^1/_2 (c - x)$$

$$\operatorname{tg} {}^1/_2 x = \operatorname{tg} {}^1/_2 (b + a) \operatorname{tg} {}^1/_2 (b - a) \operatorname{cotg} {}^1/_2 c$$

2. Bekannt $a.b.C$

$$\sin c \sin B = \sin b \sin C$$

$$\sin c \cos B = \sin a \cos b - \cos a \sin b \cos C$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

$$\operatorname{cotg} A = \frac{\operatorname{cotg} a \sin b - \cos b \cos C}{\sin C}$$

$$\operatorname{cotg} B = \frac{\operatorname{cotg} b \sin a - \cos a \cos C}{\sin C}$$

$$\operatorname{tg} {}^1/_2 (A + B) = \frac{\cos {}^1/_2 (a - b)}{\cos {}^1/_2 (a + b)} \operatorname{cotg} {}^1/_2 C$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(a - b)}{\sin \tfrac{1}{2}(a + b)} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} C$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a \cos C$$

$$\operatorname{cotg} A = \frac{\operatorname{cotg} C \sin (b - x)}{\sin x}$$

$$\cos c = \frac{\cos a \cos (b - x)}{\cos x}$$

3. Bekannt $a$, $b$. $A$

$$\sin B = \frac{\sin A \sin b}{\sin a}$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(a - b)}{\cos \tfrac{1}{2}(a + b)} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(A + B)$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(A + B)}{\cos \tfrac{1}{2}(A - B)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a + b)$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{cotg} A}{\cos b} \qquad \cos (C - x) = \frac{\operatorname{tg} b \cos x}{\operatorname{tg} a}$$

$$\operatorname{tg} y = \cos A \operatorname{tg} b \qquad \cos (c - y) = \frac{\cos a \cos y}{\cos b}$$

4. Bekannt $a$, $A$. $B$

$$\sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A}$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(a - b)}{\cos \tfrac{1}{2}(a + b)} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(A + B)$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(a + b)}{\cos \tfrac{1}{2}(a - b)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a + b)$$

$$\operatorname{cotg} x = \cos a \operatorname{tg} b \qquad \sin (C - x) = \frac{\cos A \sin x}{\cos B}$$

$$\operatorname{tg} y = \cos B \operatorname{tg} a \qquad \sin (c - y) = \frac{\operatorname{tg} B \sin y}{\operatorname{tg} A}$$

5. Bekannt $c$. $A$. $B$

$$\cos C = \sin A \sin B \cos c - \cos A \cos B$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a + b) = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(A - B)}{\cos \tfrac{1}{2}(A + B)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a - b) = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(A - B)}{\sin \tfrac{1}{2}(A + B)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c$$

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} C = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(a + b)}{\sin \tfrac{1}{2}(a - b)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A - B)$$

$$\operatorname{cotg} a = \frac{\operatorname{cotg} A \sin B + \cos B \cos c}{\sin c}$$

$$\operatorname{cotg} b = \frac{\operatorname{cotg} B \sin A + \cos A \cos c}{\sin c}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{cotg} A}{\cos c}$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} c \cos x}{\cos (B - x)}$$

$$\cos C = \frac{\cos A \sin (B - x)}{\sin x}$$

6. Bekannt $A, B, C$

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

$$\sin {}^1/_2\, a = \sqrt{\frac{-\cos {}^1/_2 (A + B + C) \cos {}^1/_2 (B + C - A)}{\sin B \sin C}}$$

$$\cos {}^1/_2\, a = \sqrt{\frac{\cos {}^1/_2 (A + B - C) \cos {}^1/_2 (A + C - B)}{\sin B \sin C}}$$

$$\operatorname{tg} {}^1/_2\, x = \operatorname{tg} {}^1/_2 (B + A) \operatorname{tg} {}^1/_2 (B - A) \operatorname{tg} {}^1/_2\, C$$

$$\cos a = \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} {}^1/_2 (C - x)$$

$$\cos b = \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} {}^1/_2 (C + x)$$

(145) **II. Rechtwinkelige sphärische Dreiecke.** $A = 90^0$.

1. Bekannt $a, b, A$

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b} \qquad \sin B = \frac{\sin b}{\sin a} \qquad \cos C = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}$$

2. Bekannt $a, A, B$

$$\sin b = \sin a \sin B, \quad \operatorname{tg} c = \cos B \operatorname{tg} a, \quad \operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{cotg} B}{\cos a}$$

3. Bekannt $b, c, A$

$$\cos a = \cos b \cos c, \quad \operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c}, \quad \operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{tg} c}{\sin b}$$

4. Bekannt $b, A, B$

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}; \quad \sin c = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} B}; \quad \sin C = \frac{\cos B}{\cos b}$$

5. Bekannt $b, A, C$

$$\cos B = \cos b \sin C; \quad \operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} b}{\cos C}; \quad \operatorname{tg} c = \sin b \operatorname{tg} C$$

6. Bekannt $A, B, C$

$$\cos a = \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C, \quad \cos b = \frac{\cos B}{\sin C}, \quad \cos c = \frac{\cos C}{\sin B}$$

(146)

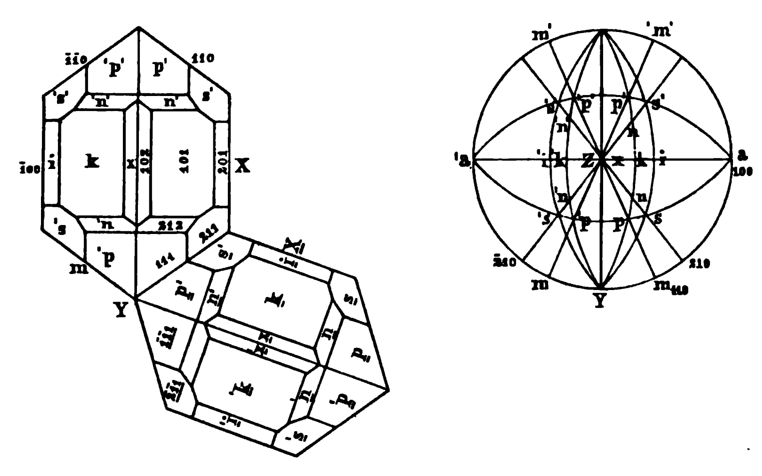
| | |
|---|---|
| $\sin(90^0 \pm \alpha) = \cos\alpha$ | $\mathrm{tg}(90^0 \pm \alpha) = \mp \mathrm{cotg}\,\alpha$ |
| $\sin(180 \pm \alpha) = \mp \sin\alpha$ | $\mathrm{tg}(180 \pm \alpha) = \pm \mathrm{tg}\,\alpha$ |
| $\sin(270 \pm \alpha) = -\cos\alpha$ | $\mathrm{tg}(270 \pm \alpha) = \mp \mathrm{cotg}\,\alpha$ |
| $\sin(360 \pm \alpha) = \pm \sin\alpha$ | $\mathrm{tg}(360 \pm \alpha) = \pm \mathrm{tg}\,\alpha$ |
| $\cos(90 \pm \alpha) = \mp \sin\alpha$ | $\mathrm{cotg}(90 \pm \alpha) = \mp \mathrm{tg}\,\alpha$ |
| $\cos(180 \pm \alpha) = -\cos\alpha$ | $\mathrm{cotg}(180 \pm \alpha) = \pm \mathrm{cotg}\,\alpha$ |
| $\cos(270 \pm \alpha) = \pm \sin\alpha$ | $\mathrm{cotg}(270 \pm \alpha) = \mp \mathrm{tg}\,\alpha$ |
| $\cos(360 \pm \alpha) = \cos\alpha$ | $\mathrm{cotg}(360 \pm \alpha) = \pm \mathrm{cotg}\,\alpha$ |

§. 81. Die Methoden der Berechnung mögen zwei Beispiele praktisch darstellen, welche dem prismatischen und triklinischen Systeme entnommen sind.

*a*) Prismatisches System: Arragonit.

Sei der zu untersuchende Krystall in Fig. 81, 82 projicirt, so lehrt der einspringende Winkel, um dessen Zusammensetzungsfläche beide

Fig. 81. Fig. 82.




Individuen symmetrisch gruppirt sind, das Vorhandensein eines Zwillingskrystalls, sowie die Symmetrie des Individuums mit dem rechtwinkeligen Zonenverbande auf ein prismatisches System hinweisen.

Um das Individuum I vollständig zu definiren, legen wir der Berechnung die Winkel

$$am = 58^0\ 5' \quad ak = 54^0\ 13'$$

und die Indices *a* (100) *m* (110) *k* (101) zu Grunde.

Aus dem Charakter des prismatischen Systems folgt hieraus
$Y$ (010) $Z$ (001)

Bestimmt man aus diesen bekannten Indices und dem Zonenverbande die Indices der Flächen, so ist für die Durchschnitte der Zonen

(010 101) (001 110) $p = 111$
(100 111) (110 101) $s = 211$
(100 101) (010 211) $i = 201$
(111 101) (211 001) $n = 212$
(110 212) (100 101) $x = 102$

Geht man zur Berechnung der Winkel der Domen über, so ist in Folge des Verhältnisses der Indices

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{tg}\; xa = 2\;\mathrm{tg}\; ia = \mathrm{tg}\; ka; \quad ia = 34^0\, 45' \quad xa = 70^0\, 11$$

Aus dem Dreiecke $Zkp$ folgt

$$pZ = 53^0\, 44' \quad pk = 43^0\, 11'$$

aus dem Dreiecke $apm$

$$ap = 64^0\, 46'$$

aus den Indices ferner

$$\mathrm{tg}\; nY = 2\;\mathrm{tg}\; pY \qquad \mathrm{tg}\; pa = 2\;\mathrm{tg}\; sa$$
$$\mathrm{tg}\; pZa = 2\;\mathrm{tg}\; sZa$$

$$nY = 64^0 51' \quad nk = 25^0\, 9' \quad sa = 46^0 42' \quad sZa = 38^0 45'$$

aus den Dreiecken $siZ$ und $sZa$

$$si = 33^0\, 24' \quad sZ = 61^0\, 35'$$

aus dem Dreiecke $nak$ und $\mathrm{tg}\; sZ = 2\;\mathrm{tg}\; nZ$

$$nZ = 42^0\, 45' \quad na = 58^0\, 2'$$

Das Parameterverhältniss ist nach der bekannten Gleichung (2) dem Verhältnisse der reciproken Werthe der Cosinusse $PX$, $PY$, $PZ$ gleich, woraus sich für vorliegende Species bei Annahme von $p = 111$ ergibt

$$a : b : c = 2.3457 : 1.4610 : 1.6908$$

oder reducirt man $b$ auf die Einheit

$$a : b : c = 1.6055 : 1 : 1.1546.$$

Nach der Bestimmung der Flächen des Krystalls kann man zur Ermittlung des Zwillingsgesetzes übergehen.

Die Beobachtung lehrt, dass die Flächen $am$ beider Individuen in eine Zone fallen und die Flächen $a\underline{a}$ machen den einspringenden Winkel $116^0\, 10'$. Nach den bekannten Gesetzen ist nun $\frac{1}{2} a\underline{a} = 58^0\, 5'$, der Winkel von $a$ oder $\underline{a}$ zur Zwillingsfläche, wodurch nach dem bekannten

Werthe $am = 58^0\ 5'$ genau ermittelt ist, dass die Zwillingsfläche eine Fläche des Prisma (110) ist.

Versucht man eine Transformation der Indices des Individuums II, um zugleich die Lage der Axen $X'Y' - Z'$ ist parallel mit $Z$ — zu bestimmen, so folgt, dass $(\underline{100})$ mit (450) und $(\underline{010})$ mit (13, 4, 0) parallel ist.

*b*) Triklinisches System: Albit.

Seien die Indices der am Zwillinge Fig. 83 beobachteten Flächen $b'$ $(0\bar{1}0)$, $Z'$ $(1\bar{2}0)$, $M'$ $(1\bar{1}0)$, $P$ $(001)$, $o$ $(\bar{1}\bar{1}1)$, $x$ $(\bar{1}01)$ und zugleich die an dieser Species in einfachen Krystallen, Fig. 84 gemessenen Winkel

$$MM' = 58^0\ 15' \quad b'M' = 60^0\ 20'$$
$$PM = 65^0\ 10' \quad Pb = 86^0\ 24' \quad Po = 57^0\ 32'$$

Fig. 83.

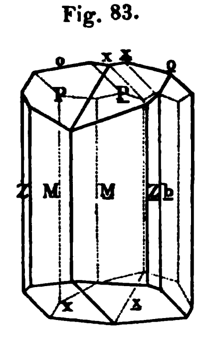
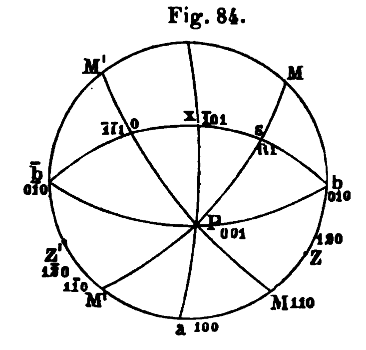


Fig. 84.




Aus Satz 34 folgt, wenn für $PQRS$ des Lehrsatzes gesetzt wird, $P = b$, $Q = M$, $S = a$, $R = M'$

$$\text{cotg } ba = \tfrac{1}{2} (\text{cotg } bM - \text{cotg } M b') \quad ba = 90^0\ 42'$$

Aus dem Dreiecke $PMB$ folgt

$$MbP = 63^0\ 35' \quad PMb = 99^0\ 59'$$

aus dem Dreiecke $Pab$

$$Pab = 85^0\ 33' \quad aP = 63^0\ 42' \quad bPa = 92^0\ 39'$$
$$180^0 - PM - oP = o'M' = 57^0\ 18'$$
$$180^0 - PMb = P'M'b' = o'M'b' = 80^0\ 1'$$

aus dem Dreiecke $'M'ob'$ folgt

$$'M'b'o = 63^0\ 58' \quad b'o = 67^0\ 15'$$

aus dem Dreiecke $'M'oa$

$$'M'ao = 64^0\ 30' \quad a'o = 66^0\ 40'$$

Da nun $o$ $(\bar{1}\bar{1}1)$ vollständig orientirt gegen $abc$ ist, so kann nach (98) hieraus das Parameterverhältniss gerechnet werden, welches sich ergibt zu 0.6284 : 1 : 0.5556.

Die Axenneigung folgt aus dem Dreiecke $aPb$, zu welchem das Dreieck $XYZ$ das Polardreieck ist. $\xi\ \eta\ \zeta$ berechnen sich nach (7) aus den Seiten zu

$$\xi = 94^0\ 22' \quad \eta = 116^0\ 24' \quad \zeta = 87^0\ 26'$$

Von den zahlreichen Zwillingsgesetzen des Albits ist in Fig. 83 das Wichtigste hervorgehoben; es besteht in einer Aneinanderlagerung zweier Individuen, welche die Lage der Flächen bezüglich oben und unten, vorn und rückwärts wohl constant lässt, allein die Neigung der Fläche $P$ gegen $b$ wird geändert.

Die Zusammensetzungsfläche scheint schon mit freiem Auge parallel ($b$) zu sein, indem die Flächen beider Individuen $bP\underline{P}\underline{b}$ und $bZ'M'\underline{M'}\underline{Z'}\underline{b}$ Fig. 83 Zonen bilden. Messungen ergeben nun sowohl den Parallelismus von $b\underline{b}$, als auch, dass der einspringende Winkel in der Zone $bP\underline{P}\underline{b} = 7^0\ 12' = 2\ (180 - 86^0\ 24') = 2\ (180 - Pb)$ ist, daher als Zwillingsfläche vollständig genau $b$ (010) resultirt.

§. 81. Die mittelst der directen Berechnung erhaltenen Daten werden jedoch, wenn von einer Species zahlreiche Beobachtungen vorliegen, nicht mit allen derselben stimmen, sondern je nach der Richtigkeit der Annahme mehr oder minder grosse Abweichungen zeigen.

Um über das Gewicht dieser Differenzen entscheiden zu können, muss vorerst Gewicht und Werth der Messungen selbst angegeben werden.

Jeder Winkel ward bereits bei der Messung je nach Deutlichkeit des Reflexes mit dem Gewichte 1, 2, 3 versehen. Zur Berechnung einer Species wird das arithmetische Mittel aller mit ihrem Gewichte multiplicirten Winkel — nicht Messungen — der gleichwerthigen Kanten eingeführt. Die wiederholten Messungen an ein und derselben Kante können hier kaum in Betracht gezogen werden, da wohl der als Mittel derselben bestimmte Winkel theoretisch genauer ist, als jede einzelne Messung; allein die Praxis lehrt, dass diese Differenz der einzelnen Bestimmung vom Mittel mehrerer bei einem gewandten Beobachter ein Minimum ist, so dass die Zahl der Messungen nicht gleichwerthig mit den obigen Gewichten, und nur ein sehr geringer Bruchtheil derselben ist.

Das Gewicht der nach obigem Gesetze berechneten Winkel beträgt daher die Summe der Gewichte der an verschiedenen gleichwerthigen Kanten gemessenen Winkel, und diese Gewichte bilden zugleich die Factoren der Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung. Sind letztere ihrem Gewichte nach von Bedeutung, so wird mittelst der Methode der kleinsten Quadrate aus denselben die Verbesserung der zu ihrer Berechnung angewendeten und in erster Näherung bekannten Elemente angestrebt werden müssen.

Um diess Ziel zu erreichen, muss jede Differenz zwischen Beobachtung und Rechnung als eine Function der Veränderungen der Elemente aufgefasst, und daher zur ersten Berechnung dieser Differenz genäherte Werthe von $abc\ \xi\eta\zeta$ angenommen werden; die Durchführung der Methode liefert dann die Werthe der Veränderungen, welche an diesen postulirten $abc\ \xi\eta\zeta$ anzubringen sind, damit Beobachtung und Rechnung aller Beobachtungen möglichst genau stimme.

Im allgemeinsten Falle, wo 6 Unbekannte auftreten, wird die Function wohl complicirt erscheinen, allein sind einige der Variabeln constant, wie in den orthogonalen Systemen, so vereinfachen sich bedeutend die im Nachfolgenden gegebenen allgemeinen Formeln. Der Gang der Methode ist folgender:

Die allgemeine Relation zwischen Winkel und Axen ist durch die Gleichung (16) gegeben, welche auch unter der Form geschrieben werden kann

$$\cos W = \frac{L}{M^{1/2} N^{1/2}} \tag{147}$$

Das Total-Differenziale hiervon ist

$$\sin W\, dW = 1/2 \frac{L dM}{M^{1/2} N^{1/2} M} + 1/2 \frac{L dN}{M^{1/2} N^{1/2} N} - \frac{dL}{N^{1/2} M^{1/2}}$$

$$dW = 1/2 \frac{\operatorname{cotg} W}{M} dM + 1/2 \frac{\operatorname{cotg} W}{N} dN - \frac{\operatorname{cotg} W}{L} dL$$

oder wenn man

$$\mathfrak{A} = 1/2 \frac{\operatorname{cotg} W}{M} \quad \mathfrak{B} = 1/2 \frac{\operatorname{cotg} W}{N} \quad \mathfrak{C} = \frac{\operatorname{cotg} W}{L} \tag{148}$$

setzt, so ist

$$dW = \mathfrak{A} dM + \mathfrak{B} dN - \mathfrak{C} dL$$

$LMN$ sind bekannte Functionen von $abc\,\xi\eta\zeta$, das Totale-Differenzial ist die Summe der Differenziale nach den einzelnen Variabeln, daher man obige Gleichung auch umschreiben kann in

$$dW = (\mathfrak{A}\, d_a M + \mathfrak{B}\, d_a N - \mathfrak{C}\, d_a L)\, d_a + (\mathfrak{A}\, d_b M + \mathfrak{B}\, d_b N - \mathfrak{C}\, d_b L)\, d_b \ldots$$

oder, wenn man die nach diesem Gesetze gebildeten Coëfficienten $ABC\ XYZ$ nennt

$$dW = A da + B db + C dc + X d\xi + Y d\eta + Z d\zeta \tag{149}$$

Um diese Gleichung vollständig auszuwerthen, sind nur noch die Partial-Differenziale von $LMN$ zu bilden, da

$$
\begin{aligned}
A &= \mathfrak{A}\, d_a M + \mathfrak{B}\, d_a N - \mathfrak{C}\, d_a L \\
B &= \mathfrak{A}\, d_b M + \mathfrak{B}\, d_b N - \mathfrak{C}\, d_b L \\
C &= \mathfrak{A}\, d_c M + \mathfrak{B}\, d_c N - \mathfrak{C}\, d_c L \\
X &= \mathfrak{A}\, d_\xi M + \mathfrak{B}\, d_\xi N - \mathfrak{C}\, d_\xi L \\
Y &= \mathfrak{A}\, d_\eta M + \mathfrak{B}\, d_\eta N - \mathfrak{C}\, d_\eta L \\
Z &= \mathfrak{A}\, d_\zeta M + \mathfrak{B}\, d_\zeta N - \mathfrak{C}\, d_\zeta L
\end{aligned} \tag{150}
$$

Die Werthe der einzelnen Summanden von (150) sind, wenn

$$
\xi\eta\zeta = \cos\xi - \cos\eta\cos\zeta;\quad \eta\xi\zeta = \cos\eta - \cos\xi\cos\zeta;\quad \zeta\eta\xi = \cos\zeta - \cos\eta\cos\xi \tag{151}
$$

bedeutet, in nachfolgenden Formeln dargestellt:

$$
\begin{aligned}
d_a M &= 2k^2ac^2 \sin^2\eta + 2l^2b^2a \sin^2\zeta - 2hlb^2c\ \eta\xi\zeta - 4klabc\ \xi\eta\zeta \\
&\qquad - 2hkbc^2\ \zeta\eta\xi \\
d_a N &= 2q^2c^2a \sin^2\eta + 2r^2ab^2 \sin^2\zeta - 2prb^2c\ \eta\xi\zeta - 4qrabc\ \xi\eta\zeta \\
&\qquad - 2pqbc^2\ \zeta\eta\xi \\
d_a L &= 2kqac^2 \sin^2\eta + 2lrab^2 \sin^2\zeta - (hr + pl)\, b^2c\ \eta\xi\zeta \\
&\qquad - 2\,(kr + ql)\, abc\ \xi\eta\zeta - (hq + pk)\, bc^2\ \zeta\xi\eta \\
d_b M &= 2h^2bc^2 \sin^2\xi + 2l^2a^2b \sin^2\zeta - 4hlabc\ \eta\xi\zeta - 2kla^2c\ \xi\eta\zeta \\
&\qquad - 2hkac^2\ \zeta\eta\xi \\
d_b N &= 2p^2bc^2 \sin^2\xi + 2r^2a^2b \sin^2\zeta - 4prabc\ \eta\xi\zeta - 2qra^2c\ \xi\eta\zeta \\
&\qquad - 2pqac^2\ \zeta\eta\xi \\
d_b L &= 2hpbc^2 \sin^2\xi + 2lra^2b \sin^2\zeta - 2\,(hr + pl)\, abc\ \eta\xi\zeta \\
&\qquad - (kr + ql)\, a^2c\ \xi\eta\zeta - (hq + pk)\, ac^2\ \zeta\eta\xi \\
d_c M &= 2h^2b^2c \sin^2\xi + 2k^2a^2c \sin^2\eta - 2hlab^2\ \eta\xi\zeta - 2kla^2b\ \xi\eta\zeta \\
&\qquad - 4hkabc\ \zeta\eta\xi \\
d_c N &= 2p^2b^2c \sin^2\xi + 2q^2a^2c \sin^2\eta - 2prab^2\ \eta\xi\zeta - 2qra^2b\ \xi\eta\zeta \\
&\qquad - 4pqabc\ \zeta\eta\xi \\
d_c L &= 2hpb^2c \sin^2\xi + 2kqa^2c \sin^2\eta - (hr + pl)\, ab^2\ \eta\xi\zeta \\
&\qquad - 2\,(kr + ql)\, a^2b\ \xi\eta\zeta - 2\,(hq + pk)\, abc\ \zeta\xi\eta \\
d_\xi M &= 2h^2b^2c^2 \sin\xi\cos\xi + 2abc \sin\xi\, [kla - hlb\cos\zeta - hkc\cos\eta] \\
d_\xi N &= 2p^2b^2c^2 \sin\xi\cos\xi + 2abc \sin\xi\, [qra - prb\cos\zeta - pqc\cos\eta] \\
d_\xi L &= 2hpb^2c^2 \sin\xi\cos\xi + abc \sin\xi\, [(kr + ql)\, a - (hr + pl)\, b\cos\zeta \\
&\qquad - (hq + pk)\, c\cos\eta] \\
d_\eta M &= 2k^2a^2c^2 \sin\eta\cos\eta + 2abc \sin\eta\, [hlb - kla\cos\zeta - hkc\cos\xi] \\
d_\eta N &= 2q^2a^2c^2 \sin\eta\cos\eta + 2abc \sin\eta\, [prb - qra\cos\zeta - pqc\cos\xi] \\
d_\eta L &= 2kqa^2c^2 \sin\eta\cos\eta + abc \sin\eta\, [(hr + pl)\, b - (kr + ql)\, a\cos\zeta \\
&\qquad - (hq + pk)\, c\cos\xi] \\
d_\zeta M &= 2l^2a^2b^2 \sin\zeta\cos\zeta + 2abc \sin\zeta\, [hkc - hlb\cos\xi - kla\cos\eta] \\
d_\zeta N &= 2r^2a^2b^2 \sin\zeta\cos\zeta + 2abc \sin\zeta\, [pqc - prb\cos\xi - qra\cos\eta] \\
d_\zeta L &= 2lra^2b^2 \sin\zeta\cos\zeta + abc \sin\zeta\, [(hq + pk)\, c - (kr + ql)\, a\cos\eta \\
&\qquad - (hr + pl)\, b\cos\xi]
\end{aligned} \tag{152}
$$

Durch Ermittlung dieser Grössen sind alle Glieder der Gleichung 149 bestimmt und das Differenziale der Winkel von den 6 Veränderlichen abhängig gemacht. Für das Differenziale der Winkel lässt sich aber die Differenz $\Delta$ aus dem gemessenen Winkel $W'$ und dem gerechneten $W$ einführen; es erhellt somit, dass wir $da\ db \ldots$ aus diesen bekannten $\Delta$ bestimmen können, um hiedurch $a.b.c\ \xi\eta\zeta$. zu verbessern und eben $\Delta$ zu einem Minimum zu machen.

Ist die Anzahl $n$ Winkel vorhanden, so werden $n$ Gleichungen aufzustellen sein der Form

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= A_1\, da + B_1\, db \ldots \\ \Delta_2 &= A_2\, da + B_2\, db \ldots \\ &\vdots \\ \Delta_n &= A_n\, da + B_n\, db \ldots \end{aligned} \tag{153}$$

und jede dieser Gleichungen ist mit dem der Messung zukommenden Gewichte zu multipliciren.

Sind aus diesen Formeln (153) die Unbekannten möglichst genau zu bestimmen, so muss erstens die Zahl $n$ grösser als die der Variabeln, zweitens die Quadratsumme der nach Bestimmung von $da \ldots$ noch überbleibenden Fehler (Differenz des ersten und zweiten Theiles der Gleichung) ein Minimum, daher dessen Differenzial Null sein.

Hiedurch erhält man $n$ Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} &[\Delta_1 - (A_1\, da + B_1\, db \ldots)]\ d\,(A_1\, da + B_1\, db \ldots) = 0 \\ &\vdots \\ &[\Delta_n - (A_n\, da + B_n\, db \ldots)]\ d\,(A_n\, da + B_n\, db \ldots) = 0 \end{aligned} \tag{154}$$

Führt man die angezeigten Differenziationen aus, wobei zu bemerken, dass die primären $da\ db \ldots$ nicht als Differenziale, sondern als Unbekannte zu behandeln sind, und ordnet die erhaltenen Werthe nach den Unbekannten, so folgt

$$\begin{aligned} &\Sigma.\Delta A - \Sigma A^2 da - \Sigma ABdb - \Sigma ACdc - \Sigma AXd\xi - \Sigma AYd\eta \\ &\qquad - \Sigma AZd\zeta = 0 \\ &\Sigma\,\Delta B - \Sigma ABda - \Sigma B^2 db - \Sigma BCdc - \Sigma BXd\xi - \Sigma BYd\eta \\ &\qquad - \Sigma BZd\zeta = 0 \\ &\Sigma\,\Delta C - \Sigma CAda - \Sigma BCdb - \Sigma C^2 dc - \Sigma CXd\xi - \Sigma CYd\eta \\ &\qquad - \Sigma CZd\zeta = 0 \\ &\Sigma\,\Delta X - \Sigma AXda - \Sigma BXdb - \Sigma CXdc - \Sigma X^2 d\xi - \Sigma XYd\eta \\ &\qquad - \Sigma XZd\zeta = 0 \\ &\Sigma\,\Delta Y - \Sigma AYda - \Sigma BYdb - \Sigma CYdc - \Sigma XYd\xi - \Sigma Y^2 d\eta \\ &\qquad - \Sigma YZd\zeta = 0 \\ &\Sigma\,\Delta Z - \Sigma AZda - \Sigma BZdb - \Sigma CZdc - \Sigma XZd\xi - \Sigma YZd\eta \\ &\qquad - \Sigma Z^2 d\zeta = 0 \end{aligned} \tag{155}$$

wobei $\Sigma$ die Summe aller nach den angedeuteten Gesetzen gebildeten Combinationen der Coefficienten $A_1 B_1 \ldots A_n B_n \ldots$ bedeutet.

Aus den 6 Gleichungen (155) sind auf dem gewöhnlichen Wege der Algebra die Unbekannten $da\ db \ldots$ zu suchen, welche die Verbesserung der ursprünglich zur Berechnung von $W$ angenommenen Elemente bilden.

Die mittelst der Methode der kleinsten Quadrate verbesserten Elemente sind sodann $a \pm da$, $b \pm db$, $c \pm dc$, $\xi \pm d\xi$, $\eta \pm d\eta$, $\zeta \pm d\zeta$; und diese werden die Eigenschaft besitzen, die Differenzen zwischen den gemessenen Winkeln und den mit Zugrundelegung von obigen Elementen neu gerechneten Werthen zu einem Minimum zu machen.

Die Methode der kleinsten Quadrate dient ferner noch dazu, die Indices einer einzelnen, ausserhalb des Zonenverbandes liegenden Fläche auf Grund mehrfacher Messungen absolut genau zu bestimmen. Eine directe Methode, basirt auf die zu diesem Zwecke zu transformirenden Formeln der §§. 42 und 43 kann in solchen Fällen nur durch öftere Versuche der Winkelberechnung mit hypothetischem $hkl$ jene Werthe der Indices angeben, welche sich den Messungen annähernd anschliessen. Absolute Werthe können nur dann erreicht werden, wenn analog den Gleichungen 147—155 die Veränderungen von $hkl$ bei constanten $abc\ \xi\eta\zeta$ gesucht werden.

Wir erhalten hier statt 149 die Gleichungen

$$dW = \mathfrak{H}dh + \mathfrak{K}dk + \mathfrak{L}dl \tag{156}$$

wo $\mathfrak{H}\mathfrak{K}\mathfrak{L}$ analog 150 durch reihenweise Differenziation von $LMN$ nach $hkl$ entsteht. Die Aufstellung der den Gleichungen 152—155 ähnlichen Gleichungen löst das Problem und liefert die wahren Werthe $h \pm dh$, $k \pm dk$, $l \pm dl$. Die Methode gewährt jedoch in Rücksichtnahme auf ihre schwierige Durchführung dem praktischen Mineralogen wenig Gewinn, da die erste directe Methode in meisten Fällen sehr genaue Resultate liefert, und ist daher nur für theoretische Untersuchungen oder für Fälle, wo zahlreiche aber schlechte Beobachtungen vorliegen, von Wichtigkeit.

# XX. Kapitel.

## Ueber die Construction der Krystalle.

§. 82. Um die gemachten Beobachtungen und Bestimmungen an einem Krystalle, seine Ausbildung und körperlichen Verhältnisse klar und übersichtlich darzustellen, erübrigt endlich durch geometrische oder mechanische Construction ein Bild desselben zu geben. Die Methoden, diess zu erreichen, kann man unterscheiden in solche, 1. welche auf geometrische Zeichnung basirt sind, 2. in solche der vollständigen körperlichen Nachbildung mittelst Modelle.

Erstere zerfällt I. in die schematische Construction, welche nur Aufschluss über die Winkelverhältnisse gibt und II. in die perspectivische Zeichnung, welche eine wirkliche Abbildung des Krystalls ist.

1. I. Unter schematischen Projectionen versteht man jene Zeichnungen, welche durch Anordnung von Punkt und Linie in der Ebene die relative Lage der Flächen und den Zonenverband darzustellen versuchen. Zwei Methoden, welche als Neumann-Miller's sphärische, Neumann's gnomonische Projection bezeichnet werden, sind mehr oder minder in Gebrauch, wovon jedoch die erstere durch die mathematische Einfachheit, den Connex mit den physikalischen Verhältnissen und ihre übersichtliche Darstellung weitaus den ersten Rang einnimmt. Eine dritte Methode ist Quenstedt's lineare Projection, welche pag. 242 erörtert wird.

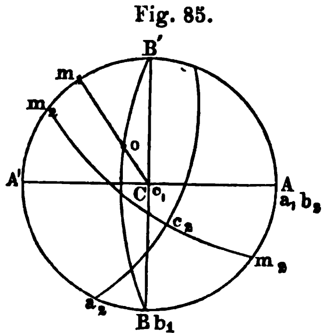
*a*) Die Neumann-Miller'sche Kugelprojection ist bereits allen unseren bisherigen Untersuchungen zu Grunde gelegt und daher theoretisch genügend bekannt; es erübrigt nur die Zeichnung derselben und die Eintragung der Flächennormalen anzugeben.

Die Normalen der Flächen sind auf die Kugeloberfläche bezogen und die Zonen werden durch die grössten Kreise gebildet, welche jene Normalorte verbinden; hiedurch wird bestimmt, dass, wenn man die

obere Kugelhälfte auf ihren horizontalen Durchschnitt projicirt, der Umfang einen Kreis, die grössten Kreise der Zonen hingegen Ellipsen sind. In der Construction pflegt man die Zonen, indem die Differenz nur am Endpunkte der Zonenaxe bedeutend wird, nicht als Ellipsen, sondern als Kreisbögen darzustellen, welche durch die in der Peripherie des Grundkreises liegenden Endpunkte der Zonenaxen und die Normalenorte gezogen sind; in Zeichnungen in grösserem Massstabe sind hingegen die Ellipsen beizubehalten.

Durch den Mittelpunkt $C$ und zwei rechtwinkelige Diameter, $AA'$ $BB'$ wird gleichsam ein orthogonales Coordinatensystem repräsentirt, dessen dritte Axe in dem Punkte $c$ verkürzt erscheint. Ist der Krystall selbst orthogonal, so wird $ABC$ mit $XYZ$ und $a(100)$ $b(010)$ c $(001)$ zusammenfallen. Bei schiefwinkeligen Systemen pflegt man den Punkt $A$ (Fig. 85) mit $b_2$ (010) und die Zone $ab$ (100)(010) mit dem Grundkreise zusammenfallen zu lassen, wodurch die Verhältnisse sich einfach und übersichtlich gestalten. Die Lage von $a_2$ wird mittelst des Winkels $ab$, die von $c_2$ mittelst Zonenverbandes gefunden. Die Axen $XYZ$ pflegt man nicht anzugeben.

Fig. 85.




Die in der Projection erscheinenden Distanzen der Flächen stehen mit den Winkeln in folgender Relation. Winkel, welche der Zone des Grundkreises angehören, ergeben sich direct als Theile der Peripherie, für Zonen, welche von der Peripherie zum Centrum laufen und deren Projection eine gerade Linie ist, z. B. *Com* ist die lineare Distanz jedes Normalortes vom Mittelpunkte gleich dem Sinus des Winkels beider letzterwähnten.

Der Werth des Sinus kann, wie leichthin erhellt, auf constructivem Wege gefunden werden, wenn man von einem Pole der Zonenaxe den betreffenden Winkel auf der Peripherie aufträgt und diesen Punkt mit dem zweiten Pole der Axe verbindet. Der Durchschnitt dieser Linie mit der Zone ist der Normalort.

Annähernd richtig wird die Zeichnung, wenn man statt der Werthe des Sinus die Winkel selbst setzt und das Verhältniss der gesuchten Länge, z. B. *Co* zum Radius mit dem Verhältnisse der Winkel $Co : 90^0$ identificirt. Der dadurch begangene Fehler ist in der Nähe der Peripherie am grössten, daher bei grösserer Darstellung unerlaubt.

Aus dem bisher Gesagten folgt, dass, um einen Normalort anzugeben, für dieselbe zwei Winkel nöthig sind, welche sich entweder auf zwei Diagonalzonen oder auf eine Diagonalzone und den Grundkreis

beziehen müssen; der Durchschnitt der durch die Winkel bestimmten Zonen ist der Punkt der Normale.

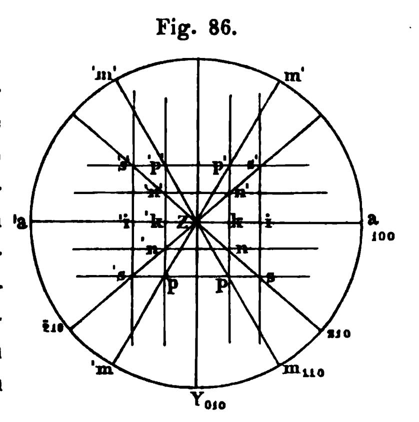
Sollte eine sphärische Projection eines Zwillings zu construiren sein, so ist das einfachste Verfahren, um ein möglichst vollständiges Bild darzustellen, die Zwillingsfläche mit einer Diagonalzone zusammenfallen zu lassen, wodurch gleichsam jeder Projectionshälfte ein Krystallindividuum zugetheilt erscheint.

*b*) Bei Neumann's gnomonischer Projection werden nicht die Durchstosspunkte der Normalen mit der Kugel, sondern mit der Projectionsfläche selbst in Betracht gezogen, wodurch alle Zonen als Linien erscheinen.

Während daher bei der früheren Methode die Distanzen in den Diagonalzonen dem Sinus der Winkel entsprachen, so sind dieselben hier, wie leicht ersichtlich, der Tangente proportional, da aber das Maximum des Sinus $= 1$, das der Tangente $= \infty$ ist, so wird hiedurch unmöglich gemacht, mit dieser Projection ein vollständiges Bild einer Krystallhälfte zu geben, da bereits alle grösseren Winkel mit der zur Projectionsebene senkrechten Axe sehr grosse lineare Distanzen zu ihrer Darstellung erfordern. Man pflegt daher, um die Verticalzone darstellen zu können, die Projection mit einem Kreise zu begrenzen und für die Pyramiden selbst eine willkürliche Einheit der Distanz anzunehmen.

Die Zonen erscheinen alle als Linien, und man pflegt wie früher für die Hauptschnitte die bezeichnendsten Zonen zu wählen. (Vergleiche die Projection des Arragonit Fig. 86 mit Fig. 82.) Projicirt man den Krystall auf eine gegen die drei Axen geneigte Ebene, so kann die Projection auch zur Herstellung einer perspectivischen Zeichnung benützt werden, da die Normalen zu den Zonen die Combinationskanten der Flächen repräsentiren.

Fig. 86.




§. 83. 1. II. Während es Aufgabe der schematischen Projectionen ist, bloss Winkel und Zonenverhältnisse zu versinnlichen, ist es Ziel der perspectivischen Zeichnung, ein vollständiges Bild des Habitus des Krystalls zu liefern und hiermit zugleich die Erfüllung der Bedingung zu vereinen, dass auch die Darstellung der hiebei vorkommenden Winkel und Kanten den geometrischen Gesetzen conform ist.

Man hat diese Darstellung versucht, von den gemessenen Winkeln selbst ausgehend, allein da diess complicirt ist und manche Zwischen-

rechnung nöthig macht, ist man allwärts bei der axinometrischen Methode geblieben, welche den Krystall aus den Axen und den durch ihre Indices bekannten Flächen aufbaut.

Da von diesen beiden nur die Axen als das die Lage bestimmende Element auftreten, so hängt auch von der gewählten perspectivischen Lage derselben die Deutlichkeit der Construction ab, sowie auch die Erfüllung der Bedingung, möglichst viele Flächen zur Anschauung zu bringen.

Würde in der Zeichnung, wie bisher in den theoretischen Untersuchungen sowohl als auch in der sphärischen Projection eine Axe dem Beschauer direct zugekehrt sein, so würde das Bild derselben zu einem Punkt verkürzt und alle ihr parallelen Flächen nur als Kanten erscheinen. Da aber man bestrebt ist, auch diese Flächen in einem willkürlich bestimmbaren Verhältnisse zur seitlichen Axe *aa* ausgedehnt zu erhalten, so ist es nöthig, dem Axenkreuze eine Drehung in der Horizontalebene zu geben (Declination $\delta$) und zugleich dem Beschauer zuzuneigen (Elevation $\varepsilon$). Hiedurch steht der Krystall eigentlich nicht mehr in der Zeichnungsebene, sondern tritt mit einem Ende dem Beschauer entgegen.

Die Wahl des Declinations- und Elevationswinkels hängt von der Willkür des Zeichners ab, und so kann man hierbei zwei Schulen unterscheiden: die französische, welche eine Drehung von links nach rechts annimmt und die deutsche, welche das Axenkreuz im Sinne rechts nach links wendet. Die Constructionen nach letzterer Methode zeichnen sich durch ihre gefällige Form aus, namentlich wird das Auge durch das dem Schriftgebrauch analoge von links nach rechts laufen der vorderen Axe bestochen, daher dieselbe auch die meiste Anwendung findet.

Im rhomboedrischen Systeme ward jedoch bisher noch immer eine zweite Axenaufstellung angewendet; im Nachfolgenden jedoch werden alle Formen — den Grundsätzen der Theorie analog — von einem orthogonalen Axensysteme hergeleitet, welches auch der Construction der schiefen Krystallaxen zur Basis dient.

Um die Methode genau darzustellen, ist es vor Allem nöthig, die Werthe des Declinations- und Elevationswinkels zu fixiren. Die Bestimmung derselben hängt davon ab, wie das relative Grössenverhältniss der Projectionen der Parameter $a$ und $b$ gewählt werden soll.

Dreht man diess ursprüngliche Axenkreuz, Fig. 87, in welchem die vordere Axe $b$ mit dem Mittelpunkte coincidirt, in der Horizontalebene um den Winkel $\delta$ nach den Punkten $a'b'$, so werden die Projectionen der Linien $Oa' = Oa$, $Ob' = Ob$ auf die Ebene, die Linien $Oe$ und $Oc$ sein, wobei

$$Oe = Oa \cos \delta \qquad Oc = Ob \sin \delta$$

Führt man nun die Bedingung ein, dass für gleich grosse Axen — also die Einheit des Parametersystems — diese Projectionen der Axen

$a$ und $b$ in einem beliebigen Verhältnisse $1 : r$ stehen sollen, so ist

$$Oc = \frac{1}{r} Oe, \qquad \cos \delta = r \sin \delta$$

daher

$$\cotg \delta = r. \tag{157}$$

Der Werth von $r$ wird meist gleich 3 angenommen, wodurch $\delta = 18^0\, 26'$ wird.

Um die Elevation zu bestimmen, neige man die bereits gewendeten Axen gegen den Beschauer, wodurch die Axen aus ihrer Lage $b'\, a'$ nach $b^2\, a^2$ rücken, und Projectionen dieser neuen Punkte auf die Verticalebene nach $m$ und $o$. Die Grösse dieser Abweichungen von der ersten Lage, d. i. $b'b^2$, $a'a^2$ werden desto grösser sein, je weiter die Endpunkte $a'\, b'$ von der Verticalebene entfernt sind, analog hiermit auch die Projectionen dieser Linien auf die Verticalebenen $cm$ und $eo$.

Fig. 87.



Nun folgt aus der Figur 87, welche der Deutlichkeit halber mit Verziehung der Linien gezeichnet ist, wenn $cb'm = \varepsilon$ und $bob' = \delta$ bezeichnet

$$eo = \sin \delta \operatorname{tg} \varepsilon, \qquad cm = \cos \delta \operatorname{tg} \varepsilon$$

Stellt man die Bedingung, dass auch diese Abweichung ein aliquoter Theil, $\frac{1}{s}$ der Axe sei, so folgt aus

$$cm = \frac{1}{s} c; \quad \sin \delta \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{r} \cos \delta\right)$$

$$\cotg \varepsilon = sr. \tag{158}$$

Man pflegt für $s$ Werthe nahe an 8 zu postuliren, wodurch $\varepsilon \doteq 6 - 7^0$ erfolgt.

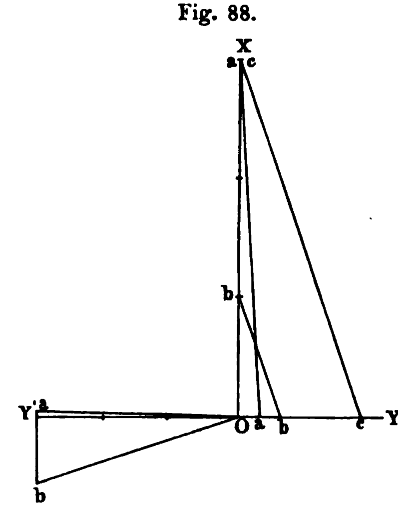
Um ohne weitläufige Rechnung direct bloss durch Construction von Dreiecken Länge und Lage für die Einheit eines orthogonalen Axensystems zu finden, dienen folgende Gleichungen, denen analoge Werthe von $r$ und $s$ zu Grunde liegen.

Für die Lage von
$$\begin{aligned} c;\ & y = o \\ b;\ & x = {}^1\!/_3 y \\ a;\ & x = -\, {}^1\!/_{18} y \end{aligned} \tag{159}$$

Für die Länge
$$\begin{aligned} c &= \sqrt{(3^2 + 1)} \\ b &= \sqrt{\left(1 + \tfrac{1}{3^2}\right)} \\ a &= \sqrt{\left(3^2 + \tfrac{1}{6^2}\right)} \end{aligned} \tag{160}$$

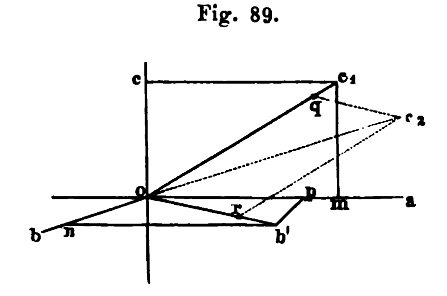
Durch diese Gleichungen ist, wie Fig. 88 zeigt, Lage und Länge des Parametersystems fixirt. Aus dieser Einheit der Parameter kann das für eine beliebige Species geltende Axenkreuz abgeleitet werden, wenn man die hier angenommenen Längeneinheiten mit den Werthen *a b c* multiplicirt.

Fig. 88.



Ebenso leicht ist der Uebergang von diesem orthogonalen Systeme zu schiefwinkeligen Axen, welcher ebenfalls an der Einheit der Parameter vorzunehmen ist. Ist die Neigung $\varphi$ der schiefen Axe gegen eine der orthogonalen, so wird ihre Lage und Länge im Raume bekannt, wenn man auf die beiden orthogonalen Axen ihre Projection aufträgt, d. i. $\cos \varphi$ und $\cos(90 - \varphi) = \sin \varphi$. Die Diagonale des durch diese Werthe gebildeten Parallelogramms gibt Lage und Länge für die Einheit der geneigten Axe und durch successive Befolgung dieses Principes werden, wie Fig. 89 zeigt, die 3 geneigten Axen construirt.

Fig. 89.



§. 84. Ist auf diese Weise die perspectivische Aufstellung des Axenkreuzes vollendet, so kann bei einfachen Krystallen zur Construction übergegangen werden, die Zwillingskrystalle erfordern jedoch, man pflegt das Individuum I. normal, das II. hingegen gewendet darzustellen, die Methoden zur Bestimmung der Axen $X'Y'Z$ für II.

Die Lage von $X'Y'Z'$ kann nach Kap. 16 gefunden werden, indem man dieselben als Normalen auf Flächen des Individuums I betrachtet und durch die Indices bestimmt. Will man nicht diesen Weg, welcher einige Rechnung voraussetzt, durchführen, so kann eine Construction zu gleichem Ziele führen.

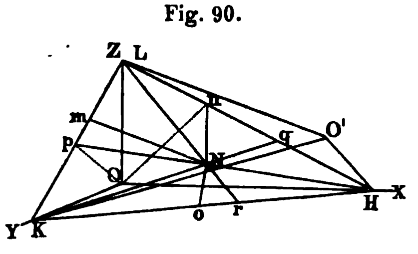
Aus der Theorie der Zwillinge ist es nämlich bekannt, dass die Zwillingsfläche in einer solchen Relation zu beiden Axensystemen steht, dass die Endpunkte derselben in die Durchschnitte je zweier gleich-

uamigen Axen fallen, und dass die Indices ident bleiben, wenn auch $XYZ$ mit $X'Y'Z'$ vertauscht wird; ebenso ist auch die Länge der Normalen von jedem der beiden Axenmittelpunkte auf diese Fläche gleich.

Die Construction des Systems II wird daher darauf gegründet, nach vollständiger Aufstellung von $XYZ$ die Zwillingsfläche zu zeichnen, ihre Normale zu verlängern bis $O'N = ON$; die Verbindungslinien des Punktes $O'$ mit den Endpunkten $HKL$, der Zwillingsfläche $(hkl)$ sind die neuen Axen mit dem Parameterverhältnisse $\frac{a}{h}, \frac{b}{k}, \frac{c}{l}$ und daher mit $hkl$ zu multipliciren, um die Einheit des Systems II zu erhalten.

Für die geometrische Ausführung ist es von Wichtigkeit, mittelst leichter Hülfsconstruction die Lage des Punktes $N$, Fig. 90, auf der Fläche $HKL$ zu finden.

Fig. 90.

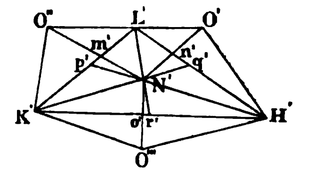



Die nachfolgende Methode ist darauf gegründet, dass der Normalort $N$ der Durchschnitt ist der Flächen $NOn$, $NOm$, $NOo$, welche gebildet sind durch die vom Mittelpunkte $O$ auf die Kantenlinien der Fläche gezogenen Senkrechten $Om$.. und durch die in der Fläche selbst liegenden Normalen auf diese Senkrechten $Nm$..

Diese Hülfsconstructionen müssen, um von dem Drehungs- und Elevationswinkel unabhängig zu sein, in der Ebene durchgeführt werden.

In Folge der Kenntniss von $\xi\eta\zeta$ $abc$ $hkl$ ist es möglich, die Dreiecke $HOK$, $HOL$, $KOL$ zu construiren, da die Länge von zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel bekannt ist; die dritten Seiten, welche das Analogon zu $HK$, $HL$, $KL$ sind, erfolgen hieraus, und aus diesen lässt sich ein Dreieck bilden, welches der Fläche $HKL$ entspricht. Ordnet man diese Dreiecke, wie sie Fig. 91 zeigt, zieht die Normalen von den Punkten $O'$ $O''$ $O'''$, welche $O$ entsprechen, so ist der Durchschnitt derselben der Punkt $N'$.

Fig. 91.




Um die Uebertragung dieses von $H'K'L'$ auf $HKL$ in Fig. 90 zu ermöglichen, so zieht man die Linien $H'N'p'$, $K'N\,q'$, $L'N'r'$, theilt hierauf die Linien $HK$, $HL$, $KL$ in demselben Verhältnisse wie $H'K'$, $H'L'$, $K'L'$ durch die Punkte $p'q'r'$ getheilt wird, also nach den Verhältnissen

$$Hq : HL = H'q' : H'L'; \quad Hr : HK = H'r' : H'K'; \quad Kp : KL = K'p' : K'L'.$$

Durch diess Verfahren werden in Fig. 90 die Punkte $pqr$ und durch die Verbindungslinien derselben mit $H$, $K$, $L$ ihr Durchschnittspunkt — der gesuchte Punkt $N$ — bekannt.

Diese Hülfsconstruction, hier im Allgemeinen für die Pyramide durchgeführt, vereinfacht sich, wenn einer der Indices Null wird, indem dann nur eines der Dreiecke, z. B. fürs Doma $hol$ — $H'O'L'$ zu zeichnen ist; ferner der durch die Normale $O'$ auf $H'L'$ gegebene Punkt $n'$ genügt, um auch die Linie $HL$ im bekannten Verhältnisse zu theilen und hiedurch den Ort von $n$ — er ist zugleich der von $N$ — zu finden.

Sind hingegen Pinacoidflächen die Zwillingsflächen, so muss die Neigung der Axen von II berechnet und dieselben wie schiefwinkelige Axen eingetragen werden.

§. 85. Das weitere Verfahren von der Aufstellung der Axen bis zur vollständigen perspectivischen Zeichnung des Krystalls ist bei dieser axinometrischen Methode leicht und gründet sich auf successive Zeichnung der Flächen und Combinationskanten.

Die Zeichnung der Flächen beruht auf dem bekannten, schon im I. Kapitel angeführten Verhältnisse der Indices zu den Parametern.

Da $\left(\frac{a}{h}, \frac{b}{k}, \frac{c}{l}\right)$ die von der Fläche $hkl$ abgeschnittenen Parametertheile sind, so wird umgekehrt die Fläche entstehen, wenn die Endpunkte der durch die Indices nach diesem Gesetze angegebenen Axenabschnitte verbunden werden, oder wenn, ist einer der Indices gleich Null die Fläche parallel der correspondirenden Axe gelegt wird.

Die Zeichnung der Sectionslinien einer Flächencombination wird nach dem Grundsatze angeführt: Die Combinationskante zweier Flächen wird gebildet durch die Verbindungslinie der Durchschnittspunkte der Seiten. Um zwei Flächen immer so in Combination zu bringen, ist es oft nöthig, eine derselben durch paralleles Hinausschieben der Seiten zu vergrössern.

Fig. 92.

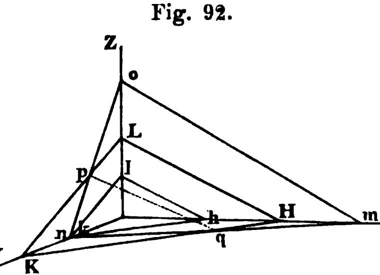



Fig. 92 gibt ein Beispiel hievon an der Combination der Flächen $hkl$ und $mno$. Wird erstere vergrössert bis $HKL$, so erfolgen Durchschnitte bei $p$ und $q$.

Die Verbindungslinie $pq$ ist somit die Combinationskante, und die durch die Combination dieser zwei Pyramiden entstehende Figur ist — da einspringende Winkel nur an Zwillingen vorkommen können — durch die Flächen ($npq$) ($pqHL$) eingeschlossen.

Jede der zahlreichen Combinationskanten eines Krystalls ist nach diesem Principe direct an der Figur oder auf einem Hülfsblatt zu construiren. Die Durchführung einzelner Beispiele wird über die auftretenden Formen leicht Aufschluss geben.

§. 76. 2. Die letzte Methode der künstlichen Nachbildung der krystallographischen Verhältnisse besteht in dem Erzeugen einer vollständigen körperlichen vergrösserten Copie, dem Modelle des untersuchten Krystalls, und kann auf zweifache Weise vor sich gehen.

Die erste directe Methode besteht darin, aus einem schneidbaren Materiale, Holz, Gyps... allmälig die gesuchte Flächencombination herzustellen, indem man von dem Würfel beginnend allmälig zu den complicirteren Formen vorschreitet, dieselben durch Schneiden oder Anfeilen erzeugt und so lange in der Lage corrigirt, bis die bekannten Krystallwinkel auch am Modelle vorhanden sind. Eine Schneidmaschine mit der Vorrichtung, dass der Holzklotz horizontal, das Schneidmesser hingegen mittelst zwei Knien in den beiden zwei anderen Coordinatenebenen drehbar, und diese Drehungen an getheilten Kreisen ablesbar sind, vereinfacht diess Verfahren auf die mechanische Einstellung von Winkeln und die Führung des Schneidemessers. Naumann hat bereits 1830 eine ähnliche Maschine beschrieben.

Während ein schneidbares Material dieses directe Verfahren zulässt, erfordert die Herstellung von Modellen aus Pappe eine indirecte, auf die Kenntniss der ebenen Winkel und Längen der Seiten basirte Methode: die Herstellung der Krystallnetze.

Unter Netz verstehen wir im Allgemeinen die vollständig symmetrisch nach den ebenen Flächenwinkeln vollzogene Gruppirung aller Flächen in der Zeichnungsebene, und man wird sich das hiebei einzuschlagende Verfahren vorstellen, wenn man bedenkt, dass das Netz des Würfels aus 6 Quadraten, jedes in der Grösse einer Würfelfläche, besteht, welche so gruppirt sind, dass 4 unmittelbar an einander gereiht sind, während rechtwinkelig hierauf zu beiden Seiten eines derselben das fünfte und sechste Quadrat gezeichnet erscheint. Um am Modelle die Flächen in der richtigen Grösse zu erhalten, ist es nöthig, für alle die ebenen Winkel und Längen der Combinationskanten und Seiten zu ermitteln und dieselben successive so ins Netz einzutragen, dass je eine Linie die Combinationskante zweier Flächen darstellt.

Wird das Netz zusammengelegt, so ist der durch dasselbe umschlossene Raum das gewünschte Modell.

# XXI. Kapitel.

## Die Bezeichnungsmethoden der krystallographischen Schulen.

§. 87. Die Phasen der Entwicklung, welche die Krystallographie durchmachen musste, um auf den hohen Standpunkt der Vollkommenheit zu gelangen, begründeten mehrfache Schulen.

Vielfach wird dieser Mangel an Einigkeit als ein Fehler getadelt, wohl bedingt das Verstehen krystallographischer Untersuchungen die Kenntniss der Sprache mehrerer Schulen, allein die Rivalität zwischen den einzelnen Schulen, deren jede die höchste Vollendung anstrebte, brachte die Wissenschaft zur Blüthe.

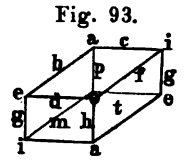
Da die einzelnen Schulen nicht bloss in ihren Berechnungsmethoden, sondern auch in ihrer krystallographischen Sprache von einander abweichen, letztere aber zum Verständniss der Literatur nöthig ist, so muss auch die praktische Morphologie die Vergleichung derselben umfassen.

Die den Bezeichnungsmethoden zu Grunge liegenden Anschauungen gliedern sich vor Allem je nach der Ableitung von den secundären Formen in atomistische und axinometrische. Erstere, zu denen Haüy und Mohs gehören, leiten von den Grundgestalten alle Flächensymbole her, letztere hingegen direct von den Axen, theilen sich aber je nach Anwendung der Mathematik in analytische — Weiss, Naumann — und in eine sphärische. Letzterwähnte haben in Miller ihren wichtigsten Repräsentanten, doch unterscheidet sich seine Ausführung derselben von der in diesem Werke durchgeführten durch zwei wichtige Veränderungen: Bestimmung der Winkel als directe Function der Axen und Einführung eines orthogonalen Parametersystems im hexagonalen Systeme. Letztere Aenderung unterscheidet zugleich vorliegende Theorie von allen bisher angegebenen krystallographischen Methoden.

§. 88. Als Gründer der in Frankreich üblichen atomistischen Anschauungen haben wir schon eingangs Haüy erwähnt und gezeigt, dass er die Krystallgestalten aus Molecülen aufbaute, welche die Grundgestalten seiner Systeme bildeten, dennoch ist die Deduction von einem Parallelepiped beibehalten worden, dessen Seiten und Diagonalen mit unseren Axen in einfachem Verhältnisse sind, und eine leichte Transformation der Symbole gestatten.

Als allgemeine Grundgestalt, welche also dem triklinischen Systeme zur Basis dient, wird von Haüy ein schiefwinkeliges Parallelepiped (Fig. 93) mit drei ungleichen Kanten angenommen. Die Abnahme in den Molecülreihen der dem Kern aufgelagerten Schichten findet an den Kanten, an den Ecken oder in einer der Seitenrichtungen statt und ist verschieden nach der Zahl der in der Breite und Höhe oder in beiden zugleich abnehmenden Molecülreihen, wodurch die Bezeichnung unmittelbar durch den Index dieser Annahme, angefügt an die Ecken *a*, *e*, *i*, *o* oder Kanten *b*, *c*, *d*, *f*, *g*, *h* bezeichnet wird; die Flächen der Primitivform heissen *P* (*ri*), *M* (*i*), *T* (*if*).

Fig. 93.



Durch Lewy wurde die anfangs schwerfällige Methode Haüy's vereinfacht, indem er die gleichwerthigen Kanten erkannte und die

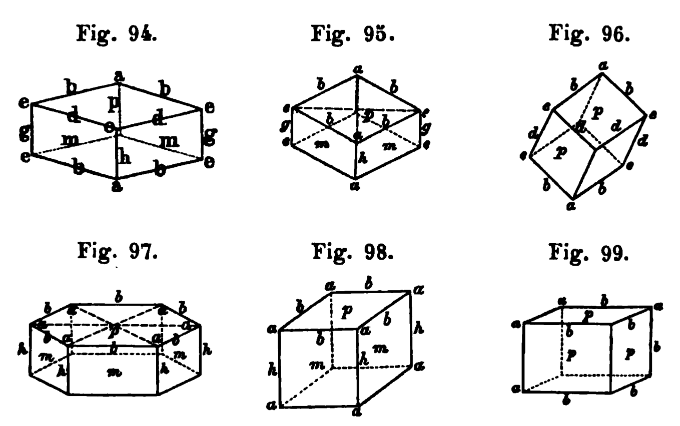


Fig. 94. Fig. 95. Fig. 96.

Fig. 97. Fig. 98. Fig. 99.

unseren Systemen parallel laufenden Grundgestalten adoptirte, wo bei Fig. 94 die monoklinische, Fig. 95 die prismatische, Fig. 96 die rhomboedrische, Fig. 97 die hexagonale, Fig. 98 die pyramidale, Fig. 99 die tesserale Grundform angibt.

Das Decrescenzzeichen tritt hiedurch in nahen Connex mit unseren axinometrischen Indices, indem durch die Construction sich leicht ergibt, dass z. B. im prismatischen Systeme

$$g^n = b : \frac{b}{n} \text{ mit } \frac{b}{n+1} : \frac{a}{n-1} \quad : \infty\, c \text{ (Weiss)}$$

coincidirt. In letzter Zeit hat Descloizeaux die allgemeinen Formeln $b^{\frac{1}{x}}$, $b^{\frac{1}{y}}$, $h^{\frac{1}{z}}$ oder $b^{\frac{1}{x}}$, $b^{\frac{1}{y}}$, $g^{\frac{1}{z}}$ gekürzt, indem er für dieselben, je nachdem $x = z$ oder $y = z$ ist, mit gleichzeitiger Rücksichtnahme auf die betreffenden Ecke des pyramidalen, prismatischen und monoklinischen Systems die Symbole $a_{\frac{y}{z}}$, $e_{\frac{y}{z}}$, $o_{\frac{y}{z}}$ — oder $a_{\frac{x}{z}}$, $e_{\frac{x}{z}}$, $o_{\frac{x}{z}}$ einführt.

§. 89. Ungleich schwieriger als die Flächensymbole von Haüy gestalten sich die Bezeichnungen von Mohs.

Mohs nimmt in der Krystallographie eine Mittelstellung zwischen den atomistischen und axinometrischen Schulen ein. Während er die damals schon begründete Theorie von Weiss über die Axensysteme annahm und als bestimmende Elemente der Species zur Berechnung verwerthete, ist hingegen seine Ableitung der Flächen nicht von den Axen, sondern von den Grundgestalten ausgehend.

Indem er jede Fläche betrachtet als die Abstumpfung einer Kante von zwei combinirenden Flächen — also im Parametersysteme um zwei Einheiten geändert — ist es ihm möglich, durch Bildung von Reihen aus der Grundgestalt das Symbol der abgeleiteten Flächen zu finden.

Durch diess Verlassen der directen Axenabschnitte erhält das Symbol die Exponenzialform, wie auch die Reihen — deren Grenzen werden von der Natur meist übersprungen — die Zahl der ableitbaren Formen ohne Grund beschränkt.

Zur Charakterisirung der Moh s'schen Methode diene als Beispiel das prismatische System, in welchem als bestimmende Elemente der Species drei senkrechte ungleiche Axen angenommen werden; die Symbole hingegen werden von der Grundpyramide mittelst des Gesetzes abgeleitet, dass die Kantenabstumpfung einer Gestalt die Variation der Indices um zwei hervorbringt.

Die Grundpyramide mit $P$, die aufrechtstehende Axe mit $c$ bezeichnend, nennt er die obere Endfläche $P - \infty$, die Verticalprismen $P + \infty$, also die um $2^{\infty}$ verflachte oder steilere Pyramide, daher $P \pm n$, wobei $2^n$ den Index der verticalen Axen bezeichnet. $Pr + \infty$ ist die Formel für die Pinacoide, $Pr$ für die Domen.

Um die complicirte und im rhomboedrischen Systeme fast hieroglyphische Schreibweise von Mohs zu verstehen, sind hier im Nachfolgenden die Transformationsgleichungen seiner Schreibweise in die von ihm selbst zu Grunde gelegten Parameterabschnitte — welche den Weiss'schen Axen entsprechen — gegeben. Letztere sind nach den Methoden des nächsten Kapitels in unsere Schreibweise umzuformen.

*a*) Tesserales System.

$$\begin{array}{lll}
H = a : \infty a : \infty a & O = a : a : a & D = a : a : \infty a \\
A_1 = 2a : 3a : \infty a & A_2 = 2a : a : \infty a & A_3 = 3a : a : \infty a \\
B_1 = 2a : a : a & B_2 = {}^3/_2 a : a : a & B_3 = 3a : a : a \\
C_1 = a : 2a : 2a & C_2 = a : 3a : 3a & \\
T_1 = {}^1/_3 a : {}^1/_2 a : a & T_2 = {}^1/_5 a : {}^1/_3 a : a & T_3 = 4a : 2a : a
\end{array}$$

*b*) Pyramidales System.

$$\begin{array}{ll}
P = c : a : a & P + 1 = 2c : a : \infty a \\
P - 1 = c : a : \infty a & P + 2 = 2c : a : a \\
P - 2 = {}^1/_2 c : a : a & P - \infty = \infty c : a : \infty a \\
P + \infty = \infty c : a : a & (P + \infty) = \infty c : a : \infty a
\end{array}$$

$$(P \pm n)^m = a : ma : m2^{\pm\frac{n}{2}}c$$

$$qP \pm n = a : a : q2^{\pm\frac{n}{2}}c$$

$$(qP \pm n)^m = a : ma : mq2^{\pm\frac{n}{2}}c$$

*c*) Prismatisches System.

$$(q\bar{P} \pm n)^m = a : mb : mq2^{\pm n}c$$

$$(q\breve{P} \pm n)^m = ma : b : mq2^{\pm n}c$$

$$(q\bar{P}r \pm n)^m = \frac{2}{m+1}a : \frac{2}{m-1}b : q2^{\pm n}c$$

$$(q\breve{P}r \pm n)^m = \frac{2}{m-1}a : \frac{2}{m+1}b : q2^{\pm n}c$$

*d*) Die Formen der schiefprismatischen Systeme werden als Hemiedrien des prismatischen betrachtet und mit den Zeichen $\pm$, $r$, $l$, $^1/_2$, $^1/_4$ bestimmt. Als Elemente werden jedoch schiefwinkelige Parametersysteme angegeben.

*e*) Das rhomboedrische System wird hergeleitet durch Zugrundelegung der Grundform des Rhomboeders oder der 6seitigen Pyramide.

$$(qR \pm n) = a : a : \infty a : q2^{\pm n}c$$

$$-R = a' : a' : \infty a : c$$

$$-(R - 1) = 2a : 2a : \infty a : c$$

$$(P \pm n)^m = {}^1/_2 (-2)^{\pm n}c : \frac{b}{3m-1} : \frac{b}{3m+1}$$

wobei *bb* die Hülfsaxen sind, mit deren Coefficienten die Weiss'schen Axen *a* im Connex stehen.

$$\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\mu+\nu} : \frac{a}{\nu} : \frac{b}{2\nu-\mu} : \frac{a}{\nu-\mu} : \frac{b}{\nu-2\mu}$$

Dem Systeme werden zur Zeichnung und Angabe ein vierzähliges Axensystem — das von Weiss — zu Grunde gelegt.

§. 90. Während **Haüy** und **Mohs** die Bezeichnung der Flächen von den Grundgestalten durch die Gesetze der Decrescenz oder durch die Reihen abzuleiten suchten, war es Bestreben der axinometrischen Schulen, die Bezeichnung der Flächen möglichst conform den Ausdrücken für die Coordinaten der Flächen selbst zu machen.

Wie schon früher erwähnt, begründet die Anwendung der analytischen Geometrie die Angabe der inneren Körperwinkel; während die sphärische Trigonometrie den Winkel der Normalen benützt, bei ersteren sind hiedurch die Indices die directen Parameterabschnitte, während sie bei letzterem die reciproken Werthe derselben sind.

Begründer der axinometrischen Schule ist **Weiss**. Wohl hat **Weiss** noch die schiefwinkeligen Systeme auf orthogonale Axen bezogen, allein seine Schüler haben bereits in Folge der optischen Untersuchungen schiefwinkelige Axen zugelassen; dem rhomboedrischen Systeme legt er 4 Axen zu Grunde, welche mit den Normalen auf die von uns $\{001\}$ $\{100\}$ $\{110\}$ $\{\bar{1}\bar{1}0\}$ genannten Flächen übereinstimmen. Die Axen der übrigen Systeme sind hingegen mit den hier angegebenen analog.

Um die krystallographischen Verhältnisse nach dieser Methode übersichtlich darzustellen, hat **Quenstedt** eine schematische Projection angegeben. Als Projectionsebene wird meist die Horizontalebene hiebei gewählt, so dass die Verticalaxe den Mittelpunkt der Projection einnimmt. Lässt man alle Flächen vergrössern, bis sie zum Durchschnitt mit der Projectionsebene kommen und rückt zugleich die parallelen Flächen zusammen, sowie alle Flächen insoweit, dass jede durch den Mittelpunkt des Axensystems geht, so werden die Durchschnittslinien der Flächen mit der Projectionsebene, deren Gesammtheit eben die Projection bildet, construirbar sein durch die Indices (den der dritten Axe $= 1$ gesetzt) bezüglich der in der Projectionsebene liegenden zwei Axen. Hieraus folgt, dass die Flächen durch Linien und die Zonen durch deren Durchschnitte also Punkte gegeben sind.

Die Symbolik der **Weiss**'schen Schule erhielt jedoch bald eine wichtige Veränderung. **Naumann** hat in seinem für die analytische Methode unerreicht dastehenden Werke 1830 eine prägnante Flächenbezeichnung geschaffen, welche die Idee der **Mohs**'schen Grundgestalten in glücklicher Weise mit den Principien **Weiss**' vereinigt.

Während **Mohs** durch seine Reihen vollständig ausserhalb allem Connex mit den Axenabschnitten ist, leitet **Naumann** seine Flächenformeln direct von denen **Weiss**' ab. **Naumann** stellt je nach der Ausbildung 4 Grundgestalten auf, Octaeder, Rhomboeder, Pyramide, Prisma, bezeichnet dieselben mit $O$, $R$, $P$, $Pr$ und gibt denselben vorn und rückwärts Indices, welche durch folgende Reduction der Parameter entstehen:

einer der auf die horizontalen Axen bezüglichen Indices von Weiss wird immer auf die Einheit gebracht und nun der auf die Verticalaxe bezügliche vor-, hingegen der zweite restirende, von der Einheit verschiedene nach dem Symbol angesetzt wird. Welche der Axen gemeint ist, zeigt beim prismatischen und triklinischen Systeme das über das Symbol gesetzte Zeichen, ein Strich für die längere Axe, ein Halbkreis für die kürzere, im monoklinischen ein durch das Symbol gezogener gerader Strich für die Axe der Symmetrie, ein geneigter hingegen für die geneigte Axe.

Das vorgesetzte Zeichen ± oder die Häkchen ,'*P*,' zeigen die Lage der Flächen im monoklinischen und triklinischen Systeme an.

Im rhomboedrischen Systeme werden je nach der Ausbildung *R* oder *P* als Grundgestalten und die Weiss'schen Axen angenommen, dieselben jedoch behufs der Rechnung auf 3 transformirt, welche mit den Normalen unserer Flächen {001} {100} {110} übereinstimmen.

Diese Bezeichnungsweise von Naumann hat in Folge der ihr innewohnenden Uebersichtlichkeit viele Anhänger gewonnen; neue Symbole statt *P*, *Pr*, *R*, *O* in derselben einzuführen, wurde von Haidinger und Rose versucht, während Dana dieselben weglässt.

Die Aufstellung und Bezeichnung der Axen bei (*W*) Weiss und (*N*) Naumann ist gegenüber der von uns adoptirten folgende: Prismatisches System. (*W*): *c* vertical, *b* seitlich, *a* vordere Axe, (*N*) : *a* vertical, *b* seitlich und grösser als *c* — Pyramidal (*W*) : *c* vertical. (*N*) : *a* vertical — Monoklinisch (*W*) : *c* vertical, *b* horizontal, *a* geneigt, (*N*) : *a* vertical, *b* geneigt, *c* horizontal.

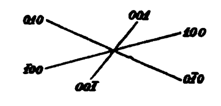
§. 91. Die sphärische Methode ward durch die Kugelprojection Neumann's möglich gemacht und 1839 durch Miller's vortrefflichen treatise begründet.

Miller versucht die Krystallbestimmung bloss indirect mittelst Berechnung der Dreiecke zu lösen, ohne direct die Winkel als Functionen der Parameter anzugeben. Wohl führt dieser indirecte Weg ohne schwierige Rechnung zum Ziele, allein viele Probleme verlangen zu ihrer vollständigen Lösung, wenn die Kenntniss der Krystallverhältnisse nicht blosse Empirie sein soll, auch letzterer Function. Vorliegendes Werk hat daher beide Wege vereint, um den Anforderungen der Theorie genügen und auch Probleme lösen zu können, welche, wie die Bestimmung der Zwillingsaxen, des Volumen, der Anwendung der Theorie der kleinsten Quadratsummen bisher vernachlässigt waren.

Eine zweite, morphologisch noch wichtigere Abweichung ist die Aenderung der Axen im rhomboedrischen Systeme. Miller bezeichnet die Flächen des Rhomboeders mit (100) (001) (100) erhält dadurch

ein schiefwinkeliges Axenkreuz (Fig. 100), in welchem die Neigungen der positiven oder negativen Axen für sich einander gleich und von 90⁰ verschieden sind.

Fig. 100.




Die Combination von 6 Permutationen der Indices einer Fläche geben einen sechsseitigen Skalenoeder, während die Verbindung zweier solcher in Relation (vergl. das Gesetz p. 247. Colonne Miller) stehender Complexe für die zwölfseitige Pyramide nöthig ist.

Die sphärische Projection des Rhomboeders wird von Miller so dargestellt, dass seine Endfläche (111) mit unserer Axe *c* zusammenfällt, die Normalen der Rhomboederflächen liegen dann in unseren Zonen {100} {001}, {001} {$\bar{1}$11}, {001} {$\bar{1}\bar{1}$1}.

Die Berechnungsformeln werden, wie man leicht ersieht, bei Annahme von geneigten Axen complicirt, so dass man die directe Berechnung mittelst Zonenverband und Dreiecksberechnung zu umgehen versuchen müsste.

Die nachfolgende Tabelle gibt über die Lage und Symbole dieses Systems vollständigen Aufschluss. Zwei Druckfehler, welche sich unliebsamer Weise in die analogen Tabellen meines Atlas der Krystallformen einschlichen, sind hier verbessert. —.

Nachdem die wichtigsten Momente aus den Anschauungsweisen der Autoren hervorgehoben wurden, um ein Studium der Literatur zu ermöglichen, so könnte sich hieran eine Vergleichung der verschiedenen Benennungen für die einzelnen Gestalten und Formen schliessen.

Da die Zahl dieser aber einerseits zu gross, andererseits dem Krystallographen leicht verständlich oder ohne weitere Hülfsmittel bestimmbar sind, so habe ich diese Vergleichung — zu deren Studium ich auf die bereits vorhandenen Werke über Synonymik verweise — hier unterlassen und gebe im Nachfolgenden nur eine Zusammenstellung der mathematischen Flächensymbole für die wichtigen Schulen von Miller, Weiss, Naumann, Levy.

# XXII. Kapitel.

## Tabellen zur Vergleichung der systematischen Flächenbezeichnung.

### §. 92. Orthogonale Krystallsysteme.

*A)* Prismatisches Krystallsystem.

| | Miller | Weiss | Naumann | Levy |
|---|---|---|---|---|
| | 100 | $\infty a : b : \infty c$ | $\infty \breve{P} \infty$ | $g'$ |
| | 010 | $a : \infty b : \infty c$ | $\infty \bar{P} \infty$ | $h'$ |
| | 001 | $\infty a : \infty b : c$ | $oP$ | $p'$ |
| | 110 | $a : b : \infty c$ | $\infty P$ | $m'$ |
| | 111 | $a : b : c$ | $P$ | $b^{\frac{1}{2}}$ |
| | 210 | $2a : b : \infty c$ | $\infty \breve{P} 2$ | $g^3$ |
| $h > k$ | hko | $\frac{h}{k} a : b : \infty c$ | $\infty \breve{P} \frac{h}{k}$ | $g^{\frac{h+k}{h-k}}$ |
| | 120 | $a : 2b : \infty c$ | $\infty \bar{P} 2$ | $h^3$ |
| $h < k$ | hko | $a : \frac{k}{h} b : \infty c$ | $\infty \bar{P} \frac{k}{h}$ | $h^{\frac{h+k}{h-k}}$ |
| | 101 | $\infty a : b : c$ | $\breve{P} \infty$ | $e^1$ |
| | hol | $\infty a : b : \frac{h}{l} c$ | $\frac{h}{l} \breve{P} \infty$ | $e^{\frac{1}{h}}$ |
| | 011 | $a : \infty b : c$ | $\bar{P} \infty$ | $a^1$ |
| | okl | $a : \infty b : \frac{k}{l} c$ | $\frac{k}{l} \bar{P} \infty$ | $a^{\frac{1}{k}}$ |
| | 112 | $a : b : \frac{1}{2} c$ | $\frac{1}{2} P$ | $b^1$ |
| $\frac{h}{l} \gtrless 1$ | hhl | $a : b : \frac{h}{l} c$ | $\frac{h}{l} P$ | $b^{\frac{1}{2h}}$ |
| | 221 | $a : b : 2c$ | $2P$ | $b^{\frac{1}{4}}$ |
| $h > k$ | hkl | $\frac{h}{k} a : b : \frac{h}{l} c$ | $\frac{h}{l} \breve{P} \frac{h}{k}$ | $b^{\frac{1}{h-k}}\ b^{\frac{1}{h+k}}\ g^{\frac{1}{l}}$ |
| $h < k$ | hkl | $a : \frac{k}{h} b : \frac{k}{l} c$ | $\frac{k}{l} \bar{P} \frac{k}{h}$ | $b^{\frac{1}{k-h}}\ b^{\frac{1}{k+h}}\ g^{\frac{1}{l}}$ |

*B)* Orthohexagonales

| | **Schrauf** orthohexagonal | **Weiss** hexagonal | **Naumann** hexagonal |
|---|---|---|---|
| | {001} | $\infty a : \infty a : \infty a : c$ | $oP$ |
| | {100} | $\infty a : a : a : \infty c$ | $\infty P$ |
| | {310} | $2a : a : 2a : \infty c$ | $\infty P2$ |
| | {111} | $\infty a : a : a : c$ | $P$ |
| | {311} | $2a : a : 2a : c$ | $2P2$ |
| $h < l$ | $\pi$ {2hol} | $a : a : \infty a : \frac{h}{l} c$ | $+\frac{\frac{h}{l}P}{2}$ |
| $h > l$ | $\pi$ {2hol} | $a : a : \infty a : \frac{h}{l} c$ | $+\frac{\frac{h}{l}P}{2}$ |
| $2h < l$ | $\pi$ {hhl} | $a : a : \infty a : \frac{h}{l} c$ | $-\frac{\frac{h}{l}P}{2}$ |
| $2h > l$ | $\pi$ {hhl} | $a : a : \infty a : \frac{h}{l} c$ | $-\frac{\frac{h}{l}P}{2}$ |
| | {okl} | $2a : a : 2a : \frac{k}{l} c$ | $\frac{k}{l} P2$ |
| $h < k$ | {hkl} | $\frac{1}{a_1} a : \frac{1}{a_2} a : \frac{1}{a_3} a : \frac{1}{c_1} c$ | $mPn$ |
| | $\left\{ \begin{array}{l} h' = 3k \pm h \\ k' = h \mp k \\ l' = 2l \end{array} \right\}$ | $(a^3 = a^2 - a^1)$ | |
| | $h = 2u - v - w = 2a_1 - a_2$<br>$k = v - w = a_2$<br>$l = u + v + w = c_1$ | $a_1 = \frac{1}{2}(h + k) = u - w$<br>$a_2 = k = v - w$<br>$a_3 = \frac{1}{2}(k - h) = v - u$<br>$c_1 = l = u + v + w$ | $m = \frac{a_2}{c_1} = \frac{v - w}{u + v + w}$<br>$n = \frac{a_2}{a_1} = \frac{v - w}{u - w}$ |
| $2l > h + 3k$<br>$2l = h + 3k$<br>$2l < h + 3k$<br>$2l = 3k - h$<br>$2l < 3k - h$ | | | $m < \frac{1}{2}$<br>$\pm m < 1 \quad n \gtreqless 2$<br>$m > 1 \quad n > 1$ |
| $h < k$ | {hko} | $\frac{1}{a_1} a : \frac{1}{a_2} a : \frac{1}{a_3} a : \infty c$ | $\infty Pn$ |

Krystallsystem.

| Naumann rhomboedrisch | Miller rhomboedrisch | Levy hexagonal | Levy rhomboedrisch |
|---|---|---|---|
| $0R$ | $(111)$ | p | $a^1$ |
| $\infty R$ | $(2\bar{1}\bar{1})$ | m | $e^2$ |
| $\infty R 2$ | $(10\bar{1})$ | h' | d' |
| $\pm R$ | $(100)$ | b' | p' |
| $2P2$ | $(41\bar{2})$ | a' | $d^{\frac{1}{4}}\ d^1\ b^{\frac{1}{2}}$ |
| $\frac{h}{l}R$ | $(uww)$ $u > w$, $u = 2h + l$, $w = l - h$ | $b^{\frac{l}{h}}$ | $a^{\frac{u}{w}} = a^{\frac{2h+l}{l-h}}$ |
| $\frac{h}{l}R$ | $(u\bar{w}\bar{w})$ | $b^{\frac{l}{h}}$ | $e^{\frac{u}{w}} = e^{\frac{2h+l}{l-h}}$ |
| $-\frac{h}{l}R$ | $(uuw)$ $u > w$, $u = h + l$, $w = l - 2h$ | $b^{\frac{l}{h}}$ | $a^{\frac{w}{u}} = a^{\frac{l-2h}{h+l}}$ |
| $-\frac{h}{l}R$ | $(uu\bar{w})$ | $b^{\frac{l}{h}}$ | $e^{\frac{w}{u}} = e^{\frac{l-2h}{h+l}}$ |
| $\frac{k}{l}P2$ | $(uv\bar{w})$ $u = 2l$, $v = 3k + 2l$, $\bar{w} = 3k - 2l$ | $a^{\frac{l}{h}}$ | $d^{\frac{1}{u}}\ d^{\frac{1}{v}}\ b^{\frac{1}{w}}$ |
| $m' R n'$ | $(u \pm v \pm w)$ | $b^x\, b^y\, b^z = b^{\frac{1}{a_1}}\ b^{\frac{1}{a_3}}\ h^{\frac{1}{c_1}} = b'\, b^{n-1}\, h^{\frac{m(n-1)}{n}}$ | $d^{\frac{1}{u}}, b : d^{\frac{1}{v}}, b : d^{\frac{1}{w}}$ |
| $m' = \frac{m(2-n)}{n} = \frac{h}{l}$<br>$n' = n\left(\frac{1}{2-n}\right) = \frac{k}{h}$ | $\begin{pmatrix} u' = -u + 2v + w \\ v' = 2u - v + 2w \\ w' = 2u + 2v + w \end{pmatrix}$ | | |
| $m = m' n' = \frac{k}{l}$<br>$n = \frac{2n'}{1+n'} = \frac{2k}{h+k}$ | $u = 2h + 2l = 2a_1 - a_2 + c$<br>$v = -h + 3k + 2l = -a_1 + 2a_2 + c$<br>$w = -h - 3k + 2l = -a_1 - a_2 + c$ | | $u = n \pm m \pm nm$<br>$v = n \mp 2m \pm mn$<br>$w = n \pm m \mp 2mn$<br>$u = 2 + 3m'n' \pm m'$<br>$v = 2(1 \mp m')$<br>$w = 2 - 3m'n' \pm m'$ |
| | $(uvw)$ | | $b^{\frac{1}{u}}\ b^{\frac{1}{v}}\ b^{\frac{1}{w}}$ |
| $m' < 1 \quad n' > 1$ | $(uv0)$ | | $b^{\frac{u}{v}}$ |
| | $(uv\bar{w})$ | | $d^{\frac{1}{u}}\ d^{\frac{1}{v}}\ b^{\frac{1}{w}}$ |
| $m' = 1$ | $(u0\bar{w})$ | | $d^{\frac{u}{w}}$ |
| $m' > 1 \quad n' > 1$ | $(u\bar{v}\bar{w})$ | | $b^{\frac{1}{u}}\ d^{\frac{1}{v}}\ d^{\frac{1}{w}}$ |
| $\infty P n'$ | $(uv\bar{w})$ $w = u + v$, $u = 2h$, $v = 3k - h$, $-w = h + 3k$ | $h^{\frac{1}{n-1}}$ | $d^{\frac{1}{u}}\ d^{\frac{1}{v}}\ b^{\frac{1}{w}} = d^{\frac{1}{n-2}}\ d^{\frac{1}{1-2n}}\ b^{\frac{1}{n+1}} = d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{1}{1-3n'}}\ b^{\frac{1}{1+3n'}}$ |

## C) Pyramidales Krystallsystem.

| | Miller | Weiss | Naumann | Levy |
|---|---|---|---|---|
| | 001 | $\infty a : \infty a : c$ | $oP$ | p |
| | 100 | $a : \infty a : \infty c$ | $\infty P \infty$ | h |
| | 110 | $a : a : \infty c$ | $\infty P$ | m |
| | 101 | $a : \infty a : c$ | $P \infty$ | a′ |
| | 111 | $a : a : c$ | $P$ | $b^{\frac{1}{2}}$ |
| | 210 | $a : 2a : \infty c$ | $\infty P 2$ | $h^3$ |
| $h > k$ | {hko} | $a : \frac{h}{k} a : \infty c$ | $\infty P \frac{h}{k}$ | $h^{\frac{h+k}{h-k}}$ |
| | 201 | $a : \infty a : 2c$ | $2 P \infty$ | $a^{\frac{1}{2}}$ |
| | hol | $a : \infty a : \frac{h}{l} c$ | $\frac{h}{l} P \infty$ | $a^{\frac{1}{h}}$ |
| | hhl | $a : a : \frac{h}{l} c$ | $\frac{h}{l} P$ | $b^{\frac{1}{2h}}$ |
| $h > k$ | {hkl} | $a : \frac{h}{k} a : \frac{h}{l} c$ | $\frac{h}{l} P \frac{h}{k}$ | $b^{\frac{1}{h-k}}\ b^{\frac{1}{h+k}}\ h^{\frac{1}{l}}$ |

## D) Tesserales Krystallsystem.

| | Miller | Weiss | Naumann | Levy |
|---|---|---|---|---|
| | 100 | $a : \infty a : \infty a$ | $\infty O \infty$ | p |
| | 110 | $a : a : \infty a$ | $\infty O$ | b′ |
| | 111 | $a : a : a$ | $O$ | a′ |
| | {210} | $a : 2a : \infty a$ | $\infty O 2$ | $b^2$ |
| $h > k$ | {hko} | $a : \frac{h}{k} a : \infty a$ | $\infty O \frac{h}{k}$ | $b^{\frac{h}{k}}$ |
| | {221} | $a : a : 2a$ | $2 O$ | $a^{\frac{1}{2}}$ |
| $h > l$ | {hhl} | $a : a : \frac{h}{l} a$ | $\frac{h}{l} O$ | $a^{\frac{1}{h}}$ |
| | {211} | $\frac{1}{2} a : a : a$ | $2 O 2$ | $a^2$ |
| $h > l$ | {hll} | $\frac{h}{l} a : a : a$ | $\frac{h}{l} O \frac{h}{l}$ | $a^{\frac{h}{l}}$ |
| | {hkl} | $a : \frac{h}{k} a : \frac{h}{l} a$ | $\frac{h}{l} O \frac{h}{k}$ | $b^{\frac{1}{h}}\ b^{\frac{1}{k}}\ b^{\frac{1}{l}}$ |

## §. 93. Monoklinisches Krystallsystem.

| | Miller | Weiss | Naumann | Levy |
|---|---|---|---|---|
| | 001 | $\infty a : \infty b : c$ | $o P$ | $p$ |
| | 100 | $a : \infty b : \infty c$ | $\infty P \infty$ | $h'$ |
| | 010 | $\infty a : b : \infty c$ | $\infty$ Ᵽ $\infty$ | $g'$ |
| | 110 | $a : b : \infty c$ | $\infty P$ | $m$ |
| | 111 | $a : b : c$ | $+P$ | $d^{\frac{1}{2}}$ |
| | $\bar{1}11$ | $a' : b : c$ | $-P$ | $b^{\frac{1}{2}}$ |
| | 210 | $a : 2b : \infty c$ | $\infty P 2$ | $h^3$ |
| $h > k$ | hko | $a : \frac{h}{k} b : \infty c$ | $\infty P \frac{h}{k}$ | $h^{\frac{h+k}{h-k}}$ |
| | 120 | $2a : b : \infty c$ | $\infty$ Ᵽ $2$ | $g^3$ |
| $h < k$ | hko | $\frac{k}{h} a : b : \infty c$ | $\infty$ Ᵽ $\frac{k}{h}$ | $g^{\frac{h+k}{k-h}}$ |
| | 101 | $a : \infty b : c$ | $+P \infty$ | $o'$ |
| | hol | $a : \infty b : \frac{h}{l} c$ | $+\frac{h}{l} P \infty$ | $o^{\frac{1}{h}}$ |
| | $\bar{1}01$ | $a' : \infty b : c$ | $-P \infty$ | $a'$ |
| | $\bar{h}ol$ | $a' : \infty b : \frac{h}{l} c$ | $-\frac{h}{l} P \infty$ | $a^{\frac{1}{h}}$ |
| | 011 | $\infty a : b : c$ | Ᵽ $\infty$ | $e'$ |
| | okl | $\infty a : b : \frac{k}{l} c$ | $\frac{k}{l}$ Ᵽ $\infty$ | $e^{\frac{1}{k}}$ |
| | hhl | $a : b : \frac{h}{l} c$ | $+\frac{h}{l} P$ | $d^{\frac{1}{2h}}$ |
| | $\bar{h}hl$ | $a' : b : \frac{h}{l} c$ | $-\frac{h}{l} P$ | $b^{\frac{1}{2h}}$ |
| $h > k$ | hkl | $a : \frac{h}{k} b : \frac{h}{l} c$ | $+\frac{h}{l} P \frac{h}{k}$ | $d^{\frac{1}{h-k}}\ d^{\frac{1}{k+h}}\ h^{\frac{1}{l}}$ |
| $h > k$ | $\bar{h}kl$ | $a' : \frac{h}{k} b : \frac{h}{l} c$ | $-\frac{h}{l} P \frac{h}{k}$ | $b^{\frac{1}{h-k}}\ b^{\frac{1}{k+h}}\ h^{\frac{1}{l}}$ |
| $h < k$ | hkl | $\frac{k}{h} a : b : \frac{k}{l} c$ | $+\frac{k}{l}$ Ᵽ $\frac{k}{h}$ | $d^{\frac{1}{k-h}}\ b^{\frac{1}{k+h}}\ g^{\frac{1}{l}}$ |
| $h < k$ | $\bar{h}kl$ | $\frac{k}{h} a' : b : \frac{k}{l} c$ | $-\frac{k}{l}$ Ᵽ $\frac{k}{h}$ | $b^{\frac{1}{k-h}}\ d^{\frac{1}{k+h}}\ g^{\frac{1}{l}}$ |

## §. 94. Triklinisches Krystallsystem.

| | Miller | Weiss | Naumann | Levy |
|---|---|---|---|---|
| | 001 | $\infty a : \infty b : c$ | $o P$ | $p$ |
| | 010 | $\infty a : b : \infty c$ | $\infty \breve{P} \infty$ | $g'$ |
| | 100 | $a : \infty b : \infty c$ | $\infty \bar{P} \infty$ | $h'$ |
| | 110 | $a : b : \infty c$ | $\infty P'$ | $t$ |
| | $1\bar{1}0$ | $a : b' : \infty c$ | $\infty ' P$ | $m$ |
| | 111 | $a : b : c$ | $P'$ | $f^{\frac{1}{2}}$ |
| | $1\bar{1}1$ | $a : b' : c$ | $' P$ | $d^{\frac{1}{2}}$ |
| | $\bar{1}11$ | $a' : b : c$ | $, P$ | $c^{\frac{1}{2}}$ |
| | $\bar{1}\bar{1}1$ | $a' : b' : c$ | $P ,$ | $b^{\frac{1}{2}}$ |
| | 210 | $a : 2b : \infty c$ | $\infty \bar{P}' 2$ | $h^3$ |
| $h > k$ | hko | $a : \frac{h}{k} b : \infty c$ | $\infty \bar{P}' \frac{h}{k}$ | $h^{\frac{h+k}{h-k}}$ |
| | $\bar{2}10$ | $a' : 2b : \infty c$ | $\infty ' \bar{P} 2$ | ${}^3h$ |
| $h > k$ | $\bar{h}ko$ | $a' : \frac{h}{k} b : \infty c$ | $\infty ' \bar{P} \frac{h}{k}$ | ${}^{\frac{h+k}{h-k}}h$ |
| | 120 | $2a : b : \infty c$ | $\infty \breve{P}' 2$ | $g^3$ |
| $h < k$ | hko | $\frac{k}{h} a : b : \infty c$ | $\infty \breve{P}' \frac{k}{h}$ | $g^{\frac{h+k}{k-h}}$ |
| | $\bar{1}20$ | $2a' : b : \infty c$ | $\infty ' \breve{P} 2$ | ${}^3g$ |
| $h < k$ | $\bar{h}ko$ | $\frac{k}{h} a' : b : \infty c$ | $\infty ' \breve{P} \frac{k}{h}$ | ${}^{\frac{h+k}{k-h}}g$ |
| | 011 | $\infty a : b : c$ | $, \breve{P}' \infty$ | $i'$ |
| | okl | $\infty a : b : \frac{k}{l} c$ | $\frac{k}{l} , \breve{P}' \infty$ | $i^{\frac{l}{k}}$ |
| | $0\bar{1}1$ | $\infty a : b' : c$ | $' \breve{P} , \infty$ | $e'$ |
| | $o\bar{k}l$ | $a : b' : \frac{k}{l} c$ | $\frac{k}{l} ' \breve{P} , \infty$ | $e^{\frac{l}{k}}$ |
| | 101 | $a : \infty b : c$ | $' \bar{P}' \infty$ | $o'$ |
| | hol | $a : \infty b : \frac{h}{l} c$ | $\frac{h}{l} ' \bar{P}' \infty$ | $o^{\frac{l}{h}}$ |
| | $\bar{1}01$ | $a' : \infty b : c$ | $, \bar{P} , \infty$ | $a'$ |
| | $\bar{h}ol$ | $a' : \infty b : \frac{h}{l} c$ | $\frac{h}{l} , \bar{P} , \infty$ | $a^{\frac{l}{h}}$ |
| | hhl | $a : b : \frac{h}{l} c$ | $\frac{h}{l} P'$ | $f^{\frac{l}{2h}}$ |

| | Miller | Weiss | Naumann | Levy |
|---|---|---|---|---|
| | $h\bar{h}l$ | $a : \quad b' : \frac{h}{l}c$ | $\frac{h}{l}{}'P$ | $d^{\frac{1}{2h}}$ |
| | $\bar{h}hl$ | $a' : \quad b : \frac{h}{l}c$ | $\frac{h}{l}{}_{,}P$ | $c^{\frac{1}{2h}}$ |
| | $\bar{h}\bar{h}l$ | $a' : \quad b' : \frac{h}{l}c$ | $\frac{h}{l}P_{,}$ | $b^{\frac{1}{2h}}$ |
| $h > k$ | $hkl$ | $a : \frac{h}{k}b : \frac{h}{l}c$ | $\frac{h}{l}\ \bar{P}'\ \frac{h}{k}$ | $f^{\frac{1}{h-k}}\ d^{\frac{1}{k+h}}\ h^{\frac{1}{l}}$ |
| $h > k$ | $h\bar{k}l$ | $a : \frac{h}{k}b' : \frac{h}{l}c$ | $\frac{h}{l}\ {}'\bar{P}\ \frac{h}{k}$ | $d^{\frac{1}{h-k}}\ f^{\frac{1}{k+h}}\ h^{\frac{1}{l}}$ |
| $h > k$ | $\bar{h}kl$ | $a' : \frac{h}{k}b : \frac{h}{l}c$ | $\frac{h}{l}\ {}_{,}\bar{P}\ \frac{h}{k}$ | $c^{\frac{1}{h-k}}\ b^{\frac{1}{k+h}}\ h^{\frac{1}{l}}$ |
| $h > k$ | $\bar{h}\bar{k}l$ | $a' : \frac{h}{k}b' : \frac{h}{l}c$ | $\frac{h}{l}\ \bar{P}_{,}\frac{h}{k}$ | $b^{\frac{1}{h-k}}\ c^{\frac{2}{k+h}}\ h^{\frac{1}{l}}$ |
| $h < k$ | $hkl$ | $\frac{k}{h}a : \quad b : \frac{k}{l}c$ | $\frac{k}{l}\ \breve{P}'\ \frac{k}{h}$ | $f^{\frac{1}{k-h}}\ c^{\frac{1}{h+k}}\ g^{\frac{1}{l}}$ |
| $h < k$ | $h\bar{k}l$ | $\frac{k}{h}a : \quad b' : \frac{k}{l}c$ | $\frac{k}{l}\ {}'\breve{P}\ \frac{k}{h}$ | $d^{\frac{1}{k-h}}\ b^{\frac{1}{h+k}}\ g^{\frac{1}{l}}$ |
| $h < k$ | $\bar{h}kl$ | $\frac{k}{h}a' : \quad b' : \frac{k}{l}c$ | $\frac{k}{l}\ {}_{,}\breve{P}\ \frac{k}{h}$ | $c^{\frac{1}{k-h}}\ f^{\frac{1}{h+k}}\ g^{\frac{1}{l}}$ |
| $h < k$ | $\bar{h}\bar{k}l$ | $\frac{k}{h}a' : \quad b' : \frac{k}{l}c$ | $\frac{k}{l}\ \breve{P}_{,}\ \frac{k}{h}$ | $b^{\frac{1}{k-h}}\ d^{\frac{1}{h+k}}\ g^{\frac{1}{l}}$ |

# Inhaltsverzeichniss.

## I. Abtheilung. Allgemeine Morphologie.



## II. Abtheilung. Theoretische Morphologie.



## III. Abtheilung. Praktische Morphologie.



Druck von C. Ueberreuter in Wien.

## Verbesserungen.

pag. 61 Zeile 12 von oben statt **durchsichtig** lese **undurchsichtig.**
„ 101 „ 5 „ unten statt (1) (2) (6) (7) lese (1) (2) (8) (7)
„ 245 letzte Zeile von unten Columne Levy statt b. b. g. lese b. b. h
„ 247 Zeile 15 von unten Columne Miller statt 2 u + 2 v + w lese
2 u + 2 v − w

PHYSIKALISCHE MINERALOGIE.

# LEHRBUCH

DER

# PHYSIKALISCHEN MINERALOGIE

VON

Dr. ALBRECHT SCHRAUF

CUSTOS DES K. K. HOF-MINERALIEN-CABINETES, DOCENTEN FÜR PHYSIKALISCHE MINERALOGIE AN DER WIENER UNIVERSITÄT, BESITZER DER GOLDENEN MEDAILLE FÜR KUNST UND WISSENSCHAFT, MITGLIED DER KAISERL. RUSSISCHEN MINERALOGISCHEN GESELLSCHAFT ZU ST. PETERSBURG UND ANDERER GELEHRTEN GESELLSCHAFTEN.

## II. BAND.

**LEHRBUCH DER ANGEWANDTEN PHYSIK DER KRYSTALLE.**

WIEN, 1868.

WILHELM BRAUMÜLLER

K. K. HOF- UND UNIVERSITÄTSBUCHHÄNDLER.

# LEHRBUCH

DER

# ANGEWANDTEN PHYSIK

DER

# KRYSTALLE.

## HANDBUCH

ZUM STUDIUM DER THEORETISCHEN CHEMIE, MINERALOGIE
UND KRYSTALLOGRAPHIE.

VON

**Dr. ALBRECHT SCHRAUF**

CUSTOS DES K. K. HOF-MINERALIEN-CABINETES, DOCENTEN FÜR PHYSIKALISCHE MINERALOGIE AN DER WIENER UNIVERSITÄT, BESITZER DER GOLDENEN MEDAILLE FÜR KUNST UND WISSENSCHAFT, MITGLIED DER KAISERL. RUSSISCHEN MINERALOGISCHEN GESELLSCHAFT ZU ST. PETERSBURG UND ANDERER GELEHRTEN GESELLSCHAFTEN.

MIT 133 DEM TEXTE EINGEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

WIEN, 1868.

WILHELM BRAUMÜLLER

K. K. HOF- UND UNIVERSITÄTSBUCHHÄNDLER.

## C) Pyramidales Krystallsystem.

| | Miller | Weiss | Naumann | Levy |
|---|---|---|---|---|
| | 001 | $\infty a : \infty a : c$ | $oP$ | p |
| | 100 | $a : \infty a : \infty c$ | $\infty P \infty$ | h |
| | 110 | $a : a : \infty c$ | $\infty P$ | m |
| | 101 | $a : \infty a : c$ | $P \infty$ | a' |
| | 111 | $a : a : c$ | $P$ | $b^{\frac{1}{2}}$ |
| | 210 | $a : 2a : \infty c$ | $\infty P 2$ | $h^3$ |
| $h > k$ | {hko} | $a : \frac{h}{k} a : \infty c$ | $\infty P \frac{h}{k}$ | $h^{\frac{h+k}{h-k}}$ |
| | 201 | $a : \infty a : 2c$ | $2 P \infty$ | $a^{\frac{1}{2}}$ |
| | hol | $a : \infty a : \frac{h}{l} c$ | $\frac{h}{l} P \infty$ | $a^{\frac{1}{h}}$ |
| | hhl | $a : a : \frac{h}{l} c$ | $\frac{h}{l} P$ | $b^{\frac{1}{2h}}$ |
| $h > k$ | {hkl} | $a : \frac{h}{k} a : \frac{h}{l} c$ | $\frac{h}{l} P \frac{h}{k}$ | $b^{\frac{1}{h-k}}\ b^{\frac{1}{h+k}}\ h^{\frac{1}{l}}$ |

## D) Tesserales Krystallsystem.

| | Miller | Weiss | Naumann | Levy |
|---|---|---|---|---|
| | 100 | $a : \infty a : \infty a$ | $\infty O \infty$ | p |
| | 110 | $a : a : \infty a$ | $\infty O$ | b' |
| | 111 | $a : a : a$ | $O$ | a' |
| | {210} | $a : 2a : \infty a$ | $\infty O 2$ | $b^2$ |
| $h > k$ | {hko} | $a : \frac{h}{k} a : \infty a$ | $\infty O \frac{h}{k}$ | $b^{\frac{h}{k}}$ |
| | {221} | $a : a : 2a$ | $2 O$ | $a^{\frac{1}{2}}$ |
| $h > l$ | {hhl} | $a : a : \frac{h}{l} a$ | $\frac{h}{l} O$ | $a^{\frac{1}{h}}$ |
| | {211} | $\frac{1}{2} a : a : a$ | $2 O 2$ | $a^2$ |
| $h > l$ | {hll} | $\frac{h}{l} a : a : a$ | $\frac{h}{l} O \frac{h}{l}$ | $a^{\frac{h}{l}}$ |
| | {hkl} | $a : \frac{h}{k} a : \frac{h}{l} a$ | $\frac{h}{l} O \frac{h}{k}$ | $b^{\frac{1}{h}}\ b^{\frac{1}{k}}\ b^{\frac{1}{l}}$ |

## §. 93. Monoklinisches Krystallsystem.

| | Miller | Weiss | Naumann | Levy |
|---|---|---|---|---|
| | 001 | $\infty a : \infty b : c$ | $o P$ | p |
| | 100 | $a : \infty b : \infty c$ | $\infty P \infty$ | h′ |
| | 010 | $\infty a : b : \infty c$ | $\infty \text{Ƥ} \infty$ | g′ |
| | 110 | $a : b : \infty c$ | $\infty P$ | m |
| | 111 | $a : b : c$ | $+P$ | $d^{\frac{1}{2}}$ |
| | $\bar{1}11$ | $a' : b : c$ | $-P$ | $b^{\frac{1}{2}}$ |
| | 210 | $a : 2b : \infty c$ | $\infty P 2$ | $h^3$ |
| $h > k$ | hko | $a : \frac{h}{k} b : \infty c$ | $\infty P \frac{h}{k}$ | $h^{\frac{h+k}{h-k}}$ |
| | 120 | $2a : b : \infty c$ | $\infty \text{Ƥ} 2$ | $g^3$ |
| $h < k$ | hko | $\frac{k}{h} a : b : \infty c$ | $\infty \text{Ƥ} \frac{k}{h}$ | $g^{\frac{h+k}{k-h}}$ |
| | 101 | $a : \infty b : c$ | $+P \infty$ | o′ |
| | hol | $a : \infty b : \frac{h}{l} c$ | $+\frac{h}{l} P \infty$ | $o^{\frac{1}{h}}$ |
| | $\bar{1}01$ | $a' : \infty b : c$ | $-P \infty$ | a′ |
| | $\bar{h}ol$ | $a' : \infty b : \frac{h}{l} c$ | $-\frac{h}{l} P \infty$ | $a^{\frac{1}{h}}$ |
| | 011 | $\infty a : b : c$ | $\text{Ƥ} \infty$ | e′ |
| | okl | $\infty a : b : \frac{k}{l} c$ | $\frac{k}{l} \text{Ƥ} \infty$ | $e^{\frac{1}{k}}$ |
| | hhl | $a : b : \frac{h}{l} c$ | $+\frac{h}{l} P$ | $d^{\frac{1}{2h}}$ |
| | $\bar{h}hl$ | $a' : b : \frac{h}{l} c$ | $-\frac{h}{l} P$ | $b^{\frac{1}{2h}}$ |
| $h > k$ | hkl | $a : \frac{h}{k} b : \frac{h}{l} c$ | $+\frac{h}{l} P \frac{h}{k}$ | $d^{\frac{1}{h-k}} \; d^{\frac{1}{k+h}} \; h^{\frac{1}{l}}$ |
| $h > k$ | $\bar{h}kl$ | $a' : \frac{h}{k} b : \frac{h}{l} c$ | $-\frac{h}{l} P \frac{h}{k}$ | $b^{\frac{1}{h-k}} \; b^{\frac{1}{k+h}} \; h^{\frac{1}{l}}$ |
| $h < k$ | hkl | $\frac{k}{h} a : b : \frac{k}{l} c$ | $+\frac{k}{l} \text{Ƥ} \frac{k}{h}$ | $d^{\frac{1}{k-h}} \; b^{\frac{1}{k+h}} \; g^{\frac{1}{l}}$ |
| $h < k$ | $\bar{h}kl$ | $\frac{k}{h} a' : b : \frac{k}{l} c$ | $-\frac{k}{l} \text{Ƥ} \frac{k}{h}$ | $b^{\frac{1}{k-h}} \; d^{\frac{1}{k+h}} \; g^{\frac{1}{l}}$ |

# EINLEITUNG.

Die zahlreichen zerstreuten Forschungen, mit welchen die Freunde der Krystallphysik diese Wissenschaft seit mehr als 50 Jahren bereicherten, versuchte ich im vorliegenden Werke zu sammeln, mit eigenen Forschungen zu vermehren und unter einheitlichem Gesichtspunkte darzustellen. Als Aufgabe der Krystallphysik betrachtete ich hierbei die Lösung der Frage nach den Beziehungen, welche zwischen den chemischen, morphologischen und physikalischen Eigenschaften bestehen.

Einheit der Form und des Wesens der Körper war bei den ersten Regungen einer Krystallkunde geahnt und mit jedem weiteren Fortschritt der Wissenschaft deutlicher ausgesprochen. Schwierig, fast unmöglich wäre es ja, von dem Sein und Charakter eines Krystalls eine befriedigende Vorstellung zu machen, wenn man wirkungslose Theilchen des Stoffes nach Zufall in regelmässige Formen zusammengewürfelt denkt, hingegen alle übrigen physikalischen Eigenschaften den Imponderabilien zuschreibt.

Von dem Zusammenhange der Wärme, Elektricität, des Magnetismus mit den morphologischen Eigenschaften ist schon manche wichtige Thatsache aufgefunden — der Einfluss der Gestalt auf das Licht hingegen ist seit den Entdeckungen von Malus und den Forschungen von Fresnel und Brewster ausser allen Zweifel gesetzt und dadurch ein inniges Bündniss zwischen Optik und Morphologie der Krystalle gestiftet worden. Dieses Ueberwiegen der optischen Studien war auch für vorliegendes Buch bestimmend, die Lehre vom Lichte in ausführlicherer Weise zu behandeln. Es mag diese Darstellung der optischen Lehren vielleicht dazu dienen, dem Mangel eines Lehrbuches der Optik,

welches den neueren Forschungen Rechnung trägt, wenn auch unvollkommen abzuhelfen.

Ueber Plan und Eintheilung des Buches mag das Inhaltsverzeichniss Auskunft ertheilen, hier will ich nur noch mit einigen Worten jener Gesichtspunkte gedenken, welche mich bei der Abfassung des vorliegenden Werkes leiteten. Ich war bestrebt, die physikalischen Agentien von den molekularen Bewegungen der Materie abhängig darzustellen und die axialen Variationen derselben in den Krystallen, sowie die Krystallform selbst von der axialen Lagerung der Grundstoffe in dem Grundmolekül der Verbindung abzuleiten. Mögen diese Ziele in vielen Punkten von mir noch nicht erreicht sein, so zeigen doch selbst die nur in erster Annäherung gefundenen Resultate, dass es vielleicht auf diesem Wege gelingen wird, aus der Kenntniss der in einer Verbindung auftretenden Grundstoffe Form und Eigenschaften der Verbindung abzuleiten und hiermit das Problem der Krystallphysik zu lösen.

Mit vorliegendem Werke gelangt der theoretische Theil der physikalischen Mineralogie zum Abschlusse. Wie im ersten Bande die Lehren der Gestalt, so ist hier die Lehre der physikalischen Charakteristik den Forschungen der Neuzeit entsprechend dargestellt. Eine Anwendung dieser Lehren und eine Zusammenstellung der bisher gewonnenen praktischen Resultate gehört in das Gebiet der Physiographie der Mineralspecies.

Wien, den 15. September 1867.

Dr. Alb. Schrauf.

# I. Abtheilung.

## Die allgemeinen Eigenschaften der Materie.

# I. Kapitel.

## Gewicht und Volumen der Materie.

§. 1. Die Grundbedingung der Existenz der Materie ist deren Ausdehnung nach Ort und Zeit. Alle Veränderungen der Materie in der Zeit sind entweder das Wesen der Materie selbst betreffend, also chemisch, oder nur den relativen Ort der kleinsten Theilchen ändernd, und dann physikalisch. Die Bedingung des Stabilitätszustandes der Materie, ohne bewegenden Impuls von aussen ist die variable Ausdehnung im Raume, ohne Abhängigkeit von der Zeit.

Die Materie als solche ist in ihrem unbewegten Zustande an den Raum gebunden und mit ihr daher untrennbar der Begriff des Volums verknüpft.

Da nach den Vorstellungen der Molekularphysik aber jede Materie aus kleinsten Theilchen, Atomen besteht, ferner diese letztgenannten je nach ihrer variablen Anordnung den chemischen Charakter der Substanz bedingen, so ist bei Betrachtung der Raumausdehnung der Materie nicht bloss auf das absolute Volumen Rücksicht zu nehmen, sondern auch auf die relative Anzahl der das Volumen bildenden Atome.

Wohl sind in Folge des Einflusses bewegender äusserer Kräfte die Atome der Körper nie in absoluter Ruhe, doch sind solche Bewegungen meist Oscillationen um ein stabiles Gleichgewichtssystem, und bringen daher als solche keine Veränderung des atomistischen Gefüges hervor. Man kann daher mit einigem Rechte von solchen äusseren physikalischen Einflüssen absehen und die allgemeinen Eigenschaften der Materie für einen unbewegten Molekularzustand der letzteren entwickeln.

Verfährt man auf solche Weise, so kann im Allgemeinen die variable Atomgruppirung von verschieden grossen Atomen in verschiedener Anzahl und verschiedener Entfernung als eine Ursache der chemischen Verschiedenheit der Materie aufgefasst werden. Das relative Ver-

1*

hältniss hingegen der Zahl und Grösse der Atome für zwei verschiedene Körper von gleichen Volumen kann durch das Wort Dichte bezeichnet werden.

Zu demselben Begriffe gelangt man auch, wenn man nach den Forschungen der neuen Wärmetheorie nicht bloss oscillatorische Bewegungen um einen Gleichgewichtszustand, sondern freie Bewegungen der einzelnen Moleküle adoptirt. Eine Folge hiervon ist der weitere Satz, dass nur jener Körper in scheinbarer Ruhe verharrt, in welchem eine solche Bewegung stattfindet, dass von jeder Stelle aus nach allen möglichen Richtungen in gleichen Zeiten sich die gleiche Anzahl der Moleküle bewegt.

Obgleich es durch die neueren Forschungen der Molekularphysik bereits möglich ward, für die Grösse eines Moleküles den angenäherten Werth von 0·000009 Millimeter anzugeben, so fehlt uns vorerst doch ein geeignetes Mittel, die Anzahl der Moleküle der Volumseinheit, das ist die absolute Dichtigkeit zu bestimmen. Es kann daher das oben entwickelte Verhältniss als relative Dichte angewendet werden und durch den Buchstaben $D$ jene Zahl bezeichnet werden, die angibt, um wie viel mal die untersuchte Substanz dichter ist, als die gewählte Einheit der Dichte.

Die Masse eines Körpers wird daher bezeichnet werden können durch das Product aus dem Volumen und der Zahl $D$, welche, obwohl nur relativ bekannt, doch die auf jede Volumseinheit entfallende Masse anzeigt. Es ist

$$M = VD. \tag{1}$$

Da, wie eben gesagt, der Molekularzustand, also $D$, sich der directen Bestimmung entzieht, so erübrigt dieselbe nur für die Masse und das Volumen, und sie ist möglich, wenn man diese letztgenannten mit willkürlich gewählten Einheiten vergleicht.

Da das Volumen eine Function der drei Dimensionen des Raumes ist und daher durch die Methoden der Geometrie als ein Würfel desselben Inhaltes dargestellt werden kann, bedürfen wir zur Messung desselben nur die Annahme einer linearen Einheit.

Welche Grösse als solche benützt wird, ist gleichgiltig, die einzige Sorge, um Abweichungen im Laufe der Zeit vorzubeugen, ist: dass der Originalmassstab erhalten bleibt, und dass auf diesen die wahre Längeneinheit bei bestimmter Temperatur scharf und sicher aufgetragen ist.

Das alte und neue französische Mass haben die meiste Anwendung, sie sind auch die einzigen, welche auf Grundlage einer rationellen Annahme construirt wurden, während in den übrigen Ländern nur durch das alte Herkommen das Mass bestimmt ward.

Das alte französische Mass, die Toise du Pérou, soll die Länge des Secundenpendels darstellen; da jedoch die Pendellänge mit dem Quadrate des Sinus der geographischen Breite zunimmt, ferner eine willkürliche Zeittheilung zu Grunde liegt, suchte 1790 die französische Commission den zehnmillionsten Theil des unveränderlichen Erdquadranten als ein natürliches Mass festzustellen. Es ist diess der Meter. Es haben aber neuere wichtige Untersuchungen festgestellt, dass der Erdquadrant nicht zehn Millionen, sondern zehn Millionen 859 Meter ist, und somit fällt das einfache Bruchverhältniss von Meter und Erdquadrant, und es ist ersterer ebenfalls nur als ein aliquoter Theil der Toise du Pérou zu betrachten, womit die damaligen französischen Gradmessungen ausgeführt wurden.

Einen Werth behauptet dieses System dagegen durch seine decadischen Abstufungen und seine consequente Benützung bei Längen-, Hohl- und Gewichtsmass. Seine zehnfachen Multipla werden als Deca-, Hecto-, Kilometer, die zehnten Theile als Deci-, Centi-, Millimeter bezeichnet, während das altfranzösische in 6, das englische in 3 Fusse, diese in 12 Zoll und 12 Linien getheilt waren.

Die Masse selbst lassen sich leicht durch ihre bekannten Grössenverhältnisse in einander verwandeln. Es ist ein Meter 3′ 11·296‴ Par. oder 3′ 1″ 11·539‴ Wien. Ein Wiener Fuss = 0·316109 Meter. Eine Wiener Linie = 2·1952 M. M. Eine Pariser Linie = 2·2558 M. M. Ein englischer Fuss = $^1/_3$ Yard = 0·964206 Wiener Fuss. Ein Millimeter = 0·455539 Wiener Linien.

Einen weiteren Vorzug des metrischen Systems bildet dessen directe Anwendung als Einheit des Hohlmasses. Während in allen Ländern letzteres mit den linearen Massen in keiner einfachen Beziehung steht, ist diess bei dem neuen französischen Systeme der Fall. Das Volumen eines Würfels, dessen Seite ein Decimeter ist (sein Kubikinhalt kommt 0·707 Wiener Mass oder 54·7 Kubikzolle gleich) wird unter der Bezeichnung Liter dem Hohlmasse als Einheit zu Grunde gelegt.

Ist die Gestalt des Körpers, dessen Volumen bestimmt werden soll, eine regelmässige mathematische Figur, so wird es möglich sein, durch blosse Messung linearer Grössen mittelst Rechnung (vergl. Phys. Min. Vol. I, Kap. XVII) den Rauminhalt zu bestimmen.

Ist hingegen die Körperform eine unregelmässige, so kann nur eine indirecte Messung vorgenommen werden. Da nemlich jeder in eine Flüssigkeit eingetauchte Körper in Folge seiner Undurchdringbarkeit genau so viel Flüssigkeit verdrängen wird, als sein Volumen beträgt, so ist dieses Verfahren ein genügendes Mittel, um den Körperinhalt zu erfahren. Steht eine bereits volumetrisch bestimmte Massröhre zu Gebote, so ist die Bestimmung der Niveaudifferenz vor und nach dem

Einsenken des zu messenden Körpers zur Ermittlung seines Volumens hinreichend, sonst tritt noch die Bestimmung des Halbmessers der Röhre hinzu.

**§. 2. Masse und specifisches Gewicht.** Da die Masse die Gesammtsumme der im Körper vorhandenen Moleküle darstellt, so ist die directe Bestimmung unmöglich; eine indirecte Bestimmung gelingt jedoch durch die Kenntniss der Thatsache, dass alle Theilchen der Körper vom Gravitationscentrum der Erde gleichmässig angezogen werden.

In Folge dieser Anziehung streben alle Körper der Erde zu, bis sie auf ein Hinderniss ihrer Bewegung gelangen, und üben auf dieses einen Druck aus, den wir $P$ das Gewicht des Körpers nennen.

Sei nun $g$ die Acceleration des Körpers durch die Schwere, $M$ seine Masse, so wird sein Gewicht ausgedrückt durch

$$P = Mg \tag{2}$$

$$M = \frac{P}{g} \tag{3}$$

Wohl variirt $g$ mit der Grösse des Erdradius nach der Formel $g' = g\,(1 + 0{\cdot}0052 \sin {}^2\varphi)$, in welcher $\varphi$ die geographische Breite des Ortes und $g$ die Acceleration am Aequator, das ist 30·1086 Pariser Fuss, bedeutet, allein da die Variation von $P$ hiermit gleichen Schritt hält, bleibt die Bestimmung von $M$ immer constant und unabhängig vom Orte. Man kann daher sagen, es verhalten sich für zwei Körper

$$M : m = P : p \tag{4}$$

die Massen wie die Gewichte, von welcher Gleichung Veranlassung genommen ward, im gewöhnlichen Gebrauche statt der absoluten Massen der Körper die Gewichte, d. i. ihre relativen Verhältnisszahlen zu substituiren.

Um aber Gewichte vergleichen zu können, ist deren Zurückführung auf ein gemeinschaftliches Mass wünschenswerth. Als solches empfiehlt sich in Folge des Zusammenhanges mit den Volumsbestimmungen das Gramm. Letzteres ist das Gewicht eines Kubikcentimeters reinen Wassers bei $4^0$ Cels. Ein Liter wiegt ein Kilogramm. Ein Wiener Pfund = 560·0164 Gramm. Ein Wiener Karat = 0·20613 Gramm. Ein Holländisches Karat = 0·205894 Gramm.

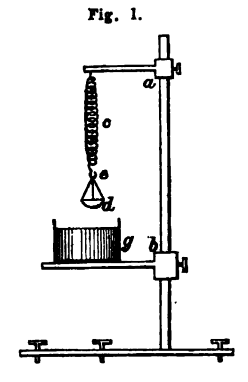
Der Druck eines Körpers auf seine Unterlage kann ferner als Mass der Gewichte benützt werden, denn ist die Unterlage beweglich, so wird sie in Folge des Druckes nachgeben und so weit sinken, bis durch die Einwirkung einer äusseren Kraft Gleichgewicht erzielt wird.

Gleichgewicht ist aber entweder durch die Wirkung einer Feder oder eines Hebels zu erreichen.

Bei den Federwagen ist die der Schwere des Körpers entgegenwirkende Kraft die Elasticität einer spiralförmig gewundenen Feder. Ist

an dem Ende der Feder eine Schale behufs Aufnahme der zu wägenden Körper angebracht (vergl. Fig. 1), verbunden gleichzeitig mit einem beweglichen Index an der fixen Scale, so wird bei successiv gesteigerter Belastung Schale und Index immer tiefer sinken. Es ist somit durch vorhergehende probeweise Belastung mit bereits bekannten oder willkürlich gewählten Gewichtseinheiten möglich, an der Scale die Stellen zu bezeichnen, bis wohin für 1 . . . *n* Gewichtseinheiten der Index sinken muss.

Fig. 1.



Der Index kann entweder mit der Schale fix verbunden sein, und an der Scale sich bewegen, oder man kann auch die Scalentheilchen dadurch bestimmen, dass man die Theilung auf einem Spiegel anbringt, wodurch das Bild die Stelle des Index einnimmt.

Eines bedeutend grösseren Grades der Genauigkeit sind die Hebelwagen fähig, deren Princip darin besteht, den Niederdruck auf den einen Hebelarm, hervorgebracht durch den zu wägenden Körper, durch einen gleichen Druck, auf dem anderen Arme von willkürlichen Gewichtseinheiten hervorgebracht, zu compensiren. In Folge der Schwere wirken die Gewichte an beiden Armen der Wage lothrecht, sie verhalten sich somit im Gleichgewichte verkehrt wie die Längen der Wagebalken von der Drehungsaxe bis zu den Aufhängepunkten gemessen.

Um ein möglichst einfaches Verhältniss zwischen dem gewählten Gewichte und dem zu wägenden Körper zu erhalten, stehen die Längen der Wagebalken entweder im Verhältnisse von 1 : 10 (Decimalwage) oder im Verhältnisse 1 : 1. Letzteres ist dasjenige Verhältniss, welches allen physikalischen Anforderungen behufs Einfachheit und Genauigkeit wahrhaft zu entsprechen vermag.

Ist die nach diesem Principe construirte Wage vollkommen im Gleichgewichte, hat die Alhidade einen lothrechten Stand, so kann die Gewichtsbestimmung durch successive Vergleichungen der zu wägenden Körper mit willkürlichen Gewichtseinheiten begonnen werden.

Da eine richtige Construction der Wagen eine Empfindlichkeit derselben bis auf 0·000001 des angewendeten Gewichtes erlaubt, so kann wohl bei Bestimmung des absoluten Gewichtes der Beobachtungsfehler auf ein Minimum gebracht werden. Es tritt aber namentlich bei Körpern von grösserem Volumen und geringerer Dichte ein nur durch die Rechnung zu eliminirender Fehler hinzu, welchen der Auftrieb der Luft, in welcher das Gewicht gleichsam schwimmt, verursacht.

Bekanntlich kann jedes ausdehnsame oder flüssige Medium nur dann im Gleichgewichte sein, wenn dem Drucke jedes beliebigen Theilchens nach abwärts ein gleich starker Auftrieb entgegensteht. Würde in der Flüssigkeit eine gewisse Summe von Theilchen durch einen dichteren Körper, also eine grössere Anzahl von Massentheilchen ersetzt, so würde dieser Körper in Folge Gleichung 2 einen grösseren Druck nach abwärts ausüben müssen; der Körper würde sinken, und zwar mit einer Kraftäusserung, welche gleich ist seinem wahren Gewichte weniger dem Auftriebe, welchen ein gleich grosses Volumen der Flüssigkeit selbst hat. Man kann daher sagen, jeder in eine Flüssigkeit eingetauchte Körper verliert so viel von seinem Gewichte, als die von ihm verdrängte Flüssigkeit selbst wiegt.

Wendet man aber diesen Satz auf die Theorie der Wage an und bedenkt, dass sowohl der abzuwägende Körper $P$ wie die Gewichtsstücke $p$ selbst in der Luft schwimmen, so kann nur als Annäherung die Gleichung $P = p$ gelten, denn das Gewicht auf der Wage wird beiderseitig sein

$$P - V\sigma = v - v\sigma$$

wo $Vv$ die Volumina, $\sigma$ das specifische Gewicht der Luft bedeutet.

Das absolute Gewicht des zu wägenden Körpers ist daher

$$P = p + (V - v)\,\sigma \tag{5}$$

und der Fehler, welchen man begeht, wenn man $P = p$ setzt, wird um so grösser, je mehr die Dichte der zu wägenden Körper und der angewendeten Gewichte differiren.

Das Gewicht der Luft $\sigma$ bestimmt sich für den Barometerstand $b$, in Pariser Linien ausgedrückt, und die Temperatur $t^0$ Cels., welche während der Wägung beobachtet wurden, aus der Formel

$$\sigma = \frac{b}{26051}\,\frac{1}{1 + t \times 0{\cdot}003666} \tag{6}$$

Ist die Gewichtseinheit, wie oben erwähnt, das Gramm, also auf das Gewicht des Wassers als Einheit bezogen, so kann man für $\sigma$ den mittleren Werth

$$\sigma = \frac{1}{773{\cdot}48} = 0{\cdot}0013 \tag{7}$$

annehmen.

Ist durch die vorhergehenden Untersuchungen das Volumen und das Gewicht des Körpers zu ermitteln, so lässt sich durch dieselben die Dichte bestimmen. Die Dichte ist ein für die Kenntniss der Substanz unumgänglich nöthiges Merkmal, indem von Stoff zu Stoff sich der Aggregatzustand ändert. Es ist in Folge dessen die genaue Bestimmung der Dichte eine der wichtigsten und am häufigsten vorkommenden Aufgaben des Mineralogen.

Aus den früheren Gleichungen

$$M = VD \qquad P = Mg$$

folgt indessen

$$P = VDg = VS \tag{8}$$

$$S = \frac{P}{V} \qquad D = \frac{M}{V}$$

Man pflegt den Ausdruck

$$S = Dg \tag{9}$$

das specifische Gewicht, d. i. das Gewicht einer Volumseinheit zu nennen.

Es verhalten sich daher für zwei Körper die Dichten $Dd$ wie die specifischen Gewichte

$$D : d = S : s \tag{10}$$

und

$$D = S \frac{d}{s} \tag{11}$$

Als Einheit der Massen und der Dichten pflegt man aber die Volumeinheit von Wasser von 4° C. anzunehmen. In der Gleichung 11 wird somit $d = 1$, und wir erhalten, bezogen auf Wasser $s$, für jeden beliebigen Stoff die Formel

$$S = Ds \tag{12}$$

Man pflegt aber auch ferner das specifische Gewicht $s$ des Wassers der Einheit gleichzusetzen, und nur unter dieser Voraussetzung ist es erlaubt, das specifische Gewicht mit der Dichte zu vertauschen. Da diese Identificirung die Vernachlässigung des Werthes von $g$ in sich schliesst, darf diess nur bei relativen, nie aber bei absoluten Bestimmungen geschehen.

Aus der Kenntniss der Grössen $P$, $V$ lässt sich jetzt mittelst der Gleichung 8 das specifische Gewicht $S$ bestimmen nach der Formel

$$S = \frac{P}{V} \tag{13}$$

Untersucht man die Grösse der Fehler im specifischen Gewichte, hervorgebracht durch Ungenauigkeiten im Gewichte oder Volumen, so gilt hiefür die Gleichung

$$dS = \frac{1}{V} dP - \frac{P}{V^2} dV \tag{14}$$

Da der Werth von $P$ mit fast absoluter Genauigkeit bestimmt werden kann, so ist es mit einiger Berechtigung erlaubt, $dP = 0$ zu setzen, und man erhält dann

$$dS = -\frac{P}{V^2} dV = -S \frac{dV}{V} \tag{15}$$

in welcher Gleichung $dV$ mit seinem Zeichen einzusetzen ist.

Man erkennt somit, dass die Fehler im Volumen den grössten Einfluss besitzen, und dass die Fehler direct proportional dem Gewichte oder der Dichte und den Fehlern im Volumen sind, dagegen im verkehrten Verhältnisse zum Volumen stehen. Es genügt die Gleichung 15 daher vollkommen, über die grössere oder geringere Genauigkeit einer Bestimmung Rechenschaft zu geben, und dieselbe lässt auch das ungünstige Moment erkennen. Die Differenzen $dV$ haben nämlich den grössten Einfluss, sie sind aber zugleich der Natur der Sache nach immer bedeutend, und wie Ergebnisse des §. 1 zeigen, kaum zu eliminiren.

Diess ist auch der Grund, warum zur möglichst genauen und zugleich praktischen und schnellen Bestimmung der Dichten verschiedene Methoden vorgeschlagen wurden.

§. 3. Dichtigkeitsbestimmungen. Da das specifische Gewicht der Quotient vom absoluten Gewichte durch das Volumen ist, ersteres immer durch die Wage auf unzweideutige Weise ermittelt werden kann, so bestehen nur für die Bestimmung des Volumens verschiedene Methoden, und zwar je nachdem dieselben für feste oder flüssige Körper angewendet werden sollen. Da erstere weitaus häufiger in der Mineralogie vorkommen, so muss ihnen grössere Wichtigkeit beigelegt werden, und dieselben sollen im Nachfolgenden erörtert werden.

I. Directe Volumsbestimmungen. a) Bei festen Körpern wird es nur in den seltensten Fällen möglich sein, durch künstliche Herstellung eines bestimmten Volumens, z. B. eines Würfels aus dem Körper, den Körperinhalt direct messen zu können. Zwei Bedingungen sind hier nöthig. Erstens genügendes Materiale, um einen Körper von einiger Ausdehnung herstellen zu können, denn abgesehen von der technischen Schwierigkeit, eine absolut genaue, in den Winkeldimensionen stimmende geometrische Gestalt herzustellen, ist auch Rücksicht zu nehmen auf seine Grösse. Da nämlich die Beobachtungsfehler für jede lineare Messung unabhängig von der Länge des gemessenen Körpers sind, so wird man bestrebt sein müssen, diese letztere, also auch das Volumen möglichst gross zu machen, um hiedurch den Beobachtungsfehler zu einem geringen Bruchtheile der wirklichen Ausdehnung zu machen. Zweitens muss das Material möglichst homogen sein, eine Bedingung, die namentlich bei festen Körpern nur schwierig zu realisiren ist.

b) Beide Bedingungen bieten so viele Schwierigkeiten dar, dass man in den meisten Fällen andere Methoden wählen wird. Bereits im §. 2 ward hervorgehoben, dass als Mass für das Volumen eines Körpers auch die Quantität jener Flüssigkeit gelten kann, welche durch ihn aus ihrer Ruhelage verdrängt wird.

Es kann hiezu jede beliebige Körperform der festen Substanz angewendet werden, und hiedurch entfällt eine der obigen Schwierigkeiten.

Um das Volumen hingegen zu messen, kann eine Flüssigkeit oder ein Gas gewählt werden, immer aber mit Rücksichtnahme, dass keine Auflösung oder chemische Veränderung an dem in die Massflüssigkeit eingebrachten Körper stattfindet.

Ist die zur volumetrischen Bestimmung dienende Substanz eine tropfbare Flüssigkeit, so kann der Körperinhalt entweder direct oder indirect durch die Wage gefunden werden. Ersteres Verfahren wird, wie im §. 2 angegeben, auf genauerer Bestimmung des Niveaus vor und nach Einbringen der Substanz $A$ beruhen. Letzteres besteht hingegen in Folgendem: Es wird die Massflüssigkeit vor und nach dem Einbringen von $A$ auf gleichem Niveau, gleicher Marke erhalten. Diess erfordert, dass man das gleiche Volumen von Flüssigkeit entfernt, welches durch den festen Körper über das Niveau gehoben ward. Die weiteren Operationen erfolgen auf der Wage. Es ist nämlich bekannt $P$, das Gewicht des Körpers, $p$, das Gewicht der Massflüssigkeit sammt Gefäss, $\pi$ das Gewicht der Massflüssigkeit sammt Gewicht und Körper, so ist

$$\pi = P + p - X$$

wo $X$ das Gewicht, $m$ die Masse der verdrängten Flüssigkeit ist, oder

$$X = mg = Vs$$

wo $V$ das Volumen des Körpers, $s$ das specifische Gewicht der Massflüssigkeit bedeutet. Wir erhalten somit als Ausdruck für das gesuchte Volumen die Gleichung

$$V = \frac{(P + p) - \pi}{s} \tag{16}$$

Bezüglich der Bedeutung von $s$ ist der Satz 12 entscheidend.

Ist die zu bestimmende Substanz sehr porös, gleichzeitig gegen Temperaturschwankungen empfindlich, also die Luft nicht durch Erhitzung zu entfernen, so könnte auch statt einer tropfbaren Flüssigkeit die Luft oder ein beliebiges Gas benützt werden. Wenn auch die übrige Zusammenstellung etwas complicirt, so lässt sich doch die Volumsänderung der Luft an der Verschiebung eines Quecksilberfadens in einer calibrirten Röhre leicht messen. Da hierfür das einzige bestimmende Merkmal der Barometerstand ist, so ist Leslié's Stereometer verhältnissmässig einfach und zweckmässig. Eine lange, calibrirte Röhre, oben in ein luftdicht verschliessbares Gefäss $G$ endend, wird bis zu einer Marke $c$ in Quecksilber eingetaucht. Man erfüllt erstens das Gefäss $G$ bloss mit Luft, zweitens mit Luft und dem zu bestimmenden Körper, hebt das Instrument so hoch, bis in der calibrirten Röhre der halbe Barometerstand sich zeigt. In beiden Fällen hat sich die Luft von $G$ auf das Doppelte ihres

Volumens ausgedehnt, allein im zweiten Falle ist das Volumen der Luft um jenes des eingebrachten Körpers vermindert gewesen, daher die Röhre über das Quecksilberniveau $c$ statt bis $m$ nur bis $n$ erhoben werden kann. Die Differenz dieser Quecksilberstände $cm$ — $cn$ sind das gesuchte Volumen. Persoz (Compt. rend. 1865) und Kopp haben andere Methoden anzuwenden versucht.

II. Auf indirecte Weise kann das Volumen durch den Gewichtsverlust, den der in die Flüssigkeit eingetauchte Körper erleidet, gefunden werden. Es ward bereits früher erwähnt, dass dieser Gewichtsverlust, entstanden durch den Auftrieb der Flüssigkeit, genau so viel beträgt, als das Gewicht $p$ der gleich grossen $V$ verdrängten Flüssigkeitsmasse, d. i.

$$p = Vs$$

wo $s$ das specifische Gewicht der angewendeten Flüssigkeit beträgt, und daher von Fall zu Fall bestimmt sein muss.

Man wird also den Körper zuerst in der Luft wägen, wodurch $P$ bekannt, sodann sein Gewicht bestimmen, wenn er in der Flüssigkeit ganz eingetaucht erscheint, wodurch der Werth $P'$ bekannt ist. Die Differenz $P - P'$ ist gleich $p$. Wir haben somit die Gleichung

$$S = \frac{P}{V} = \frac{P}{p} s = \frac{P}{P - P'} s \tag{17}$$

Der Einfachheit wegen geschehen die Wägungen meist im Wasser, dessen Dichte man gewöhnlich als Eins annimmt. Es folgt hieraus, da nach 10 die Dichten sich wie die specifischen Gewichte verhalten, statt 17 die einfache Formel zur Bestimmung der Dichten, bezogen auf Wasser

$$D = \frac{P}{P - P'} \tag{18}$$

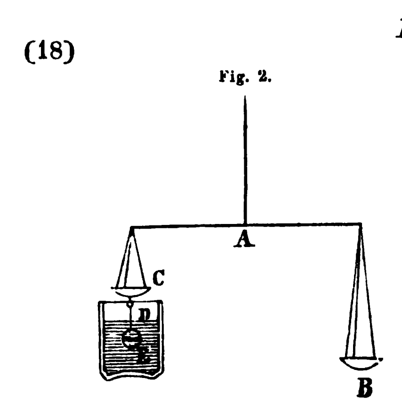


Fig. 2.

Wäre wegen Auflösbarkeit der Substanz Wasser nicht anwendbar, so eignet sich zu solchen Wägungen Benzin, Schwefelsäure oder ähnliche Verbindungen, deren specifisches Gewicht ($s$) jedoch zu bestimmen und in (17) zu substituiren ist.

Einige Vorsichtsmassregeln sind zu erwähnen. Die hydrostatische Wage (Fig. 2) muss, um den Körper unter Wasser bringen zu können, zwei in ungleicher Höhe befindliche Wagschalen haben. An dem Häkchen der kürzeren Wagschale $c$ wird mittelst eines feinen Haares ein Drahtkörbchen $E$ oder ein Gläschen befestigt, welches in Wasser eintaucht. Um die Tarirung der Wage nur einmal vornehmen zu dürfen,

pflegt man vor Beginn der Wägungen bereits das Körbchen $E$ zu befestigen und mit demselben belastet die Wage ins Gleichgewicht zu stellen. Es ist nur zu bemerken, dass das Körbchen so tief eintauchen muss, dass bei den Schwankungen der Wage dasselbe immer unter dem Niveau $D$ des Wassers eingesenkt bleibt.

Ist der zu wägende Körper in Pulverform, so muss an die Stelle von $E$ ein Glasfläschchen kommen, sonst ist aber ein feines Drahtgeflechte vorzuziehen, weil es beim Auf- und Niedergehen der Wage in der Flüssigkeit weniger Widerstand findet. Flache Glasschalen in $E$ anzuwenden, muss vermieden werden, denn sie beeinträchtigen wegen ihrer Reibung im Wasser die Empfindlichkeit der Wage. Luftblasen an $E$ werden mittelst eines feinen Glasstabes oder mittelst Auskochens entfernt. Des Körpers absolutes Gewicht wird auf der Wagschale $C$ ermittelt, dann derselbe auf $E$ gebracht, die Luftblasen entfernt und wieder gewogen; die Differenz beider Wägungen gibt das gesuchte Volumen.

Aus diesen Daten wird die Dichte nach Formel (17) oder (18) bestimmt.

Da diess Verfahren einen grösseren Grad der Genauigkeit zulässt, wird auch hier Rücksicht genommen werden müssen auf den Gewichtsverlust (5), den die Wägung in der Luft selbst hervorbringt, und man wird sich in manchen Fällen nicht mehr mit (18) begnügen können, sondern das absolute wahre Gewicht ermitteln müssen. In solchen Fällen dürfte es vorzuziehen sein, das Körbchen $E$ keiner doppelten Wägung in Luft und in der Flüssigkeit zu unterziehen, sondern dasselbe gleich anfänglich unter Wasser zu tariren, wodurch es nicht nöthig wird, den Auftrieb desselben zu berücksichtigen.

Man erhält daher durch successive Wägungen die Werthe: für den zu bestimmenden Körper sein wahres Gewicht $P$, sein Gewicht in Luft $P'$, in der Flüssigkeit $P''$, sein wahres specifisches Gewicht $S$. Die specifischen Gewichte seien, das der Flüssigkeit $s$, das der Luft $\sigma$, das der Gewichte $\mu$, so ist für die Wägung in der Luft

$$P - \frac{P}{S}\sigma = P'\left(1 - \frac{\sigma}{\mu}\right)$$

bei der Wägung in der Flüssigkeit

$$P - \frac{P}{S}s = P_2\left(1 - \frac{\sigma}{\mu}\right)$$

Durch deren Division und folgende Reduction erhalten wir

$$S = \frac{P'}{P' - P_2}s - \frac{P_2}{P' - P_2}\sigma \qquad (19)$$

Dieser Werth gilt für das wahre, auf den leeren Raum reducirte specifische Gewicht.

§. 4. Annähernde Methoden für die Bestimmung der Dichte fester Körper. Mit einem geringeren Grade der Genauigkeit als die letzterwähnten führen jene Methoden zur Kenntniss des specifischen Gewichtes, welche nicht auf der Ermittlung des Gewichtsverlustes, sondern auf derjenigen des Gleichgewichtszustandes basiren.

Die hier anzuwendenden Methoden sind jedoch mit einfacheren Hilfsmitteln durchzuführen, und daher namentlich auf Reisen, wo Bestimmungen augenblicklich vorgenommen werden müssen, anzuwenden. Sie beruhen theils auf dem Grundsatze des Schwimmens, theils auf der directen Vergleichung mit einem bereits bekannten specifischen Gewichte.

a) Die einfachste Methode besteht darin, sich eine Massflüssigkeit von bekanntem specifischen Gewichte zu bereiten, welche gleichzeitig so dicht ist, dass der zu untersuchende Körper in derselben eingetaucht schwimmt. Schaffgotsch hat dieses Verfahren, Pogg. Ann. Vol. 116 ausgebildet, indem er nachwies, dass eine wässerige Lösung von salpetersaurem Quecksilberoxydul (je nach der Concentration bis zu einer Dichte von 3·2) gebraucht werden kann.

Im Allgemeinen wird sich diess Verfahren für feine gepulverte Massen bewähren, welche auf diese Weise bequemer als mit dem Leslie'schen Stereometer bestimmt werden können.

Wie die Dichte der Flüssigkeit selbst gemessen werden kann, wird im nächsten Paragraphe erwähnt werden. Da jedoch diess, um genau zu geschehen, einer Wage bedarf; so kann man auf Reisen sich mit einer Annäherung begnügen. Man hält nämlich eine nach dem specifischen Gewichte aufsteigende Reihe von Mineralien (vielleicht von zwei zu zwei Zehntel) vorräthig, und sucht, von dem leichtesten beginnend, jene zwei Glieder auf, deren leichteres in und deren schwereres auf der Flüssigkeit schwimmt. So können leichte (bis $D = 3{\cdot}2$) Mineralien bis auf ein Zehntel genau bestimmt werden.

b) Im Vorigen ward versucht, durch Concentrirung der Flüssigkeit den Auftrieb zu verändern, man kann jedoch auch versuchen, den Druck des Körpers selbst zu verkleinern.

Da nämlich das mehr oder minder Eingetauchtsein eines schwimmenden Körpers nebst seinem specifischen Gewichte auch von seiner Belastung abhängt, so wird man sowohl durch geeignete Vermehrung oder Verminderung des Gewichtes den schwimmenden Körper immer bis zu einer gleichen Marke unter der Flüssigkeit erhalten können, andererseits aber auch aus den wechselnden Niveauabständen auf die Variationen der Belastung schliessen können.

Auf diese Principien sind die Aräometer von Nicholson und Mohs gebaut, welche wohl sehr compendiös sind, aber nicht allzu

genaue Resultate geben. Sie erfordern überdiess die Anwendung grosser Quantitäten.

Fig. 3.

n m a c

Der in Wasser eintauchende Schwimmer *c* (Fig. 3) ist ein hohles, allseits geschlossenes Blechgefäss, welches, um bis zur Marke *m* einzusinken, eine gewisse Belastung *p* auf der Schale *n* erfordert. Legt man auf dieselbe Schale *n* das zu untersuchende Mineral, so wird man, um den Stand des Schwimmers unverändert zu erhalten, die Belastung *p* um das Gewicht *P* des Minerals vermindern müssen. Legt man andererseits das Mineral auf die unter Wasser befindliche Schale *a*, so wird die Belastung *p* um $(P-\pi)$ vermindert werden müssen, wo $\pi$ den Gewichtsverlust des Minerals in der entsprechenden Flüssigkeit darstellt, der Quotient aus *P* durch $\pi$ ist die gesuchte Dichte.

c) Da die letztere Methode, wie gesagt, nur genäherte Werthe gibt, so verdient die von Gadolin, Pogg. Ann. Vol. 106, bekannt gemachte Untersuchungsmethode vollkommenste Berücksichtigung. Dieselbe beruht in der Vergleichung eines bekannten specifischen Gewichtes mit dem zu suchenden unter Anwendung der bekannten Theorie der Schnellwage (im Gleichgewichte verhalten sich die Belastungen verkehrt wie die Abstände von der Drehungsaxe *A* (Fig. 2).

Um hiezu verwendbar zu sein, muss die Wage folgende Einrichtung haben: Zwei gleich lange Wagbalken mit nach oben gerichtetem Index. Die Wagbalken sind in gleich grosse Abstände getheilt. Auf beiden Seiten befinden sich Schieber, welche an einem Haare Drahtkörbchen tragen. Diese beiden Korbwagschalen müssen, um Correctionen zu vermeiden, äquilibrirt und von gleicher Substanz sein, so dass sie sowohl bei einer Prüfung in Luft, als auch im Wasser gleiche Abstände von der Axe haben.

Sind diese Bedingungen vom Mechaniker erfüllt, so wird es möglich sein, durch blosse Vergleichung eines zu bestimmenden Minerals *A* mit einem Mineral *B* von bekanntem oder sonst willkürlichem specifischen Gewichte *s* auch dasjenige *S* des ersteren zu finden. Die Methode ist so einfach, dass sie selbst die absolute Gewichtsbestimmung des Minerals *A* nicht voraussetzt, sondern nur bedingt, dass man von *A* und *B* die gewogenen Stückchen mit dem Gewichte *P* und *P'* ins Gleichgewicht stellt, was durch die Verstellung der Schieber am Wagebalken auf die Distanzen *h* und *k* von der Drehungsaxe *A* bewerkstelligt wird.

Taucht man nun beide Körbchen in Wasser, dessen specifisches Gewicht $\sigma$, so wird das Gleichgewicht gestört, der Körper *A* wird *x*, *B* wird *y* von seinem Gewichte verlieren, die neuen Distanzen, bei wel-

chen jetzt Gleichgewicht eintreten wird, sind dann $h'$ und $k'$. Da $s$ bekannt, so lässt sich $y$ bestimmen, analog $x$, und da das Verhältniss der Dichten $D$, $d$ dem der specifischen Gewichte $S$, $s$ gleich, ferner die Dichte des Wassers 1 gesetzt wird, so folgt

$$y = \frac{P\sigma}{s} = \frac{P}{d} \qquad x = \frac{P\sigma}{s} = \frac{P'}{D}$$

andererseits verhalten sich aber

$$P : P' = k : h$$

$$(P - x) : (P - y) = \left(P - \frac{P}{D}\right) : \left(P' - \frac{P'}{d}\right) = k' : h'$$

$$\left(1 - \frac{1}{D}\right) : \left(1 - \frac{1}{d}\right) = \frac{k'}{k} : \frac{h'}{h}$$

Man erhält hieraus für das specifische Gewicht oder die Dichte

$$D = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{d}\right)\frac{k'h}{kh'}} \tag{20}$$

Hat man ein genau bestimmtes kleines Gewicht zur Hand, so kann man mit derselben Wage das von Tschermak vorgeschlagene Verfahren (Wien, Ac. Sitzb. 1863) durchführen, welches auf der directen Bestimmung sowohl des Gewichtes als auch des Gewichtsverlustes im Wasser beruht. Ist das Gewichtsstück bekannt $P_B$, so hat der zu wägende Körper das Gewicht $P_A = P_B \frac{k}{h}$, wodurch sich alle übrigen Daten leicht ergeben.

Es ist wohl früher bemerkt worden, dass, um mit der Gadolinschen Wage arbeiten zu können, dieselbe sammt den Gewichtskörbchen genau äquilibrirt sein soll. Da diess Verfahren namentlich auf Reisen von praktischer Anwendbarkeit ist, so dürfte es nicht unnöthig sein, zu bemerken, dass sich selbst mit ungleichen Gewichtsschalen operiren lässt, wodurch alle unliebsamen Vorfälle auf der Reise ihres Einflusses benommen werden.

Seien also die Körbchen $A$ und $B$ ungleich schwer, $P_A < P_B$, so wird im Zustande des Gleichgewichtes die Distanz $H > K$. Es sind dann für alle Wägungen in der Luft die Werthe der abgelesenen Theilstriche an der Scala $OK$ mit dem Bruche $\frac{H}{K}$ zu multipliciren, wodurch für jeden Gleichgewichtszustand statt $k' = h'$ zu setzen kommt

$$k' \frac{H}{K} = h'.$$

Analog wird auch für die Wägungen unter Wasser zuerst der entsprechende Multiplicator $\frac{H_2}{K_2}$ ausgemittelt, mittelst dessen die Theilstriche des einen Hebelarmes auf die Werthe des zweiten gebracht werden.

§. 5. Dichte von Flüssigkeiten. In den vorhergehenden Paragraphen ward das specifische Gewicht fester Körper durch deren Vergleichung mit bereits bekannten Flüssigkeiten ermittelt. Zu solchen Bestimmungen pflegt man meist Wasser anzuwenden; wäre der Körper jedoch im Wasser löslich, und müsste somit eine andere Massflüssigkeit angewendet werden, so ist vorerst deren Dichte zu bestimmen. Um aber die relativen Zahlen für die Dichte von zwei verschiedenen Flüssigkeiten zu finden, kann man entweder die Gewichte gleicher Volumina oder den Gewichtsverlust eines festen Körpers in beiden Flüssigkeiten bestimmen.

a) Da $P = VS$, so verhalten sich für zwei Flüssigkeiten von gleichem Volumen

$$P : p = S : s = D : d \tag{22}$$

Ist daher $d$ bekannt, so folgt $D$ unmittelbar aus dem Verhältnisse der Gewichte $P : p$. Um gleiches Volumen zu erhalten, werden sogenannte Picnometer angewendet. Es sind diess Hohlkugeln aus Glas, von ungefähr 5 Centimeter Durchmesser, welche behufs leichteren Einfüllens der Flüssigkeit zwei enge, oben sich trichterförmig erweiternde, mit Stöpsel schliessbare Hälse haben. Eine fixe Marke dient zur Erkennung des Standes der Flüssigkeit. Sollen die wahren, auf den leeren Raum reducirten Werthe gefunden werden, so hat man die Zahlen $P$ und $p$ mit Rücksicht auf die Gleichung (5) zu bestimmen.

b) Da auch der Gewichtsverlust $\pi$ eines festen Körpers beim Volumen $V$ beim Eintauchen in die Flüssigkeit vom specifischen Gewichte $S$ durch $\pi = VS$ dargestellt wird, so verhalten sich auch bei Wägung desselben Körpers seine Gewichtsverluste in zwei Flüssigkeiten von specifischem Gewichte $S$ und $s$ wie

$$\Pi : \pi = S : s = D : d \tag{23}$$

Ist $d$ bekannt, z. B. für Wasser geltend, so ist die gesuchte Relation

$$D = \frac{\Pi}{\pi}\, d. \tag{24}$$

Auf diese Weise hat man auch Wasser bei verschiedenen Temperaturen untersucht und gefunden, dass die Dichte desselben bei 3·95° C. (Joule und Playfair) den grössten Werth erhält und von hier nach beiden Richtungen abnimmt. Man pflegt die Dichte des destillirten Wassers bei 4° Cels. der Einheit gleichzusetzen, so dass dieselbe dann

| | | | |
|---|---|---|---|
| bei | 0° | Cels. $D(H_2O)$ | = 0·99988 |
| „ | 4° | „ | = 1·00000 |
| „ | 10° | „ | = 0·99975 |
| „ | 15° | „ | = 0·99918 |
| „ | 20° | „ | = 0·99831 |
| „ | 25° | „ | = 0·99717 |
| „ | 30° | „ | = 0·99579 |

ist. (In einem späteren Kapitel wird die Formel für die Ausdehnung des Wassers erörtert werden.) Da hieraus erhellt, dass die Dichte von der Temperatur abhängt, kann die Gleichung 24 nur dann gelten, wenn die Bestimmungen von $\Pi$ und $\pi$ bei gleicher Temperatur vorgenommen sind, sowie auch im Allgemeinen allen früheren Dichtigkeitsbestimmungen die Ermittlung des specifischen Gewichtes von der angewendeten Messflüssigkeit mit Rücksicht auf die Temperatur und die Gleichung 24 vorhergehen muss.

Mittelst des obigen Verfahrens des Eintauchens eines bestimmten Körpers kann aber auch das specifische Gewicht des Wassers direct gefunden werden. Kann man nämlich dem Körper eine genau messbare Gestalt, z. B. Würfelform $V$ ertheilen, so wird der Gewichtsverlust $\pi$ im Wasser von einem specifischen Gewichte $s$ sein

$$\pi = Vs \qquad s = \frac{\pi}{V} \tag{25}$$

Soll ein höherer Grad der Genauigkeit für die Dichte der Flüssigkeit mit der vorhergehenden Methode erreicht werden, so muss auch auf den Gewichtsverlust in der Luft (vergl. Formel 5) Rücksicht genommen werden.

Sei also $P$ das wahre Gewicht des zu wägenden Körpers, $P'$ dessen scheinbares in der Luft, $P_2$ dessen scheinbares im Wasser, $P_3$ dessen scheinbares in der zu bestimmenden Flüssigkeit. Das specifische Gewicht der letzteren Flüssigkeit $S$, des Wassers $s$, des zu wägenden Körpers $\delta$, der Gewichte $\mu$, der Luft $\sigma$, so ist bei Wägung

in Luft $\qquad P - \frac{P}{\delta}\sigma = P' - \frac{P'}{\mu}\sigma$

im Wasser $\qquad P - \frac{P}{\delta}\sigma = P_2 - \frac{P_2}{\mu}\sigma$

in der Flüssigkeit $P - \frac{P}{\delta}S = P_3 - \frac{P_3}{\mu}\sigma$

woraus man (vergl. 19) durch Reduction und Elimination von $\delta$ die Gleichung

$$S = s\frac{P_1 - P_3}{P_1 - P_2} - \sigma\frac{(P_2 - P_3)}{(P_1 - P_2)} \tag{26}$$

zur Bestimmung des wahren, auf den leeren Raum reducirten specifischen Gewichtes der Probeflüssigkeit erhält.

§. 6. Variationen der Dichte. In den bisherigen Zeilen wurden die meisten für den Mineralogen wichtigen Fälle einer Erörterung unterzogen, und für jedes Vorkommen praktische Regeln angeführt. Ueberblickt man aber die letzten Paragraphe, so ist ihnen die Reducirung des specifischen Gewichtes auf jenes des Wassers gemeinsam. Sind nicht absolute Werthbestimmungen nöthig, so kann von der Gleichung (12) $S = Ds$ Gebrauch gemacht werden, auch in derselben das specifische Gewicht einer Volumseinheit Wasser als Einheit angenommen werden. Nur hiedurch wird es möglich, Dichte und specifisches Gewicht, obgleich sie nicht gleichbedeutend sind, doch gleichzusetzen. Da diess der einfachste Fall, zugleich mit den kleinsten Verhältnisszahlen ist, so wird er für relative Bestimmungen allgemein angenommen.

Die Dichtigkeitsangaben sind in der Mineralogie eines der wichtigsten Merkmale, und müssen mit Sorgfalt ausgeführt werden. Welchen Einfluss die möglichen Fehler in den Bestimmungen von Gewicht und Volumen auf den Werth der Dichte ausüben, ist bereits früher durch die Gleichung (15) angegeben worden.

Um aber immer vergleichbare Resultate zu erzielen, muss auch das benutzte Material ein gleiches und zweckmässig ausgewähltes sein.

Es zeigen nämlich, wie namentlich aus den Wägungen Beudant's[1]) erhellt, nicht alle Formen eines Minerals gleiche Dichte, obgleich die Differenzen derselben nicht sehr bedeutend sind. Je compacter und je homogener die Massen, je weniger eine innere Störung oder faserige Structur auftritt, desto höher ist das specifische Gewicht. Zerstösst man jedoch solche faserige Varietäten oder grosse Krystalle zu einem gröblichen Pulver, so erhöht sich das specifische Gewicht und wird für alle Modificationen sowohl unter sich als mit dem der kleinen homogenen Krystalle gleich.

Nachfolgende Zahlen geben nach Beudant ein Beispiel für Calcit:

| | | |
|---|---|---|
| Kleine Krystalle | $D = 2{\cdot}7234$ | zerstossen $D = 2{\cdot}7232$ |
| Grosse Krystalle | 2·7130 | 2·7231 |
| Blätterige Krystalle | 2·7058 | 2·7233 |
| Grobfaserig | 2·7041 | 2·7231 |
| Feinfaserig | 2·6937 | 2·7229 |

Sieht man also ab von den Variationen der Dichte, die hervorgebracht sind durch chemische Beimengungen, so wird man zur Bestimmung nur kleine Krystalle oder gröbliches Pulver verwenden dürfen.

[1]) Pogg. Ann. 14, pag. 474.

Allzufeines Pulver zu verwenden ist nicht räthlich, denn nach G. Rose (Pogg. Ann. 73) steigt die Dichte mit der Feinheit des Pulvers. Er fand für die Dichte des Baryt in Krystallen 4·475, gepulvert 4·46, als chemischen Niederschlag 4·52.

Der Grund dieser Erscheinung kann nur darin gesucht werden, dass ein fein vertheiltes Pulver auf das Wasser analog, wie diess für Gase bekannt ist, verdichtend einwirkt. Man wägt somit den Körper nicht in Wasser von normaler Dichte, sondern mit einer Hülle von specifisch schwererer Flüssigkeit, und erhält somit einen geringeren Gewichtsverlust, als denjenigen, welcher der Dichte wahrhaft entspräche.

Wendet man diese Vorsicht bei Wahl des Materials an, so werden die Differenzen bei den Dichtigkeitsbestimmungen eines Minerals nur mehr geringere Bruchtheile betragen und die Dichte daher ein wahrhaft constantes Merkmal der Materie werden. In diesem Sinne werden die Dichtigkeitsangaben auch in der Mineralogie verwerthet.

## II. Kapitel.

### Ueber die Abhängigkeit der Dichte von der chemischen Zusammensetzung.

§. 7. Da die Dichte jedes Körpers abhängig ist von den in der Volumseinheit enthaltenen Molekülen, letztere hingegen von Element zu Element variiren, so wird die Dichte der chemischen Verbindungen analog den Bestandtheilen variiren.

Obgleich es vorerst unmöglich ist, die molekulare Gruppirung der Atome in den einfachen Stoffen anzugeben und hiedurch die Dichte als eine directe Function der chemischen Zusammensetzung abzuleiten, so haben doch vielfache indirecte Bestrebungen mindestens zur genäherten Kenntniss dieser Abhängigkeit geführt.

Soll die Dichte oder das Volumen eine Function der chemischen Beschaffenheit sein, so bietet sich unmittelbar der Satz dar: dass das Volumen der Verbindungen dem der Summe der Volumina der bildenden Bestandtheile gleich sein soll.

Wäre dieser einfache Satz in allen Fällen anwendbar, so wäre hierdurch immer möglich, aus der Kenntniss der wenigen Grundstoffe alle Werthe der Verbindung im Voraus zu bestimmen; allein, jene Bedingung, welche allein die Wahrheit jenes Satzes begründet, ist nur in den seltensten Fällen erfüllt. Es treten nämlich die bildenden Bestandtheile selten in eine Verbindung ein, ohne dass sie nicht Modificationen in Folge der chemischen Verwandtschaft erleiden würden.

Ist die Wirksamkeit der letzteren nur eine beschränktere, wie bei den Mischungen, so erfüllt sich der obige Satz mehr oder minder genau. Am genauesten bei Mischungen von Gasen, weniger bei jenen von Flüssigkeiten, bei welchen, nach den Proportionaltheilen der Mischung wechselnd, sich das Volumen — man könnte sagen in Folge des engeren Affinitätsbestrebens der Materie — zumeist verkleinert. Es treten Condensationen auf.

Sowie von Mischung zur chemischen Verbindung sich das Affinitätsvermögen der Bestandtheile steigert, so auch die auftretende Condensation. Die ersten Versuche, die Dichte einer chemischen Verbindung aus den Werthen der Bestandtheile zu rechnen, haben sich daher auch darauf beschränkt, die Condensationen der auftretenden Bestandtheile zu berechnen.

So hat 1825 Herapath (Phil. Mag. vol. 64, 322) versucht, die Condensation des Sauerstoffes in den Oxyden abzuleiten. Analoges Verfahren hat Boullay (Annal. de chim. 2. Ser. vol. 43, pag. 266), befolgt bei seiner Untersuchung der binären Schwefel- und Jodverbindungen, und gelangte hierdurch zum Satze, dass bei den Jodverbindungen eine Dilatation und nur bei jenen des Schwefels eine Concentration eintritt. Würde man bei solchen Vorstellungsweisen beharren, so wären für manche Grundstoffe bedeutende Variationen nöthig. So bemerkt schon Kopp, dass, wenn man die Oxyde als Verbindungen von Metall mit einem nicht expandirten Sauerstoff betrachten wollte, letzterer von — 0·63 bis + 3·76 variiren müsse. Analog müsste in den Metallverbindungen die Dichte von

Chlor von — 5·50 bis + 8·27
Jod von + 3·47 bis + 11·09
Brom von + 3·26 bis + 35·87

wechseln. [Letzteres gründet sich auf die Dichte von (BrH)].

Diese und ähnliche Untersuchungen mussten des wahren Erfolges entbehren, da nur das Volumen der Masseneinheit verglichen ward. Es erhellt nämlich, dass bei chemischen Verbindungen die Rolle der Einheit der Masse nicht eine beliebige Gewichtseinheit vertritt, sondern dass anstatt der letzteren die bekannten chemischen Atomgewichte einzutreten haben. Diese letzterwähnten sind die wahre Einheit der chemischen Masse.

Man darf somit für vorliegende Zwecke nicht mehr die reciproken Werthe der Dichte als Volumina vergleichen, sondern muss letztere, welche für die Masseneinheit gelten, noch mit dem Atomgewichte $A$ multipliciren. Das Volumen, welches durch die Gleichung

$$V = \frac{A}{D} \tag{27}$$

repräsentirt wird, heisst Atomvolumen oder specifisches Volumen.

Mit Einführung dieser Function hat die Kenntniss der hier obwaltenden Verhältnisse einen bedeutenden Aufschwung genommen, welchen wir namentlich Kopp und Schröder verdanken.

Schon die ersten Rechnungen mit der Function Atomvolumen gaben überraschende Resultate. Für die Grundstoffe ergab sich, dass die Werthe des Atomvolums für mehrere derselben einen gleichen

Werth haben. Für die Grundstoffe im festen Zustande hat Kopp in Pogg. Ann. 47, pag. 137 zuerst darauf hingewiesen, und manche interessante Schlüsse liessen sich hieraus folgern.

Vergleicht man auch die Volumina der Gase, obgleich sie von den Gegenständen der Mineralogie ferne liegen, so ergibt sich für diese als Folge des Gay Lussac'schen Gesetzes, dass die Aequivalente gasförmiger Körper bei Gleichheit des Druckes und der Temperatur gleiche Volumina haben.

Die Zahlen für den gasförmigen Zustand sind einfache Multipla von 7·22, am häufigsten 14·44 und 28·88, wie beifolgende Tabelle zeigt.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Arsen | As = 75 | $D$ = 10·388 | $V$ = 7·22 |
| Phosphor | P = 31 | 4·294 | 7·22 |
| Wasserstoff | H = 1 | 0·069 | 14·22 |
| Stickstoff | N = 14 | 0·969 | 14·44 |
| Sauerstoff | Ꝋ = 16 | 1·108 | 14·44 |
| Schwefel | S = 32 | 2·216 | 14·44 |
| Chlor | Cl = 35·5 | 2·458 | 14·44 |
| Jod | J = 127 | 8·795 | 14·44 |
| Brom | Br = 80 | 5·440 | 14·44 |

Ja aber selbst einige feste Körper scheinen ein dieser Reihe zuzuzählendes Atomvolum zu besitzen. Berechnet man nämlich mit Zugrundelegung der Luft als Einheit [$D(H_2Ꝋ)$=773·48] das Atomvolumen von Schwefel oder Phosphor, so erhält man nachstehende Zahlen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Schwefel | S = 32 | $D = 773 \times 2{\cdot}06$ | $V$ = 20·03 (3) |
| Phosphor | P = 31·5 | $D = 773 \times 1{\cdot}82$ | $V$ = 21·90 (3) |

Werthe, welche ein nahe dreifaches Multiplum sind, um so näher, als die Dichte nur bei gewöhnlicher Temperatur gewählt ward, ohne weiters auf die bedeutende Ausdehnung bis zum Siedpunkte Rücksicht zu nehmen.

§. 8. Atomvolumina der Grundstoffe. Während die gasförmigen Elemente einfache Multipla der Zahl 7·22 sind, so ergeben sich wohl so einfache Verhältnisszahlen nicht für die festflüssigen Grundstoffe, doch sind die Atomvolumina von manchen derselben ebenfalls gleich oder Multipla. Kopp hat bereits (Pogg. 47) diesen Satz gefunden und durch die Aehnlichkeit der Elemente begründet, Schröder (Pogg. Ann. 107) denselben vielfach erweitert. Letzterer führt den zweckmässigen Ausdruck isoster in die Wissenschaft ein, um dadurch zu bezeichnen, dass mehrere Körper gleiches Atomvolumen besitzen.

Geht man die vorhandenen Dichtigkeitsbeobachtungen der Elemente durch, so finden sich mehrere Gruppen, meist auch chemisch ähnlicher Stoffe, die isoster sind.

Für das Atomvolumen der Grundstoffe sind die berechneten Zahlen wie folgt zusammengestellt:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Aluminium | Al | = 27·4 | $D$ = 2·67 | $V$ = 10·2 |
| Antimon | Sb | = 122 | 6·70 | 18·2 |
| Arsen | As | = 75 | 5·67 | 13·2 |
| Baryum | Br | = 137 | 4·55 | 30·1 |
| Beryllium | Be | = 9·4 | 2·1 | 4·5 |
| Blei | Pb | = 207 | 11·38 | 18·2 |
| Bor | Bo | = 11 | 2·68 | 4·07 |
| Brom | Ba | = 80 | 3·18 | 25·16 |
| Cadmium | Cd | = 112 | 8·64 | 12·94 |
| Calcium | Ca | = 40 | 1·57 | 25·40 |
| Chlor | Cl | = 35·5 | 1·33 [1]) | 26·66 |
| Chrom | Cr | = 52·2 | 7·01 | 7·44 |
| Eisen | Fe | = 56 | 7·84 | 7·14 |
| Gold | Au | = 197 | 19·32 | 10·20 |
| Jod | J | = 127 | 4·94 | 25·70 |
| Iridium | Ir | = 198 | 15·93 | 12·42 |
| Kalium | K | = 39·1 | 0·86 | 45·3 |
| Kobalt | Co | = 60 | 8·51 | 7·05 |
| Kohle, Diamant | C | = 12 | 3·47 | 7·12 |
| Graphit | | | 2·33 | 10·28 |
| Kupfer | Cu | = 63·4 | 8·95 | 7·08 |
| Lithium | Li | = 7 | 0·59 | 11·8 |
| Magnesium | Mg | = 24 | 1·75 | 14·2 |
| Mangan | Mn | = 55 | 7·0—8·0 | 7—7·8 |
| Molybdän | Mo | = 96 | 8.6 | 11·2 |
| Natrium | Na | = 23 | 0 96 | 23·9 |
| Nickel | Ni | = 58 | 8·9 | 6·6 |
| Palladium | Pd | = 106·6 | 11·95 | 8·94 |
| Phosphor regulär | P | = 31 | 1·89 | 16·3 |
| amorph | | | 2·09 | 14·8 |
| Platin | Pt | = 197·4 | 21·4 | 9·22 |
| Quecksilber | Hg | = 200 | 14·4 | 14·58 |
| Schwefel rhomb. | S | = 32 | 2·07 | 15·4 |
| monocl. | | | 1·97 | 16·2 |
| Selen | Se | = 79·4 | 4·79 | 16·7 |
| Silber | Ag | = 108 | 10·55 | 10·24 |
| Silicium | Si | = 28 | 2·49 | 11·2 |

[1]) Davy, Faraday.

| | | | $D$ | $V$ |
|---|---|---|---|---|
| Strontium | Sr | = 87·6 | $D$ = 2·54 | $V$ = 34·4 |
| Tantal | Ta | = 68·8 | 10·78 | 6·38 |
| Tellur | Te | = 128 | 6·29 | 20·34 |
| Titan | Ti | = 50 | 5·3[1] | 9·43 |
| Uran | U | = 60 | 18·4? | 3·26 |
| Vanadin | V | = 68 | 3·6 | 18·9 |
| Wismuth | Bi | = 210 | 9·7 | 21·5 |
| Wolfram | W | = 184 | 17·6 | 10·40 |
| Zink | Zn | = 65·2 | 7·2 | 9·10 |
| Zinn | Sn | = 118 | 7·3 | 16·16 |

Vergleicht man die in dieser Tabelle berechneten Werthe des Atomvolumens der Grundstoffe, so findet man zahlreiche Fälle von Isosterismus, obgleich hiermit nicht durchwegs chemische Gleichheit oder Analogie verbunden ist.

Isoster sind a) Chrom, Eisen, Kobalt, Mangan, Diamantkohlenstoff, Kupfer, $V = 7·2$.

b) Aluminium, Gold, Graphitkohlenstoff, Silber, $^1/_2$ Tellur, $^1/_2$ Wismuth, Wolfram $V = 10·2$.

c) Lithium, $^1/_2$ Natrium, $^1/_4$ Kalium $V = 11·8$.

d) Schwefel, Selen $V = 16·5$.

e) Antimon, Blei, 3 Nickel, 2 Palladium, 2 Platin, Vanadin, 2 Zink $V = 18·5$.

f) Chlor, Brom, Jod $V = 25·5$.

Sind wohl in der Aufzählung a — f manche chemisch nicht verwandte Stoffe nahe aneinander gereiht, so ersieht man doch bereits zur Genüge, dass die Dichte für solche Fälle im einfach proportionalen Verhältnisse zum Aequivalentgewichte steht.

Diese Relation der Dichte zum Aequivalent ist in vielen Fällen noch einfacher. Bezieht man nämlich die Dichte $D$ nicht, wie bisher geschah, auf die Dichte des Wassers gleich 1, sondern setzt den Werth letzterer analog den Untersuchungen Bödeker's gleich 18, so werden auch alle Zahlen der Dichte mit 18 zu multipliciren sein. Hierdurch ergibt sich nachstehende Tafel:

| | | $D$ | $D'$ |
|---|---|---|---|
| $H_2\Theta$ | = 18 | $D$ = 1·0 | $D'$ = 18 |
| Pb | = 207 | 11·38 | 204·8 |
| Ka | = 39·1 | 0·86 | 15·68 = $^2/_5$ 39·1 |
| Li | = 7 | 0·59 | 10·62 = $^3/_2$ 7 |
| Mg | = 24 | 1·75 | 31·5 = $^4/_3$ 24 |
| Sr | = 87·6 | 2·5 | 45 = $^1/_2$ 87 |

[1]) Wollaston.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Pt | $= 197{\cdot}4$ | $D = 21{\cdot}4$ | $D' = 385 \quad = {}^4\!/_2\, 197$ |
| Zn | $= 65{\cdot}2$ | $7{\cdot}2$ | $129{\cdot}6 = {}^4\!/_2\, 65$ |
| S | $= 32$ | $2{\cdot}07$ | $37{\cdot}2 = {}^8\!/_7\, 32.$ |

Es zeigt diess, dass die Dichten einfache Multipla oder Submultipla der Aequivalentgewichte sind. Bei den übrigen, hier nicht erwähnten Elementen lässt sich diese Ableitung ebenfalls vornehmen; doch wird der Coefficient mehr oder minder complicirt erscheinen.

Ausser den bisher erwähnten Relationen zwischen Dichte und Aequivalent hat noch eine weitere Playfair (Chemic. News. II) hervorgehoben, nach welcher die Aequivalente mehrerer Grundstoffe die Potenzen der respectiven Dichte seien.

Es ist nämlich genähert für Kohlenstoff: $\sqrt[2]{12} = 3{\cdot}46$ Diamant, $\sqrt[3]{12} = 2{\cdot}29$ Graphit, $\sqrt[4]{12} = 1{\cdot}87$ Kohle. Analog: Bor $\sqrt[2]{7{\cdot}2} = 2{\cdot}6$ Brom $\sqrt[4]{80} = 3$, Jod $\sqrt[3]{127} = 5$, Schwefel $\sqrt[5]{32} = 2$, Silicium $\sqrt[3]{14} = 2{\cdot}5$, Selen $\sqrt[3]{80} = 4{\cdot}3$. Zahlen, welche den beobachteten Dichten nahe stehen.

§. 9. **Ableitung der Dichte der Verbindungen.** Haben sich durch die Erörterungen des vorigen Paragraphes für das Atomvolumen der Grundstoffe einige Gesetzmässigkeiten ergeben, so kann man umsomehr erwarten, dass dieselben vielleicht genügen, um mittelst derselben auch die Volumina von Verbindungen abzuleiten.

Die sich auf die Theorie des Atomvolumens stützenden Methoden wurden theils durch Kopp (Pogg. A. 47), theils durch Schröder (Pogg. A. 50) begründet, und geben auf anorganische Verbindungen angewendet ziemlich gute Resultate.

Kopp's Methode gründet sich auf die Ermittlung der für eine grössere Reihe analoger Verbindungen geltenden Condensationen der Grundstoffe. Sei für den nicht metallischen Bestandtheil $V' = \frac{A'}{d'}$, für den metallischen hingegen $V'' = \frac{A''}{d''}$, so sollte das Volumen der Verbindung die Summe der Volumina der Bestandtheile $V = v' + v''$ oder $D = \frac{A_1 + A_2}{v_1 + v_2}$ sein. Es treten jedoch meist Condensationen auf, und diese hat Kopp mit $x$, $y$ bezeichnet und mit den Aequivalentzahlen $A'$, $A''$ vereinigt, so dass seine Formel lautet

$$D = \frac{A_1 x + A_2 y}{v_1 + v_2} \tag{30}$$

Bei den Verbindungen, wo $v_1$ sich auf Sauerstoff bezieht, dessen Volumen unbekannt, führt er statt $v_1$ die Zahl $\frac{A_1}{z}$ ein, und erhält somit in der nachfolgenden Gleichung

$$D = \frac{A_1 x + A_2 y}{\frac{A_1}{z} + v_2} \tag{31}$$

die 3 Unbekannten $x$, $y$, $z$, welche drei Beobachtungen zu ihrer Bestimmung erfordern.

Mit dieser Gleichung geht Kopp die Jod-, Brom-, Chlorverbindungen, dann die einfachen schwefel-, kohlen- und salpetersauren Salze durch und stellt dann folgende Formeln auf zur Berechnung der Dichte aus den bekannten Aequivalenten und Volumina der Grundstoffe.

Für Oxyde $D\,(18{\cdot}42 + v_2) = 88{\cdot}11 + A_2\,1{\cdot}3$

„ Jodverbindungen $D\,(v_1 + v_2) = A_1\,1{\cdot}6 + A_2\,0{\cdot}1$

„ Bromverbindungen $D\,(v_1 + v_2) = A_1\,1{\cdot}8 + A_2\,0{\cdot}8$

„ Chlorverbindungen $D\,(v_1 + v_2) = A_1\,2{\cdot}5 + A_2\,1{\cdot}0$

„ schwefels. Salze $D\,(v_1 + v_2) = A_1\,0{\cdot}9 + A_2\,1{\cdot}4$

„ kohlens. Salze $D\left(\frac{A_1}{1{\cdot}0} + v_2\right) = A_1\,1{\cdot}3 + A_2\,1{\cdot}7$

„ salpeters. Salze $D\left(\frac{A}{0{\cdot}77} + v_2\right) = A_1\,2{\cdot}0 + A_2\,2{\cdot}2$

Wenn nun diese Formeln auch annähernde Werthe der Dichten liefern, so ist die Uebereinstimmung doch keine so absolute, um diese Gleichungen als den wahren Ausdruck des volumetrischen Gesetzes anzusehen.

Im Nachfolgenden seien mehrere bekannte Mineralien, der isomorphen Gruppe der Carbonate und Sulfate angehörend, angeführt und für dieselbe Beobachtung und Rechnung nach den obigen Formeln zusammengestellt.

| | Beob. Dichte. | Berechn. Dichte. |
|---|---|---|
| Calcit | 2·70 | 2·48 |
| Strontianit | 3·62 | 3·30 |
| Witherit | 4·30 | 4·15 |
| Cerussit | 6·43 | 6·33 |
| Anhydrit | 2·93 | 2·59 |
| Cölestin | 3·59 | 3·23 |
| Baryt | 4·20 | 3·92 |
| Anglesit | 6·17 | 5·87 |

Diese Zahlen sind wohl nur erste Annäherungen, jedoch ist die Methode dadurch bemerkenswerth, dass sie ermöglicht, mittelst der obigen Gleichungen aus drei Beobachtungen die Constanten für eine ganze Reihe analoger Verbindungen abzuleiten.

Die Formel 30 kann auch als diejenige betrachtet werden, welche, wenn auch mit einigen Modificationen, den neueren Untersuchungen Bödeker's[1]) zu Grunde liegt.

Wie bereits im vorigen Paragraphe erörtert, hat letzterer darauf hingewiesen, dass, wenn die Dichte des Wassers = 18 gesetzt wird, die Aequivalente mit den Dichten ident oder im multiplen Verhältnisse sind. Dieses multiple Verhältniss zeigt dann zugleich an, wie viel Volumina einem Aequivalente entsprechen.

Vergleicht man die Tabelle auf voriger Seite, so wird man aus derselben ersehen, dass einem Aequivalente Blei ein Volumen, hingegen einem Aequivalente Platin nur ein halbes Volumen (d. i. der reciproke Factor der Dichte), dem Aequivalent Schwefel $^7/_8$ Volumina entsprechen.

Um die auf solche Weise berechnete Volumina $V_\alpha$ $V_\beta$ von dem gewöhnlichen Atomvolumen (29) zu unterscheiden, soll für dieselben der Ausdruck Aequivalentvolumen im Nachfolgenden benützt werden. Bödeker rechnet die Aequivalentvolumina der Grundstoffe aus deren Dichte, wie sie unmittelbar beobachtet oder aus Verbindungen abgeleitet wurde. Dieselben sind für einen und denselben Stoff nicht gleich bleibend, sondern können je nach dem Auftreten der allotropen Modification verschieden sein, sind jedoch für analoge Verbindungen nahezu gleichwerthig. Nach diesen Erörterungen wird es erhellen, dass nach Bödeker die Formel 30 die folgende Gestalt annehmen wird.

$$D = \frac{A_\alpha + A_\beta}{V_\alpha + V_\beta} \tag{32}$$

wo $V_\alpha$ $V_\beta$ die für die Verbindungen geltenden Aequivalentvolumina darstellen.

Um diese Ableitung möglichst verständlich zu machen, wähle ich ein Beispiel, in welchem Grundstoffe mit einfachem Aequivalentvolumen, die sich zugleich aus der Dichte unmittelbar ergeben, vorkommen (vergl. vorige Seite).

a) Schwefelblei PbS

| | | | |
|---|---|---|---|
| 24 Pb | = 4968 | = 24 Vol. |
| 24 S | = 768 | = 21 Vol. |
| 24 PbS | = 5736 | = 45 Vol. |

$$D = \left(\frac{5736}{45} = 127{\cdot}4\right) : 18 = 7{\cdot}0$$

beobachtete Dichte = 6·9 — 7·5

b) Platinsulfür PtS

| | | |
|---|---|---|
| 24 Pt | = 4740 | = 12 Vol. |
| 24 S | = 768 | = 21 Vol. |
| 24 PtS | = 5508 | = 33 Vol. |

[1]) Bödeker: Die Beziehungen zwischen Dichte und Zusammensetzung bei festen und liquiden Stoffen. Leipzig 1860.

$$D = \left(\frac{5508}{33} = 166{\cdot}9\right) : 18 = 9{\cdot}2$$

beob. Dichte $= 8{\cdot}8$

Auf ähnliche Weise wird eine grosse Reihe von 732 Verbindungen behandelt. Die Resultate der Rechnung stimmen ziemlich gut mit der Beobachtung, wobei sich jedoch zeigt, dass für die meisten der Grundstoffe ziemlich viele allotrope Modificationen anzunehmen sind. Diese Modificationen sind zwar für die analogen Verbindungen meist ähnlich, doch ist diess nur mit Beschränkungen geltend. Ich hebe hier hervor die schon oben begonnenen Sulfurete. Schwefel tritt nämlich in die obigen Fälle, wozu man noch die Verbindungen von S mit Ag, Sn, Hg, Cu, Cd, Zn, Mn, H zählen kann, mit dem Aequivalentvolumen $^7/_8$; in die Verbindung mit Ni, Fe mit dem Volumen $^7/_{12}$; in die Verbindung mit Ka, Na mit dem Aequivalentvolumen $^7/_{16}$ ein. Hier können nur Versuche entscheiden, indem die Volumscondensationen durch keine theoretische Begründung angezeigt werden.

Interessant sind diese Versuche, indem sie auf die Modificationen der Grundstoffe das Augenmerk richten.

§. 10. Ableitung der Atomvolumina von Verbindungen. Im Gegensatze zu Kopp ist die Methode von Schröder auf die Ableitung der Atomvolumina $V_a$, $V_b$, $V_c$ direct gegründet. Da auch hierbei die Nothwendigkeit von Condensationen sich ergibt, so wurden dieselben als Coefficienten der Atomvolumina der Bestandtheile angebracht, wodurch die Gleichung folgt

$$V = xV_a + yV_b + zV_c \dots \qquad (33)$$

Haben $x, y, z$ einen gemeinschaftlichen Factor, so kann man denselben herausheben unter der Form

$$V = X(xV_a + yV_b + zV_c) \qquad (34)$$

Es ist diese Methode die allein richtige, da nur dieselbe die nothwendigen Bedingungen erfüllt. Es muss nämlich erstens das Volumen einer Verbindung gleich sein der Summe der Volumina aller in ihr auftretenden Bestandtheile, zweitens werden die Volumina der Bestandtheile selbst je nach dem Charakter der Verbindung mehr oder weniger Veränderungen oder Condensationen unterworfen sein müssen. Schliesslich ist es durch nichts gerechtfertigt, im voraus anzunehmen, dass für alle Verbindungen eines ähnlichen Typus, z. B. Oxyde, gleiche Condensation gelten muss, sondern letztere kann vorerst nur durch Versuche von Fall zu Fall bestimmt werden.

Diesen Anforderungen genügt nur die Formel 34, indem in ihr die Zahlen der Condensation $x$, $y$, $z$ jeden beliebigen Werth annehmen kön-

nen. Man kann wohl andererseits dieser Methode mit einigem Rechte entgegenhalten, dass durch dieselbe auf den typischen Zusammenhang der Verbindung kein Werth gelegt wird, und dass zweitens die Zahlen für $x$, $y$, $z$ eigentlich unbestimmt sind, da in der Gleichung mehr unbekannte als bestimmende Stücke vorhanden sind.

Letzterer Einwurf ist wohl nicht zu widerlegen, und es ist wahr, dass die Gleichung 34 mit mehreren und verschiedenen Werthen von $x$, $y$, $z$ erfüllt werden kann, allein diess entspricht vollkommen dem Wesen des Problems, da uns durch die blossen Volumsbetrachtungen nie klar werden wird, welcher der Grundstoffe in Condensationen auftritt. Nur die homolog laufenden Untersuchungen auf anderem Gebiet können über den physikalischen Charakter und dadurch über das Volumen der Stoffe einen Aufschluss geben. Sind solche ergänzende Beobachtungen nicht vorhanden, so wird die Analogie in Verbindung mit der Theorie der kleinsten Multipla die Lösung der Gleichung 34 ermöglichen.

Ich will als Beispiele wieder Schwefelverbindungen anführen, indem für solche beide Bestandtheile im festen Zustande volumetrisch bekannt sind. Schwieriger wären die Sauerstoffverbindungen, indem das Volumen des condensirten $\Theta$ erst aus Gleichung 34 ermittelt werden müsste.

Um nun anzuzeigen, in welchen Condensationen jeder Stoff auftritt, kann man die Werthe von $x$, $y$, $z$ als Exponenten anschreiben, so dass die Gleichung 34 die abgekürzte Gestalt erhielte

(34a) $$V = A_a^x + A_b^y + A_c^z.$$

Es bedeutet dann beispielsweise $S_2^{4/5}$, dass ein Atom Schwefel auf $^4/_5$ seines Volumen condensirt ist, dass aber gleichzeitig hiervon zwei Atome auftreten[1]). Beispielsweise ist

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Bleiglanz | beobachtet: | $Pb\,S = 239$ | $D = 7{\cdot}52$ | $V = 31{\cdot}8$ |
| | gerechnet: | $Pb + S^{4/5} = 18{\cdot}2 + {}^4/_5\ 15{\cdot}4$ | | $V = 30{\cdot}6$ |
| Zinkblende | beobachtet: | $ZnS = 97{\cdot}2$ | $D = 4{\cdot}09$ | $V = 23.8$ |
| | gerechnet: | $Zn + S = 9{\cdot}1 + 15{\cdot}4$ | | $V = 24{\cdot}5$ |

Die Uebereinstimmung der gerechneten und beobachteten Zahlen ist eine ziemlich gute, und genügt, um auf diesem Gebiete zu weiteren Forschungen anzuregen.

Schröder hat dieselben auch auf viele einfache Verbindungen und Mineralien ausgedehnt, und konnte durchwegs das Volumen der Verbindungen als eine Summe der Bestandtheile mit Zuhilfenahme der einfachen Factoren mit ziemlicher Annäherung berechnen.

---

[1]) Schröder schreibt denselben Fall $S^2_{8/5}$, wo die Atomanzahl als Exponent und die Summe der Volumina als Index erscheint. Obige Bezeichnung ist hingegen conform den optischen Untersuchungen, und der chemischen Methode, die Atomanzahl durch Indices zu bezeichnen.

Es gelang ihm, mehrere volumetrische Gesetze aufzustellen, welche im Nachfolgenden kurz zusammengefasst lauten:

1. Das Atomvolumen eines zusammengesetzten Körpers ist die Summe der Volumina, welche seinen Bestandtheilen oder Elementen zukommt.

2. Jedes Element existirt jedoch in den verschiedenen Verbindungen in solchen ungleichen, polymorphen Zuständen, dass sein Atomvolumen im Verhältnisse der Zahlen 1 : 2 : 3 : 4 . . . veränderlich ist.

3. Die Condensation des einen oder anderen Elementes eines zusammengesetzten Körpers kann in einer und derselben (d. i. procentual gleichen) Verbindung veränderlich sein.

Das Gesetz 4 umfasst die allotropen Zustände der Materie, das Gesetz 2 die Fälle der procentualen Isomerie.

Schröder hat wohl, bewogen durch einige Einwendungen, in einer späteren Untersuchung die Allgemeinheit dieser drei Gesetze selbst zurückgezogen; doch diess wohl mit Unrecht, denn die neueren optischen Untersuchungen führen auf dieselben Sätze. Auch nach den letzteren [1]) sind die wahrhaft procentualen Isomerien nur durch Ableitung von verschiedenen Modificationen der Grundstoffe erklärbar ; für die Polymerien und Allotropien genüge jedoch eine procentual multiple Zusammensetzung. Man kann alle Verbindungen, welche idente Materien im multiplen Verhältnisse besitzen, Polymerien nennen; jene Fälle hingegen, wo man verschiedene Molekularzustände der Materie annehmen muss, es mögen dieselben als procentual isomer oder polymer angegeben sein, müssen mit dem Namen Allomerien benannt werden. Der bisherige chemische Ausdruck metamer bezeichnet nur die verschiedene theoretische Gruppirung in der chemischen Formel bei vorausgesetzter Identität der Materie.

Da somit die Resultate der Untersuchungsmethoden auf volumetrischem und optischem Gebiete die gleichen sind, darf man dieselben wohl mit ziemlichem Rechte als wahr betrachten.

§. 11. Siedpunkt der Flüssigkeiten. Die Atomvolumina wurden in den vorhergehenden Zeilen von den bei gewöhnlicher Temperatur beobachteten Dichten abgeleitet. Da nun bekanntlich die verschiedenen Verbindungen bei verschiedenen Temperaturen krystallisiren, letztere auch im Stande ist, aus einer und derselben Lösung verschiedene Verbindungen zum Niederschlagen zu bringen, so zwingt sich unwillkürlich der Gedanke auf, dass die gewöhnliche Beobachtungstemperatur nicht für alle Stoffe gleichen Einfluss besitzen werde, und dass bei gleichem

[1]) Siehe nachfolgende Kapitel, sowie des Verfassers Physikalische Studien, Wien 1867.

Grad der Wärme die Atome der Krystalle, bezogen auf ihre Initial-Zustände, in verschiedenen thermischen Zuständen sind.

Es wurden daher verschiedene Versuche gemacht, um physikalisch gleichwerthige Temperaturen zur Vergleichung der Volumina zu benützen. Gleichwerthig sind jene Temperaturen, für welche derselbe physikalische Charakter der Verbindungen erzielt ist; als solche kann nur jener Grad angenommen werden, bei welchem ein Uebergang entweder aus dem festen in den flüssigen oder von dem flüssigen in den ausdehnsamen Zustand eintritt. Ersteres ist der Schmelzpunkt, letzteres der Siedpunkt.

Wichtig sind jedoch die von Kopp bezüglich des Siedpunktes $S^0$ bei gleichem Barometerstand gewonnenen Resultate. Dieselben beziehen sich wohl nur auf organische Verbindungen, und zwar auf homologe $ꞒH\Theta$ haltige Reihen, allein sie scheinen für die Ausbildung der Theorie von solcher Wichtigkeit zu sein, dass sie selbst hier nicht zu übergehen sind.

Bekanntlich besitzen die organischen homologen Reihen gleiche Bildungsweise für alle ihre Glieder und lassen sich durch Aufnahme des Increments $ꞒH_2$ von einander ableiten. Ist somit das Atomvolumen eine gesetzmässige Function der Materie, so muss dasselbe für eine solche homologe Reihe ebenfalls einen gesetzmässigen Gang seiner Werthe zeigen. Diess ist wirklich der Fall, und ich hebe als Beispiel die Zahlen der Fettsäurenreihe hervor.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Ameisensäure | $ꞒH_2\Theta_2$ | $= 46$ | $S^0 = 99^0$ | $V = 41{\cdot}3$ |
| Essigsäure | $Ꞓ_2H_4\Theta_2$ | $= 60$ | $118^0$ | $63{\cdot}6$ |
| Propionsäure | $Ꞓ_3H_6\Theta_2$ | $= 74$ | $137^0$ | $85{\cdot}4$ |
| Buttersäure | $Ꞓ_4H_8\Theta_2$ | $= 88$ | $156^0$ | $107{\cdot}1$ |
| Valeriansäure | $Ꞓ_5H_{10}\Theta_2$ | $= 102$ | $175^0$ | $130{\cdot}7$ |

Es zeigt sich durch diese wohl begründete Reihe, dass sowohl mit Zunahme um $ꞒH_2$ der Siedpunkt sich um $18^0$, dass auch das specifische Volumen sich um $\varDelta V = 22$ erhöht. Letztere Zahl entspricht somit dem Werthe $V(ꞒH_2)$, und ist für alle solche organische Reihen gleich, hierdurch anzeigend, dass auch die Constitution des Increments für alle organischen Reihen eine gleiche ist. Die Differenz der Siedpunkte ist nicht immer $19^0$, sondern bei einigen Reihen grösser, $24^0$ betragend, bei anderen wieder kleiner, z. B. bei den Homologen des Bromäthylen $15^0$, bei den wasserfreien organischen Säuren $13^0$.

Man ersieht aus diesen wichtigen Thatsachen, dass die specifischen Volumina wahre Functionen der Materie sind, vergleichbar bei gleichen physikalischen Zuständen, und dass die für einen Complex der Grundstoffe ermittelten Zahlenwerthe für dieselben in allen möglichen Verbindungen Geltung besitzen, so lange die atomistischen Verhältnisse des erwähnten Complexes gleich bleiben.

Um die Angaben des specifischen Volumens auf physikalisch gleichwerthige Temperatur zu beziehen, hat überdiess Grosshans[1]) die Reduction der Siedpunkte auf die absolute Temperatur vorgeschlagen. In Folge der thermischen Verhältnisse der Gase muss nämlich der Grad — 273° als absoluter Nullpunkt angenommen werden. Die Beobachtungstemperatur für den Siedpunkt ist daher mit $273 + t$ zu bezeichnen. Grosshans nennt nun $V_r$ reducirtes Atomvolumen und leitet dasselbe mittelst der Formel

$$V_r = V_s \frac{273}{273+t} \tag{35}$$

aus der Beobachtung für Siedpunkt $V_s$ ab. Vor Allem fand Grosshans dass bei Einführung dieses reducirten Ausdrucks die Volumina für manche ähnliche Verbindungen gleich werden, so ist für

| | $s$ | $V_s$ | red. Vol. |
|---|---|---|---|
| Chloräthyl | $s = 11^0$ | $V_s = 71{\cdot}2$ | red. Vol. $= 68{\cdot}2$ |
| Bromäthyl | 41 | 78·4 | 68·3 |
| Jodäthyl | 71 | 86·1 | 68·4 |

Grosshans fand nun, dass, sowie die Volumina der Gase Multipla von 7·22 sind, für die flüssigen oder festen Verbindungen die reducirten Volumina meist Multipla der Zahlen 30, 44, 66, 68, 84, 93, 104, 116 sind. Es scheinen sich somit einige einfache Relationen zu ergeben.

§. 12. Abweichend von der Theorie des Atomvolumen hat Nordenskiöld (Pogg. Ann. vol. 102, 390) versucht, die Dichte von Verbindungen zu berechnen. Er stützt sich auf die Theorie der Molekularkräfte, von welchen die Anziehung proportional der Masse dividirt durch das Quadrat der Distanz, hingegen die Abstossung reciprok proportional der dritten Potenz der Distanz wirkt.

Für jeden Körper wird somit je nach seinem Molekularzustande zwischen Anziehung und Abstossung ein Gleichgewicht eintreten in der allgemeinen Form

$$K = \frac{m}{r^2} - \frac{c}{r^3} \tag{36}$$

$r$ stellt die Distanz der Moleküle dar, und kann daher durch das Atomvolumen ersetzt werden, ebenso kann $K$ für feste und flüssige Körper der Null gleich gesetzt werden. Es resultirt somit

$$c = mr = m\sqrt[3]{v} = m\sqrt[3]{\frac{m}{d}} = \frac{m^{4/3}}{d^{1/3}} \tag{37}$$

Es scheint, dass die Abstossung der kleinsten Theilchen sich einfach durch eine summatorische Function der einzelnen Elemente darstellen lasse in der Weise

[1]) Grosshans. Ann. d. Chem. u. Pharm, vol. 116, pag. 221.

$$\frac{C}{\sqrt[3]{M}} = \frac{c_1}{\sqrt[3]{m_1}} + \frac{c_2}{\sqrt[3]{m_2}} + \frac{c_3}{\sqrt[3]{m_3}} \tag{38}$$

substituirt man hierin die Werthe von 37 und die Aequivalente $A_1$, so folgt

$$\frac{A_1 + A_2}{\sqrt[3]{D}} = \frac{A_1}{\sqrt[3]{d_1}} + \frac{A_2}{\sqrt[3]{d_2}} \frac{A_3}{\sqrt[3]{d_3}} \tag{39}$$

eine Gleichung, welche gestattet, aus den bekannten Dichtigkeiten der Bestandtheile jene der Verbindungen zu berechnen; diese Rechnung wurde von Nordenskiöld für viele Verbindungen durchgeführt und ergab Resultate, die mit den Beobachtungen vorzüglich übereinstimmen.

Uebrigens nahm auch er nicht bloss die eindeutigen Werthe $D_\alpha$ der Grundstoffe an, sondern er legt denselben ein multiples Atomvolumen und daher eine multiple Dichte $D_\beta$ $D_\gamma$ mit den einfachen Factoren 2, 3 zu Grunde, so dass man die Gleichung 39 schreiben kann

$$\frac{A_1 + A_2 \ldots}{\sqrt[3]{D}} = \frac{A_1}{\sqrt[3]{xD_1}} + \frac{A_2}{\sqrt[3]{yD_2}} + \ldots \tag{40}$$

Man kann nach diesen Erwägungen somit im Voraus für die einzelnen Grundstoffe die nothwendigen Glieder $\frac{A}{\sqrt[3]{D}}$ im Voraus berechnen, sowohl mit der ursprünglich beobachteten Dichte $D_\alpha$ als auch mit der zweifachen $D_\beta$ oder dreifachen Dichte $D_\gamma$. Ausser den Daten, welche in der früheren Tabelle dargelegt sind, ergeben sich auch nach dieser Methode theoretisch abgeleitet die Werthe von $AD^{-1/3}$ für Sauerstoff 11·84, für Wasserstoff 3·34, für Stickstoff 15·4, Fluor 13·46.

Wie nahe die Rechnung mit der Beobachtung übereinstimmt, mögen nachfolgende Beispiele darthun.

| | gerechn. Dichte | beob. Dichte |
|---|---|---|
| Anhydrit | 2·90 | 2·85 |
| Cölestin | 3·70 | 3·85 |
| Baryt | 4·54 | 4·35 |
| Anglesit | 6·22 | 6·26 |
| Arragonit | 3·00 | 2·93 |
| Strontianit | 3·63 | 3·59 |
| Witherit | 4·29 | 4·3 |
| Kalisalpeter | 2·09 | 2·06 |
| Willemit | 4·03 | 3·89 |
| Andalusit | 3·10 | 3·10 |
| Euklas | 3·17 | 3·0 |
| Smaragd | 2·85 | 2·67 |
| Schwefelkies | 4·96 | 4·9 |
| Kobaltglanz | 6·02 | 6·0 |

Diese Tabelle zeigt ganz deutlich, dass die angewendete Methode ihre vollständige Berechtigung hat. Wohl kann man auch hier nur durch Induction die Werthe der Coefficienten $x$, $y$, $z$ bestimmen, doch sind dieselben für eine grössere Reihe analoger Verbindungen ziemlich constant.

Die Resultate der Nordenskiöld'schen Untersuchung sind aber mit denen von Schröder nahe verwandt. Die Resultate beider Autoren führen gleichmässig zu dem Satze, dass die Dichte jeder Verbindung eine Function der Dichte und Aequivalente der Bestandtheile ist, nur besitzen letztere die Fähigkeit, in mehreren allotropen Modificationen aufzutreten.

So lange nun von chemischer oder physikalischer Seite nicht die Bedingungen gegeben sind, welche das Gesetz des Auftretens solcher allotroper Modificationen regeln, so wird es nur durch versuchende Synthese möglich sein, die beobachtete Dichte aus den Bestandtheilen zu construiren. Die bisherigen Untersuchungen lehrten bisher nur, dass unter allen Verhältnissen eine solche Construction möglich. Die Vorausbestimmung der Condensationen jedoch ist bisher nicht vollkommen geglückt.

Die Möglichkeit jedoch, das specifische Volumen einer Verbindung mittelst mehrerer verschiedener Annahmen über die Condensationen der auftretenden Elemente doch immer den Beobachtungen entsprechend rechnen zu können, spricht nicht gegen die Theorie des Atomvolumens. Es beweist diese mehrfache Uebereinstimmung vielmehr den inneren gesetzlichen Zusammenhang der Atomvolumina, der nicht bloss für die Grundstoffe, sondern auch für die Verbindungen Geltung hat.

# III. Kapitel.

## Einfluss der Krystallbildung auf die Dichte. Die Variationen des Atomvolumens in isomorphen Reihen.

§. 13. Da die Bildung eines Krystalls den Uebergang des labilen Gleichgewichtszustandes in den stabilen bedeutet und nur durch eine möglichst symmetrische Gruppirung der Atome zu erreichen ist, so erhellt, dass das Volumen einer krystallisirten Verbindung eine Function der Krystallgestalt sein wird.

Bei der Betrachtung dieses Einflusses müssen wir wohl jene Fälle vorerst ausnehmen, bei welchen der Krystallisationsprocess mit der Veränderung des Gleichgewichtszustandes auch eine Veränderung der Aggregatform, aus dampfförmig oder flüssig in fest bewirkt, und es können nur solche Stoffe zum Vergleiche gewählt werden, für welche schon die labile Molekulargruppirung den festen Zustand hervorgerufen hat.

Wenn nun auch mehrere Mineralien gleiche Dichte sowohl im amorphen als krystallisirten Zustande besitzen, so ist hingegen bereits seit langem eine grössere Gruppe von Verbindungen bekannt, welche nach dem Processe des Schmelzens eine bedeutende Volumsveränderung wahrnehmen lassen.

Als das erste Beispiel dieser Art ward Granat bekannt[1]), welcher, wenn er geschmolzen wird, wohl keinen Verlust an seinem absoluten Gewichte erleidet, jedoch eine Vermehrung seines Volumens um 20 Procente erhält. Kobell fand für einen Granat vom Zillerthal bei einem Gewichtsverlust von 0·02 die Dichte vor dem Schmelzen 4·04, nach dem Schmelzen 3·12. Magnus fand für einen Grossular von Wilui 3·63, für einen rothen Granat aus Grönland 3·90 vor dem Schmelzen, geschmolzen sanken deren Dichten auf 2·93, resp. 3·05 herab. Auch fand Magnus die Dichte des Vesuvians $D = 3{\cdot}45$, nach dem Schmelzen $D = 2{\cdot}957$.

[1]) Magnus Pogg. Ann. vol. 22, pag. 391. Kobell Schweigg. Journ, vol. 54, pag. 243.

Allein diese Thatsachen blieben vorerst ohne genügende Erklärung, obgleich Deville[1]) die Versuche vervielfältigte und bereits angeben konnte, dass der Process des Schmelzens weder bei den Metallen, noch bei Steinsalz und Thonerde von Einfluss auf das Volumen sei.

Eine Erklärung und Anwendung obiger Thatsachen ward erst durch Mohr[2]) gegeben. Derselbe machte darauf aufmerksam, dass nicht nur der Quarz seine Dichte durch Schmelzen von 2·6 auf 2·2 vermindern, sondern dass eine solche Volumsvermehrung bei fast allen Silicaten eintritt, dass somit die Kieselsäure das den Raum vermehrende Element sei.

Die Thatsache ist insofern wichtig, als sie die pyrogenetische Bildung vieler Silicatgesteine ausschliesst, indem solche Mineralien dieser Gruppe, z. B. Augit und Leucit, welche der hohen Temperatur in den Laven ausgesetzt waren, ihre Dichte bereits geändert haben und dieselbe alsdann constant beibehalten.

Aber nicht bloss die Silicatgesteine zeigen einen Unterschied in der Dichte ihrer geschmolzenen und krystallisirten Masse, sondern es treten auch bei einigen anderen, z. B. Gadolinit, Samarskit, Orthit, Tschewkinit etc. in Folge einer stärkeren Erhitzung Volumsveränderung auf. Man nennt bei diesen Mineralien die Erscheinung Verglimmen, indem bei Erreichung eines bestimmten Wärmegrades die Bewegung der kleinsten Theilchen beginnt, und diese letztere eine momentane Lichtentwicklung hervorruft. Ein solches Mineral zeigt diese Erscheinung nur einmal, und ändert, wie gesagt, hierbei seine Dichte. Nach Rose (Pogg. An. vol. 48) vermindert Samarskit seine ursprüngliche Dichte 5·715 durch das Verglimmen auf 5·373. Nach Kobell soll hingegen die Dichte des Gadolinits durch das Verglimmen zunehmen.

Bedeutend grössere Differenzen im Volumen als die Substanzen in ihrem amorphen und krystallisirten Zustande zeigen die allotropen Modificationen. Als solche sind nämlich nicht nur Grundstoffe, ich erinnere an Selen, Schwefel, Phosphor, Kohlenstoff, sondern auch mehrere wichtige Mineralien, Calcit und Arragonit; Anatas, Rutil, Brookit bekannt. Wohl variiren bei allen diesen Fällen die Dichte und die Krystallgestalt, doch man wird wohl beide kaum in directes Abhängigkeitsverhältniss setzen können. Es zeigen nämlich die optischen Werthe (siehe betreffendes Kapitel), dass wohl die Materie dieser allotropen Modification ident sei, doch in einem multiplen, gleichsam polymeren Aequivalentverhältnisse auftritt. In Folge dessen müssen abhängig von der chemischen Polymerie Dichte und Krystallgestalt wechseln, wie diess schon im Gesetze 2 des §. 13 ausgesprochen.

---

[1]) Deville. Compt. rend. vol. 40, pag. 769.
[2]) Mohr in Leonh. u. Gein. J. f. Mineral. 1866, pag. 181.

§. 14. Isosterismus. Durch die vorhergehenden Zeilen ist zwar der Einfluss der Krystallstructur auf das specifische Gewicht im Allgemeinen festgestellt, so lässt sich derselbe in den einzelnen Fällen nur schwierig verfolgen und durch Zahlen sicherstellen.

Den ersten Anstoss zur Ermittlung der bezüglichen Gesetze hat Kopp (Pogg. Ann. vol. 47, pag. 133) gegeben. Bei seiner Untersuchung fand er nämlich, dass die Atomvolumina von

Magnesium $d = 1{\cdot}01$ $V = 25{\cdot}06$
Calcium $d = 1{\cdot}64$ $V = 25{\cdot}02$

dann von

Strontium $d = 2{\cdot}86$ $V = 30{\cdot}14$
Baryum $d = 4{\cdot}55$ $V = 30{\cdot}19$

wären. Da die angeführten Stoffe unzweifelhaft isomorphen Gruppen angehören, so hat Kopp darauf hingewiesen, dass die Isomorphie durch die Gleichheit der Atomvolumina bedingt ist.

Diese für die Folge der Zeit wichtige Entdeckung verdankt man jedoch nur den zur damaligen Zeit noch ungenauen Bestimmungen der Dichte von Magnesium und Strontium. Die jetzt bekannten Werthe eingeführt, ergeben für das Volumen der verglichenen Stoffe nicht mehr gleiche Werthe (siehe die Tabelle §. 8).

Trotzdem war die Entdeckung dieses Zusammenhanges zwischen Volumen und Krystallform von bedeutendem Einfluss.

Bereits Schröder stellte Pogg. Ann. vol. 50 folgende Gesetze für die Isomorphie auf.

a) Einfache Körper sind isomorph, wenn dieselben innerhalb bestimmter Temperaturgrenzen ein nahe gleiches Atomvolumen haben.

b) Zusammengesetzte Körper sind isomorph, wenn sie aus isomorphen Elementen ähnlich zusammengesetzt sind, d. h. wenn die entsprechenden Elemente derselben in solchen Condensationen in den entsprechenden Verbindungen enthalten sind, bei welchen ihre Aequivalentvolumina nahezu gleiche Werthe haben.

Eine theilweise Begründung dieser Sätze liefern sowohl die Atomvolumina vieler isomorphen Verbindungen, welche nahezu gleich sind, als auch die der Elemente selbst, für welche die Zahlen (vergleiche frühere Tabelle) entweder gleich oder einfache Multipla sind.

Schröder hat wohl in einer späteren Schrift diese seine allgemein formulirten Gesetze zurückgezogen, doch sind dieselben, wenn man Beschränkungen derselben zulässt, auch noch dem neueren Stande der Wissenschaft nicht widersprechend. Wie bereits im ersten Theile des vorliegenden Werkes bei dem Kapitel des Homöomorphismus erwähnt, bestrebt man sich, letzteren vom Atomvolumen abzuleiten, und die

darauf bezüglichen Ansichten waren in den betreffenden Paragraphen angegeben worden. Die entgegengesetzte Frage tritt hier an den Forscher heran: die Ableitung des Atomvolumens von der Krystallgestalt.

Wie nun in dem betreffenden Kapitel[1]) über Isomorphie schon erwähnt, sind die beiden Begriffe: Aehnliche Form der Krystalle und ähnliches Volumen nicht von gleichem logischen Umfange. Es kann Isomorphie ohne Isosterismus, und Isosterismus ohne gleiche Krystallgestalt vorkommen. Letzterer Fall ist der häufigere, wie auch sehr leicht erklärbar, wenn man auf die Krystallbildung Rücksicht nimmt.

Wie in einem späteren Kapitel erörtert werden wird, so kann die Bildung eines Krystalls dadurch vor sich gehen, dass die Atome der verbundenen Elemente sich axial zu einem Molekül vereinen. Die ellipsoidischen Axen des Moleküls werden nun je nach der auftretenden Atomanzahl ungleich sein und hierdurch Grund geben zur axial ungleichen Ausbildung des aus den Molekülen aufgebauten Krystalls.

Das Atomvolumen stellt aber auch das Volumen des Moleküls dar, und es wird möglich sein, durch mehrere hypothetische Ellipsoide ein und dasselbe Volumen zu erzeugen.

Es wird durch diese Erwägungen klar, dass wohl in den meisten Fällen, in welchen der krystallographische und morphologische Charakter einer wahren Isomorphie herrscht, mit letzterer Isosterismus zusammentreffen wird, dass diese Uebereinstimmung jedoch nicht ausnahmslos auf alle Fälle ausgedehnt werden darf.

In dem schon angezogenen Kapitel über Homöomorphismus waren bereits mehrere solche Ausnahmsfälle angeführt, auf welche ich hier hinweisen kann. Ebenso ward auch bereits der Versuch von Dana erwähnt, durch Einführung von unbestimmten Coefficienten (es wird als solcher von ihm die Anzahl der in der Verbindung auftretenden Aequivalente [O = 8] angewendet) die verschiedenen Werthe des Atomvolumens isomorpher Substanzen auf einen gemeinschaftlichen Werth zu bringen. Durch letzteres Verfahren würden jedoch allzuviel Stoffe auf das Multiplum einer Zahl zurückgeführt werden, und daher muss dasselbe als zu weit führend betrachtet werden. Wir sehen somit in zahlreichen Fällen mit der Aehnlichkeit der Form jene des Atomvolumens vereint, ohne die absolute Identität beider im vorhinein annehmen zu dürfen.

§. 15. Atomvolumina isomorpher Reihen. Bereits Schröder hat erkannt, dass mit den Winkeln der isomorphen Substanzen auch die Atomvolumina variiren werden. Doch hat erst Kopp den Zusammenhang zwischen der Grundgestalt und dem Volumen durch

[1]) In demselben sind manche Angaben, welche die Autoren auf die Aequivalentgewichte O = 100 bezogen hatten, unverändert angeführt.

Zahlen nachgewiesen[1]. Einige dieser Beispiele wurden nach Angaben Kopp's bereits im ersten Theile angeführt, hier, wo bereits die genaueren krystallographischen Methoden bekannt, ist es möglich, dass ich diese Verhältnisse nach einer anderen Methode genauer erörtere.

Stellt man nämlich grössere Reihen von isomorphen Körpern, wie die Reihen des Cerussit, Anglesit, Glaserit, Corund, Calcit . . mit ihren Winkeln und Axenwerthen zusammen und vergleicht mit den Differenzen derselben die Differenzen ihrer Atomvolumina $V$, so bilden beide eine gleichmässig zu- oder abnehmende Reihe. Ausserdem habe ich für zweckmässig gefunden, das Volumen der krystallographischen Grundgestalt ($KrV$) mit dem Atomvolumen zu vergleichen.

Man kann das Krystallvolumen annähernd in der Weise berechnen, dass man die Grundgestalt als Ellipsoid mit den betreffenden Axen $a$, $b$, $c$ annimmt, wodurch

$$KrV = {}^4/_3\pi\ (abc) \tag{41}$$

wird. Der constante Factor ${}^4/_3\pi$ kann vernachlässigt werden.

Als Beispiele können hervorgehoben werden in dem:

## I. Prismatischen Systeme.

1. Reihe: Kalisalpeter, Witherit, Strontianit, Cerussit, Arragonit.

| | $V$ | $a : b : c$ |
|---|---|---|
| $KaN\Theta_3$ | 47·9 | 1·7124 : 1 : 1·2034 |
| $Ba\,C\Theta_3$ | 45·6 | 1·6765 : 1 : 1·2454 |
| $Sr\,C\Theta_3$ | 41·1 | 1·6423 : 1 : 1·1836 |
| $Pb\,C\Theta_3$ | 40·8 | 1·6394 : 1 : 1·1853 |
| $Ca\,C\Theta_3$ | 33·9 | 1·5898 : 1 : 1·1443 |

| | $V$ | (110) ($\bar{1}$10) | $KrV$ |
|---|---|---|---|
| $KaN\Theta_3$ | 47·9 | 60° 36 | 2·065 |
| $Ba\,C\Theta_3$ | 45·6 | 61° 30 | 2·093 |
| $Sr\,C\Theta_3$ | 41·1 | 62° 41 | 1·944 |
| $Pb\,C\Theta_3$ | 40·8 | 62° 30 | 1·943 |
| $Ca\,C\Theta_3$ | 33·9 | 63° 50 | 1·818 |

2. Reihe. Baryt, Anglesit, Cölestin.

| | $V$ | $a : b : c$ |
|---|---|---|
| $Ba\,S\Theta_4$ | 52·1 | 1·3124 : 1 : 0·8143 |
| $Pb\,S\Theta_4$ | 48·1 | 1·2904 : 1 : 0·7863 |
| $Sr\,S\Theta_4$ | 46·9 | 1·2837 : 1 : 0·7814 |

| | $V$ | (110) ($\bar{1}$10) | $KrV$ |
|---|---|---|---|
| $Ba\,S\Theta_4$ | 52·1 | 74° 36 | 1·069 |
| $Pb\,S\Theta_4$ | 48·1 | 75° 28 | 1·014 |
| $Sr\,S\Theta_4$ | 46·9 | 75° 42 | 1·003 |

[1] Kopp. Ann. d. Chem. und Pharmac. vol. 36. Pogg. Ann. vol. 52, pag. 262.

## II. Hexagonalem Systeme.

1. Reihe: Natronsalpeter, Calcit, Manganit, Sphärosiderit, Magnesit, Willemit.

| | | |
|---|---|---|
| $Na\,N\Theta_3$ | $V = 37{\cdot}9$ | $a : b : c = \sqrt{3} : 1 : 0{\cdot}8265$ |
| $Ca\,C\Theta_3$ | $36{\cdot}8$ | $: 0{\cdot}8510$ |
| $Mn\,C\Theta_3$ | $31{\cdot}9$ | $: 0{\cdot}8212$ |
| $Fe\,C\Theta_3$ | $30{\cdot}3$ | $: 0{\cdot}8185$ |
| $Mg\,C\Theta_3$ | $27{\cdot}8$ | $: 0{\cdot}8093$ |
| $Zn\,C\Theta_3$ | $28{\cdot}0$ | $: 0{\cdot}8064$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $Na\,N\Theta_3$ | $V = 37{\cdot}9$ | $(001)\,(\bar{1}11) = 43^{0}\,40'$ | $Kr\,V = 1{\cdot}431$ |
| $Ca\,C\Theta_3$ | $36{\cdot}8$ | $44^{0}\,36'$ | $1{\cdot}474$ |
| $Mn\,C\Theta_3$ | $31{\cdot}9$ | $43^{0}\,28'$ | $1{\cdot}422$ |
| $Fe\,C\Theta_3$ | $30{\cdot}3$ | $43^{0}\,20'$ | $1{\cdot}417$ |
| $Mg\,C\Theta_3$ | $27{\cdot}8$ | $43^{0}\,4'$ | $1{\cdot}402$ |
| $Zn\,C\Theta_3$ | $28{\cdot}0$ | $42^{0}\,57'$ | $1{\cdot}397$ |

2. Reihe: Corund, Eisenglanz[1]).

| | | |
|---|---|---|
| $Al_2\,\Theta_3$ | $V = 25{\cdot}3$ | $a : b : c = \sqrt{3} : 1 : 1{\cdot}3624$ |
| $Fe_2\,\Theta_3$ | $30{\cdot}5$ | $1{\cdot}3655$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $Al_2\,\Theta_3$ | $V = 25{\cdot}3$ | $(001)\,(\bar{1}11) = 57^{0}34'$ | $Kr\,V = 2{\cdot}361$ |
| $Fe_2\,\Theta_3$ | $30{\cdot}5$ | $57^{0}37'$ | $2{\cdot}365$ |

## III. Pyramidalem Krystallsysteme: Wulfenit, Stolzit, Scheelit.

| | | |
|---|---|---|
| $Pb\,M\Theta_4$ | $V = 55{\cdot}9$ | $a : b : c = 1 : 1 : 1{\cdot}5728$ |
| $Pb\,W\Theta_4$ | $55{\cdot}4$ | $1{\cdot}5667$ |
| $Ca\,W\Theta_4$ | $47{\cdot}5$ | $1{\cdot}4846$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $Pb\,M\Theta_4$ | $V = 55{\cdot}9$ | $(101)\,(001) = 57^{0}33'$ | $Kr\,V = 1{\cdot}5728$ |
| $Pb\,W\Theta_4$ | $55{\cdot}4$ | $57^{0}27'$ | $1{\cdot}5667$ |
| $Ca\,W\Theta_4$ | $47{\cdot}5$ | $56^{0}\,1'$ | $1{\cdot}4846$ |

Ausser diesen Beispielen könnte man noch manche andere Reihe hier benützen, doch lassen sich bereits aus den angeführten einige wichtige Sätze ableiten, deren erster von Kopp aufgestellt ward.

1. Die specifischen Volumina isomorpher Verbindungen bilden eine arithmetische Reihe, mit welcher entweder gleich oder entgegengesetzt die Reihe der krystallographischen Dimensionen und Winkel verläuft.

2. Während die Differenzen der Winkel und specifischen Volumina von Stoff zu Stoff auch entgegengesetzte Vorzeichen haben können, bilden hingegen die Krystallvolumina und Atomvolumina gleichmässig zu- oder

[1]) Messungen von Kokscharow, Mater. I.

abnehmende parallel laufende Reihen für krystallographisch und chemisch isomorphe Verbindungen.

3. Für bloss krystallographisch isomorphe Körper ohne chemische Verwandtschaft sind wohl die Atom- und Krystallvolumina nahe gleich, jedoch die gesetzmässige Identität der Vorzeichen der Differenzen scheint hier zu fehlen.

Man könnte diese Sätze auch zur Erklärung einiger Verhältnisse der Pseudomorphosen benützen. Da für die obigen isomorphen Substanzen sowohl die Atom- als auch die Krystallvolumina abnehmende Reihen bilden, so kann man wohl annehmen, dass der Eintritt eines kleineren Moleküls in einen bereits vorhandenen Krystall leichter erfolgen wird als der entgegengesetzte Fall, weil für letzteren das eintretende Molekül keinen für sich genügenden Platz durch den Austritt eines der früheren Verbindung erhält. Es scheint somit die volumetrisch grössere Verbindung die zuerst vorhandene zu sein. Um diess zu erklären, kann ich auf die Umwandlungen des kohlensauren Kalkes durch Aufnahme eines oder der anderen Bestandtheile erinnern. Calcit, das Anfangsglied seiner isomorphen Reihe erleidet, wie bekannt, die meisten Umwandlungen durch Mischung mit isomorphen Verbindungen — Arragonit als das kleinste Glied seiner Reihe hingegen erleidet keine Modificationen, während sich aus Witherit Barytocalcit und Alstonit bildet.

§. 16. Die Volumsdifferenzen isomorpher Reihen. Haben isomorphe Reihen eine analoge Bildung ihrer Atomvolumina, so ergibt sich als natürliche Folge hiervon der von Schröder (Pogg. Ann. 106, pag. 241) aufgestellte Satz: mit dem Isomorphismus analoger Paare von gleichem Typus ist auch ihr Parallelosterismus verbunden.

Gleichwie die Körper gleichen Volumens isoster genannt werden können, so sind parallelisoster jene Paare von Verbindungen zu nennen, welche Gleichheit der Differenzen ihrer Atomvolumina haben.

Es haben jedoch nicht bloss isomorphe Reihen gleiche Differenzen ihrer Atomvolumina, sondern die Beobachtungen erlauben noch eine weitere Verallgemeinerung. Bei Vergleichung der Glieder zweier isomorpher Reihen folgt aus der gleichen chemischen Differenz auch gleiche Differenz der Atomvolumina, und zwar sowohl bei Vergleichung der Glieder einer Reihe unter sich, als auch durch Vergleichung mehrerer nicht isomorpher Glieder beider Reihen.

Die bereits im früheren Paragraphe erwähnten Zahlen können auch hier zum Beispiele dienen, in welchen sowohl zwischen den neben- als übereinander stehenden Zahlen die Differenzen zu bilden sind.

I. a) Baryt, Anglesit. b) Witherit, Cerussit.

| | | |
|---|---|---|
| $V(Ba\,SO_4) = 52{\cdot}1$ | $V(Ba\,CO_3) = 45{\cdot}6$ | $\Delta V(SO - C) = 6{\cdot}5$ |
| $V(Pb\,SO_4) = 48{\cdot}1$ | $V(Pb\,CO_3) = 40{\cdot}8$ | $= 7{\cdot}3$ |
| $\Delta V(Ba - Pb) = 4{\cdot}0$ | $= 4{\cdot}8$ | |

II. a) Stolzit, Scheelit — Cerussit, Arragonit.

| | | |
|---|---|---|
| $V(Pb\,WO_4) = 55{\cdot}4$ | $V(Pb\,CO_3) = 40{\cdot}8$ | $\Delta V(WO - C) = 14{\cdot}6$ |
| $V(Ca\,WO_4) = 47{\cdot}5$ | $V(Ca\,CO_3) = 33{\cdot}9$ | $= 13{\cdot}6$ |
| $\Delta V(Pb - Ca) = 7{\cdot}9$ | $= 6{\cdot}9$ | |

III. Wollastonit, Enstatit — Calcit, Magnesit.

| | | |
|---|---|---|
| $V(Ca\,Si\,O_3) = 40{\cdot}4$ | $V(Ca\,CO_3) = 36{\cdot}8$ | $\Delta V(Si - C) = 3{\cdot}6$ |
| $V(Mg\,Si\,O_3) = 31{\cdot}8$ | $V(Mg\,CO_3) = 27{\cdot}8$ | $= 4{\cdot}0$ |
| $\Delta V(Ca - Mg) = 8{\cdot}6$ | $= 9{\cdot}0$ | |

In den drei Beispielen sind die Differenzen nahezu dem Gesetze entsprechend, und würde man noch mehrere isomorphe Reihen hierherziehen, namentlich die tesseralen Krystalle, so würden wir zu gleichen Resultaten kommen.

Mittelst dieser Differenzen wird es möglich sein, aus der Kenntniss der Volumina einer isomorphen Reihe und der Differenzen für die einzelnen Grundstoffe annähernd die Werthe für die Glieder einer anderen Reihe zu berechnen.

Bei allen diesen Reihen ist die Differenz der Reihen selbst eine durchwegs constante, was sich auch vollkommen daraus erklärt, dass die auftretenden Stoffe für alle Glieder einer Reihe gleiche Werthe erhalten. Das zweite Gesetz hingegen, welches angibt, dass auch die analogen Glieder mehrerer Reihen gleiche Differenzen haben, ist nur mit Beschränkungen giltig. Dieses Gesetz nimmt nämlich an, dass die verglichenen Stoffe in gleichem Molekularzustande auftreten; diess ist jedoch nur in Verbindungen analogen Charakters der Fall. Aus dem vorhergehenden Kapitel ward jedoch erkannt, dass ein und derselbe Grundstoff je nach dem Charakter der Verbindung in mehreren, auch volumetrisch verschiedenen Modificationen auftreten könne. Es hat somit das obige Gesetz eine beschränktere Wirksamkeit und wird in seinen Ausnahmsfällen auch die Modificationen der Substanz zu erkennen geben.

Wenn nun auch in den meisten Fällen die Differenzen nur sehr wenig von einander abweichen, so dass man sie beinahe als gleich ansehen könnte, so sind in den übrigen Stoffen, wo der Unterschied einen höheren Werth erreicht, die Volumina — analog dem früheren Kapitel — nahezu M u l t i p l a.

Beispielsweise ist (vergleiche vorerwähnte Schröder'sche Untersuchung Pogg. Ann. vol. 106) in den isomorpheu Nitraten $\Delta V$(Ba — Sr) = 10·2, in den isomorphen Sulfaten und Carbonaten $\Delta V$(Ba — Sr) = 4·8, nahe halbsogross; bei den isomorphen Nitraten ist $\Delta V$(Ba — Pb) = 8·2, in den Sulfaten und Nitraten aber die Hälfte hiervon. Aehnliche Verhältnisse zeigen auch die Differenzen (Kalium Ammonium), für welche man die Krystalle mehrerer Systeme benützen kann, und die im Verhältnisse 4:9:12·7:17 oder 1:2 : 3 : 4 stehen.

§. 17. Abhängigkeit der Dichte von den Krystallsystemen. Diese letzterwähnten Reihen für die Differenz Kalium Ammonium benützt Tschermak in seiner Untersuchung über die Dichte (Acad. Sitzb. Wien 1862), um eine weitere Abhängigkeit des Volumens von der Krystallform anzugeben. Die obigen Differenzen 4, 9 . . bilden sich nämlich aus Reihen, die dem pyramidalen, prismatischen, monoklinischen und tesseralen Systeme angehören, und beobachten eine solche Reihenfolge bezüglich ihrer Grösse, dass $\Delta$ pyramidal $<$ $\Delta$ prismatisch $<$ $\Delta$ monoklinisch $<$ $\Delta$ tesseral ist. Obgleich diese Reihe nicht ausnahmslos Geltung hat, so scheint sie doch den meisten Fällen zu genügen; sie erfordert jedoch, dass man zweierlei tesserale Zustände annehme, deren erster kleiner, der zweite grösser als alle übrigen wäre. Man hat dann nach Tschermak die Grösse der Differenzen der Volumina so von der Krystallform abhängig zu denken, dass dieselbe proportional mit folgender Reihe verläuft: $\Delta$ tesseral $\beta$, $<$ $\Delta$ pyramidal, $<$ $\Delta$ prismatisch, $<$ $\Delta$ monoklinisch, $<$ $\Delta$ hexagonal, $<$ $\Delta$ tesseral $\alpha$. Das Gesetz in letzterer Form hat auch Tschermak angewendet, um die Abhängigkeit der Dichte allotroper Modificationen von der Krystallform anzugeben.

Die bekannten Werthe der Dichte von Calcit 2·72, Arragonit 2·93, monoklinischem Schwefel 1·97, prismatischem Schwefel 2·07, Marcassit 4·8, Pyrit 5·1 fügen sich obigem Gesetze. Andererseits wird jedoch durch dieses Gesetz die Thatsache nicht berücksichtigt, dass die Dichte der beiden pyramidalen dimorphen Verbindungen, Anatas und Rutil, verschieden ist, während, wie in einem späteren Kapitel erwähnt werden wird, die optischen und molekularen Eigenschaften derselben als gleich angesehen werden können. Durch diesen Ausnahmsfall, sowie durch die Nothwendigkeit, zwei tesserale Zustände zu unterscheiden, verliert das obige Gesetz viel von seiner Durchsichtigkeit, weil dadurch zugegeben werden muss, dass auch in einem und demselben Krystallsysteme die Grundstoffe in verschiedenen Modificationen auftreten können.

Vergleicht man aber ohne Rücksicht auf obiges Gesetz die Werthe des Volumens für dimorphe Körper, so findet man mit Ausnahme von

Calcit und Arragonit jene Volumina die kleineren, in welchen der Körper das stabile Gleichgewicht am meisten erreicht hat, und in welchen die übrigen Modificationen am leichtesten übergehen. Ich erwähne Schwefel, Marcasit und Pyrit; rhombisches Quecksilberjodid 6·1, pyramidales 6·27; Anatas, Brookit, Rutil; Graphit, Diamant. Hiermit erklärt sich auch, wie das tesserale System bald kleinere, bald grössere Dichte als das prismatische erzeugen kann. Für $\mathrm{G_2S}$ ist die octaedrische Form $D = 5·5$ die seltene, häufig hingegen die prismatische $D = 5·76$; anders ist es hingegen bei $FeS_2$, für welche Pyrit $D = 5·1$ die weitaus stabilere Form als Marcasit $D = 4·8$ ist.

Diese Erscheinungen lassen sich ungezwungen mit den Betrachtungen der Krystallogenesis in Einklang bringen, denn wenn auch die Moleküle in verschiedenen Gleichgewichtslagen auftreten können, so wird nur jene wahrhaft allen Einwirkungen von aussen erfolgreich Widerstand leisten, welche den innigsten Verband ihrer Theile, das kleinste Atomvolumen besitzt und von einer Gruppirung der Atome zum Moleküle, welche dieser Bedingung entspricht, muss noch überdiess die axiale Dichte der Krystalle abhängen.

Da bekanntlich alle Erscheinungen auf krystallographischem Gebiete nach den drei Dimensionen des Raumes wechseln, so ist auch eine solche axiale Variation der Dichte anzunehmen. Was wir unmittelbar beobachten, ist die mittlere Dichte, ein Mittelwerth jener Volumsverhältnisse, welche nach den drei Dimensionen wechselnd sind. Diese Variation der Dichte kann nur Folge der nach den drei Axen verschiedenen Gruppirung der Elemente im Grundmolekül sein, und desshalb wird die Krystallform auch die mittlere Dichte bestimmen. Bereits in dem Kapitel Krystallogenesis wurden die verschiedenen Methoden zur Ableitung der Krystallgestalt aus den Elementen erörtert und nachgewiesen, dass dieselben, wenn ohne Rücksicht auf die physikalischen Verhältnisse unternommen, erfolglos sind. Letztere lehren, dass die Elemente im Grundmolekül bereits eine axial verschiedene Lage haben müssen, und dass nur hierdurch sich gleichzeitig die krystallographischen und volumetrischen Verhältnisse ableiten lassen.

Wir werden daher in einem späteren Kapitel auf die Ableitung der axialen Dichte aus der Elementengruppirung nochmals zurückkommen.

## IV. Kapitel.

### Cohäsion und Elasticität.

§. 18. Cohäsion und Elasticität sind Kräfte verwandten Ursprungs, denn beide sind Folgen des Widerstandes, welchen der Molekularzustand eines Körpers gegen äussere Einflüsse ausübt. Unter Cohäsion verstehen wir zumeist den Widerstand des Körpers gegen eine Trennung seiner Theilchen, unter Elasticität hingegen das Vermögen des Körpers, die Wirkungen früherer Kräfte aufzuheben und in den ursprünglichen Molekularzustand zurückzukehren.

Obwohl beide Eigenschaften auf das nächste verwandt, so sind sie doch weder ident, noch in directer gesetzmässiger Beziehung, indem mit geringer Cohäsion grosse Elastizität und entgegengesetzt verbunden sein kann. Beide sind im Allgemeinen von dem Molekularzustande des Körpers abzuleiten, welcher oftmals die Fähigkeit eines innigen Verbandes der kleinsten Theilchen erlangt hat, andererseits wieder eine solche stabile Lagerung erhalten hat, dass die Partikelchen eine geringe Abweichung aus dieser Lagerung erhalten können, ohne aus dem Gleichgewichte gebracht zu sein, und daher wieder in letzteres zurückfallen werden. Während die Elasticitat selbst bei den Gasen bedeutend ist, so wird nach dem eben Gesagten die Cohäsion hingegen mit der Molekularattraction wachsen und bei den festen Körpern den höchsten Grad erreichen.

Die so bedeutende Cohäsion fester Körper ist mit den allgemein geltenden atomistischen Ansichten in Uebereinstimmung. Die Gase werden betrachtet als Complexe von Molekülen, die in fortwährender Bewegung und Ortsveränderung sind, bei den Flüssigkeiten ist die Ortsveränderung der einzelnen Theilchen dadurch eine beschränktere, dass der Schwerpunkt der ganzen Masse in Ruhe bleibt. Anders verhalten sich die festen Körper. Obgleich nemlich auch die kleinsten Theilchen

auch eines festen Körpers nie in absoluter Ruhe sind, so werden doch dieselben nur insoweit ihre gegenseitige Stellung verändern dürfen, als diess durch ihre gegenseitige Gleichgewichtslage erlaubt ist.

Wir unterscheiden jedoch bei den festen Körpern wieder zwei Zustände, den amorphen, in welchem die Körpertheilchen eine willkürliche Gleichgewichtslage angenommen haben, und den krystallinischen, in welchem die Moleküle eine symmetrische Lage besitzen.

Fehlen nun auch hier noch die nöthigen Behelfe, um die Atomgruppirung der Krystalle zu beweisen, und muss diess einem späteren Kapitel vorbehalten bleiben, so sehen wir doch bereits aus diesen allgemeinen Schlüssen, dass die Cohäsion amorpher Körper eine allseits gleiche, die hingegen von Krystallen eine symmetrisch gleiche oder ungleiche sein wird, ohne dass jedoch die Krystalle eine grössere Cohäsion besitzen müssen, als amorphe Körper. Während die Cohäsion bei Flüssigkeiten (obgleich vorhanden und nachweisbar) nur selten beobachtet wird, erreicht dieselbe bei den festen Körpern eine bedeutende Grösse. Sie wechselt von Stoff zu Stoff, und alle jene Einflüsse oder Beimengungen, welche Molekularänderungen selbst hervorbringen (z. B. beim weichen Eisen) vermögen die Cohäsion ein und desselben Stoffes auf ein vielfaches zu steigern.

Als Ursache der Cohäsion der Körper kann daher nur die gegenseitige Anziehung aller Massen angesehen werden, da die chemische Qualität, wie aus dem Obengesagten erhellt, nur einen geringeren Einfluss ausübt.

§. 19. Wenn auch die gesetzmässige Molekularlagerung fester Körper den Werth der Cohäsion zu erhöhen vermag, so ist derselbe noch weniger von der Lage der Atome als von deren Grösse und Masse abhängig. Uebereinstimmend zeigen auch hiermit die Krystalle wechselnd mit dem Stoffe oft grössere, oft kleinere Cohäsion als amorphe Körper.

Um Werthe für die Cohäsion zu erhalten, die mit einander vergleichbar sind, kann man dieselbe betrachten als Ausdruck des Widerstandes gegen eine Belastung, welche nothwendig ist, um den Zusammenhang der kleinsten Theilchen aufzuheben, d. h. den Körper zu zerreissen. Man pflegt zu diesem Zwecke den zu vergleichenden Stoffen gleiche Querschnitte, z. B. 1 Quadrat-Millimeter, meist die Form eines Drahtes zu geben und die zum Zerreissen erforderliche Belastung[1]) in Kilogrammen anzugeben. In nachfolgender Tabelle sind einige mineralogische Beispiele mit Bezug auf Temperaturen von 0°, 100°, 200° und unter gleichzeitiger Angabe des Atomvolumens angeführt.

---

[1]) Baudrimont. Pogg. Ann. 82, pag. 256, vergl. Wertheim. Pogg. Ann. Ergänzungsband II.

| | Vol. | 0° | 100° | 200° |
|---|---|---|---|---|
| Gold | 10·2 | $C =$ 18·4 | 15·2 | 12·8 |
| Platin | 9·22 | 22·6 | 19·2 | 17·2 |
| Kupfer | 7·08 | 28·1 | 21·8 | 18·2 |
| Silber | 10·24 | 28·3 | 23·2 | 18·5 |
| Palladium | 8·94 | 36·4 | 32·4 | 27·0 |
| Eisen | 7·14 | 205·4 | 191·7 | 210·0 |

Diese Zahlen zeigen, dass die Cohäsion mit der Temperatur abnimmt.

Man könnte auch eine zweite Bezeichnungsweise für die Werthe der Cohäsion einführen, nämlich die Angabe der Länge, welche man einem parallelepidischen Stabe ertheilen müsste, damit er an einem Ende befestigt, durch sein eigenes Gewicht abgerissen würde. So ergibt sich für die Cohäsion des Eisens, dass dieselbe einer Kraft gleichgesetzt werden kann, die das Gewicht eines Parallepiped von 1/2 Meile Länge ausübt.

Es erscheint diese Längenausdehnung als ein riesiges Mass für die Wirkung der Cohäsion der kleinsten Theilchen und fordert zur Entwicklung der Ursachen auf, welche es möglich machen, dass die Anziehung der Moleküle nicht nur für sich selbst die Anziehung der Erde überwindet, sondern noch einer so grossen Belastung Gleichgewicht hält.

Für diese Erscheinung gibt die allgemeine Annahme kleinster Theilchen, welche den Raum nicht vollständig erfüllen, sondern durch Zwischenräume von einander getrennt sind, und in symmetrischen, z. B. axialen Lagen gruppirt sind, nach Seguin eine Erklärung.

Würde die Zahl der Moleküle vergrössert und daher ihre Distanz vermindert, so würde die gegenseitige Anziehung und dadurch die Cohäsion bedeutend vermehrt. Aus dem obenerwähnten Falle hat Seguin[1]) zur Erklärung der Cohäsion des Eisens eine Theilung der Masse in mindestens 24.000,000.000 Moleküle abgeleitet.

Im Allgemeinen ersieht man, dass man die Phänomene der Cohäsion durch die gewöhnliche Vorstellungsweise der Anziehung materieller Theilchen erklären kann, wenn man über die Constitution im Innern folgende Voraussetzungen macht:

1. dass die Moleküle der Körper sich reihenweise zu axialen Stellungen ordnen, 2. dass die Dimensionen der Moleküle unter den millionsten Theil der Einheit sinken.

Dass die Temperaturerhöhung die Cohäsion vermindert, erklärt sich ebenfalls aus den atomischen Hypothesen leicht, indem durch die Erhöhung der Temperatur die Bewegung der Moleküle gesteigert und daher die gegenseitige Anziehung geschwächt wird.

---

[1]) Seguin. Pogg. Ann. vol. 88, pag. 438.

§. 20. Durch die Cohäsion sind mehrere wichtige Eigenschaften der Körper bedingt, so namentlich Dehnbarkeit, Sprödigkeit, Theilbarkeit und Härte, Eigenschaften, welche sämmtlich ihre Erklärung finden in der gegenseitigen Anziehung der kleinsten Theilchen, verbunden mit einer variablen Molekularlagerung. Im Allgemeinen ist der Grad der Härte proportional der Cohäsion. Jenen Körper, dessen Theilchen nur durch eine grosse Kraft von einander getrennt werden können, nennen wir hart; reicht hingegen schon eine geringere Kraft hin, um die Cohäsion der Theilchen zu überwinden, so ist er weich. Da die Härte ein wichtiges Kennzeichen der Mineralien ist, so ist ihr das nachfolgende Kapitel gewidmet.

Weniger von der Cohäsion als von der Molekularlagerung scheinen Dehnbarkeit und Sprödigkeit abzuhängen. Spröde Körper besitzen meist eine bedeutende Cohäsion, können der Einwirkung starker Kräfte widerstehen; ist jedoch auch nur einerseits der Molekularzusammenhang gestört, so ist die Cohäsion auch der übrigen Theile aufgehoben.

Zu den spröden Körpern können im Allgemeinen alle Krystalle gerechnet werden, denn auch diese vermögen bis zu einer gewissen Belastung den einwirkenden Kräften Widerstand zu leisten, jenseits der Grenze hört jedoch der Zusammenhang der Theilchen auf. Es ist möglich, auch unkrystallisirten Körpern die Eigenschaft der Sprödigkeit zu verleihen, wenn man dieselben durch künstliche Mittel zwingt, in einem für sie anormalen Gleichgewichtszustande zu verharren. So erhalten Stahl und Glas durch plötzliches Abkühlen, also durch Verhinderung einer natürlichen Molekulargruppirung, einen bedeutenden Grad von Sprödigkeit. Ebenso vermag auch eine geringe Beimengung von fremden Bestandtheilen, z. B. bei Eisen eine Spur von Schwefel oder Phosphor die Sprödigkeit zu vermehren.

Im Gegensatze zu den spröden Körpern stehen die dehnbaren, welche durch eine äussere Kraft eine Verschiebung der kleinsten Theilchen erleiden können, ohne dass die Cohäsion selbst überwunden wird. Die Dehnbarkeit setzt einen Molekularzustand voraus, in welchem den einzelnen Theilchen — ohne das Wesen des Körpers zu ändern — eine Aenderung ihrer Lage erlaubt ist. Wir sehen daher unter der Gruppe der dehnbaren Körper meist amorphe oder nicht krystallisirte Körper vertreten, vor Allem die Metalle. Aber auch die Erwärmung vermag, indem sie den einzelnen Theilchen eine freiere Beweglichkeit ertheilt, aus spröden Körpern, z. B. Glas, dehnbare zu erzeugen.

Der Grad der Dehnbarkeit kann im Allgemeinen durch die Ausdehnung gemessen werden, welche ohne Zerreissen möglich ist, und er ist sowohl für verschiedene Körper, als auch für denselben Körper bei

verschiedener Temperatur verschieden. Man pflegt die Grade der Dehnbarkeit mit den technischen Worten: geschmeidig, ziehbar, streckbar, hämmerbar zu bezeichnen.

§. 21. Spaltbarkeit. Da aus den bisherigen Untersuchungen erhellte, dass die Cohäsion eine Folge der inneren molekularen Constitution der Körper ist, so ist nur eine weitere Folge hiervon die Annahme, dass in den Krystallen die Cohäsion der einzelnen Theilchen nach den verschiedenen Richtungen eine andere ist.

Bereits in der Definition eines Krystalls ist die Eigenschaft hervorgehoben worden, dass derselbe sich nach ebenen symmetrischen Flächen in kleine Theilchen trennen lässt — er besitzt eine symmetrische Theilbarkeit. Es muss somit nach symmetrischen Ebenen, parallel den Krystallflächen die Cohäsion im Krystalle geringer sein als nach anderen Richtungen, denn nur dadurch ist es möglich, dass eine geringe, oft sehr kleine Kraft hinreicht, um eine Spaltung des atomistischen Gefüges nach diesen Ebenen hervorzurufen.

Eine Spaltbarkeit nach Flächen, welche nicht gleichzeitig Krystallflächen sind, oder doch wenigstens sein können, ward nie beobachtet. Sie tritt immer auf parallel den Flächen von möglichst einfachen Indices, die selten die Zahl 2 überschreiten, und umfasst, wie die morphologische Ausbildung überhaupt, immer die gesammte Flächenanzahl einer Form $\{hkl\}$. Treten an einem Krystalle zwei oder drei verschiedene Spaltungsrichtungen auf, so sind dieselben nie gleich, sondern durch die Leichtigkeit, sie zu erhalten, durch den zur Trennung der Theilchen nothwendigen Aufwand an Kraft verschieden. Analog scheinen auch die zusammengehörenden Spaltungsrichtungen einer Form, wenn dieselbe nicht absolut ident ist, nicht einerleiwerthig zu sein. So sind die rhomboedrischen Spaltungen am Corund nach Haüy, von Corund und Eisenglanz nach Breithaupt[1]) parallel einer Spaltungsrichtung — dem orthohexagonalen 201 — leichter zu erhalten, als die beiden übrigen. Analog ist es auch bei Calcit, für welchen die Spaltung nach einer Richtung immer leichter und schöner gelingt, als nach den beiden anderen. Am leichtesten lassen sich zumeist jene Spaltungsrichtungen erzeugen, welche das einfachere Zahlenverhältniss der Indices besitzt, so dass z. B. eine basische Spaltfläche leichter als eine prismatische, und diese leichter als eine pyramidale erhalten werden kann. Tritt an einem Mineral, z. B. bei Anhydrit, eine Spaltbarkeit nach den drei Pinakoidflächen auf, so erhellt nach dem bisher Gesagten, dass wohl die Cohäsion nach den drei Richtungen eine nahe gleiche, doch nicht idente sein wird.

[1]) Breithaupt. Mineralogische Studien. Leipzig 1866. pag. 37, pag. 85.

Schliesslich ist zu erwähnen, dass in den Mineralien noch manche ausgezeichnete Richtungen vorkommen, in welchen die Spaltbarkeit eine so leichte ist, dass der Krystall in parallele Blättchen zertheilt werden kann — es sind diess die Richtungen des Blätterbruches.

Da die Spaltbarkeit eine natürliche Folge der Cohäsion ist, so ist es möglich, aus letzterer einige Schlüsse über die molekulare Constitution der Krystalle zu ziehen. In Folge der im früheren Paragraphe gewonnenen Grundsätze wird man die Bildung des festen Körpers aus den Elementen durch axiale Gruppirung der Atome der letzteren zu einem festen Molekül erklären. Nach den auftretenden Elementen werden die Axen des ellipsoidischen Elementarmoleküls — analog den Krystallparametern — verschiedene Werthe haben, da sie den Grund der Variationen der krystallographischen Grundgestalt bilden. Aus diesen kleinen Grundgestalten wird sich durch successive Aneinanderlagerung der Krystall aufbauen; und für diesen Vorgang werden die Hypothesen von Huyghens und Haüy ihre genäherte Richtigkeit haben.

Je nachdem nun die Gruppirung der kleinen Kryställchen zu einem Complex mit vorzugsweiser Berücksichtigung der einen oder anderen Richtung geschieht, je nachdem die Vergrösserung der Krystalle durch Anlagerung der neuen Theilchen an diesen oder jenen Ebenen geschah, werden sich verschieden orientirte Blätterdurchgänge bilden, für welche die Cohäsion ein Minimum wird.

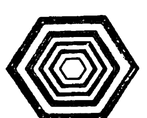
Es werden sich Theile des Krystallcomplexes abtrennen lassen, wenn die Grundgestalten im Krystall in solcher Lage aufeinandergeschichtet sind, dass sie mit der versuchten Theilungsebene eine parallele Fläche bilden. Ist diess nicht der Fall, so werden wir selbst mit dem Aufwande grösserer Kräfte keine ebene Theilungsgestalt erzielen — wir erhalten bloss eine sogenannte Bruchfläche. Je nachdem nun die durch den Bruch entstandene neue Oberfläche gestaltet ist, unterscheiden wir einen splitterigen, faserigen, blätterigen oder muschligen Bruch. Da auch letzterer durch die Gruppirung der kleinen Theichen und Cohäsion bedingt, daher für einen Körper constant ist, so kann derselbe den mineralogischen Charakteren beigezählt werden.

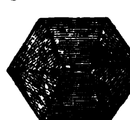
§. 22. Chemische Einwirkungen. Die axial verschiedene Cohäsion äussert sich jedoch nicht bloss als Widerstand gegen eine mechanische Kraft, welche eine Theilung der Moleküle hervorzurufen strebt, sondern auch als ein Widerstand gegen chemische Agentien. Mehrfache Untersuchungen lehren nämlich, dass chemische Mittel nicht auf allen Flächen einen gleich starken zerstörenden Einfluss auszuüben vermögen. Die variable Lagerung der Moleküle setzt der chemischen Affinität eine variable Stärke der Attraction der kleinsten Theilchen entgegen. Man

kann daher mit vollem Rechte auch jene auf chemischem Wege durch Aetzungen oder durch Verwitterung erhaltenen Zerstörungen eines Krystalles als ein Hilfsmittel zur Erkenntniss seines inneren Baues betrachten.

Um feine Aetzungen hervorzubringen, kann man das von Leydolt benützte[1]) Verfahren beibehalten. Je nach der Natur des Krystalls wird durch die Dämpfe von Wasser oder Säuren, bei Quarz durch Flusssäure die Aetzung der Flächen bewerkstelligt, von denselben mittelst Hausenblase ein Abzug genommen, welcher letztere eine bequeme Methode der Untersuchung ermöglicht.

Fig. 4.





Im Allgemeinen haben die Untersuchungen von Leydolt an Arragonit und Quarz gelehrt, dass selbst der von aussen scheinbar einfachste Krystall (Fig. 4) doch nur ein Complex von vielen in Zwillingsstellung aneinander gelagerten Individuen ist. Im Innern ist jedoch die Structur ebenfalls gesetzmässig, indem die Begrenzungen der einzelnen Individuen vollständig symmetrisch den Kanten parallel laufen und den Zwillingsgesetzen gehorchen. Die durch Aetzungen entstandenen Vertiefungen sind durchwegs von Linien begrenzt, welche zu Kanten oder Flächen parallel laufen und hierdurch zu erkennen geben, dass die Structur des Krystalls im Innern nach ähnlichen Richtungen vor sich gegangen ist. Letzteres ist auch der Grund, warum auf den Flächen mancher Krystalle so oft regelmässige Zeichnungen wahrgenommen werden.

Mit den Verhältnissen der Cohäsion ist ferner auf das innigste das successive Ausbreiten der elliptischen Verwitterungsfiguren auf den Krystallflächen verbunden. Die meisten wasserhältigen Krystalle verwittern durch Abgabe von Wasser, es entsteht ein matter Punkt auf einer Fläche, welche sich allmälig zu einem Kreise oder einer Ellipse ausbreitet, der endlich sich über die ganze Fläche erstreckt. Pape hat in neuerer Zeit[2]) diese Figuren untersucht und gefunden, dass dieselben mit dem krystallographischen Charakter im Einklange stehen. Die auf den Flächen entstehenden Verwitterungsfiguren sind bei den prismatischen Systemen Ellipsen, für das tesserale Kreise, für das pyramidale im Hauptschnitte Ellipsen, auf der Endfläche Kreise — es stimmt diess mit dem allgemeinen Charakter, nur fand Pape auf den Rhomboederflächen ebenfalls Kreise. Unter Zugrundelegung von senkrechten Axen auch für das monoklinische System fand Pape, dass die Axen der ellipsoidischen Figuren auf den Krystallflächen in die Ebenen der Krystallaxen und der Flächennormale fallen.

---

[1]) Ueber Aetzungen vergleiche Daniell, Isis 1817 und Leydolt. Wien. Acad. Sitzb. XV, 59, XIX, 10, auch Brewster. Phil. Mag. 1853.

[2]) Pape. Pogg. Ann. vol. 124, pag. 329, vol. 125 pag. 513.

Es ist aus dem bisher Gesagten ersichtlich, dass die Verwitterung nach den verschiedenen Krystallaxen verschieden fortschreitet, dass man ferner die auf den Flächen entstehenden Ellipsen als Durchschnittsfiguren auffassen kann, von der Fläche mit einem um den Krystall gelegten „Verwitterungsellipsoid", und dass man endlich von dem Verhältnisse der Axen der Verwitterungsfiguren auf den Flächen das Verhältniss der Axen des Verwitterungs-Ellipsoides ableiten kann.

Pape führt diess an mehreren Beispielen durch, von welchen ich Zinkvitriol heraushebe. Seien die Krystallaxen $a : b : c = 0·9804 : 1 : 0·5631$, so sind die Axen des Verwitterungsellipsoides $a' : b' : c' = 1·132 : 1 : 1·404$.

Pape sucht den Grund leichteren oder schwereren Verwitterns in der Grösse der krystallographischen Axen, so dass in der Richtung der kleineren Axe die grössere Verwitterbarkeit sich zeigen müsse, da in dieser Richtung die wenigsten Moleküle, also auch die geringste Cohäsion wäre.

Da die bisherigen Untersuchungen für die Krystallbildung keine so einfache Hypothese als möglich zulassen, so muss auch diese hier als ungenügend betrachtet werden. Es bietet sich jedoch ungezwungen eine leichte Erklärungsweise durch die directe Abhängigkeit der Verwitterung von der Cohäsion oder Theilbarkeit. Die Verwitterung wird naturgemäss nach jenen Theilen sich am schnellsten ausbreiten, welche in inniger Berührung miteinander stehen, während solche Richtungen, welche durch eine Spaltungsebene durchkreuzt sind, nur einen loseren Zusammenhang der Theilchen und daher auch langsame Fortpflanzung der chemischen Actionen besitzen müssen. Proportional also mit der grösseren oder geringeren Theilbarkeit wird die bezügliche Axe des Verwitterungsellipsoides zu- oder abnehmen.

Vergleicht man den erwähnten Fall bei Zinkvitriol parallel den Flächen, so hat auch die parallel den besten Spaltungsrichtungen laufende Axe $c$ den grössten Werth der Verwitterung erreicht, die darauf senkrechte Axe $b$ hingegen den kleinsten Werth. Hierdurch wird es auch erklärlich, wie auf den Rhomboederflächen nahezu Kreise als Verwitterungsfiguren entstehen können.

§. 22. Elasticität. In den vorhergehenden Paragraphen wurden die Folgen jener Kraft erörtert, welche der Trennung der einzelnen Theilchen Widerstand leistet. Ausser dieser Cohäsion wohnt jedoch noch den Molekülen ein Beharrungsvermögen in ihrer Gruppirung und gegenseitigen Distanz inne, welches bestrebt ist, die Einwirkungen und Verschiebungen, hervorgebracht durch äussere Kräfte, aufzuheben.

Es wird diese Eigenschaft Elasticität genannt, und wir bezeichnen als vollkommen elastisch jenen Körper, bei welchem die Theilchen nach

Aufhören der äusseren Kraft wieder vollständig in ihre frühere Lage zurückkehren.

Die Grösse der Elasticität ist selbst bei einem und demselben chemischen Stoffe variabel, und sie lässt sich durch mechanische Hilfsmittel vergrössern oder verkleinern, wofür das Anlassen des Stahls ein allbekanntes Beispiel liefert. Ebenso hat auch die Temperatur einen Einfluss, und zwar ist mit der Wärmezunahme meist eine Abnahme der Elasticität verbunden. Andererseits vermögen aber auch geringe Beimengungen, Legirungen an und für sich spröder Metalle elastische Verbindungen hervorzurufen.

Da den Molekülen selbst der festen Körper eine wenn auch beschränkte Beweglichkeit zukommt, so ist jeder Körper bis zu einer gewissen Grenze, „Elasticitätsgrenze", elastisch; erreichen jedoch die Verschiebungen der kleinsten Theilchen Werthe, welche diese Grenze überschreiten, so wird entweder eine Trennung der Partikeln oder ein unvollkommenes Zurückgehen in die ursprüngliche Lage, oder selbst ein Verbleiben in der durch die Kraft erzeugten Lage.

Die durch eine äussere Kraft an einem elastischen Körper bewirkten Verschiebungen sind die Resultirenden der Kraft weniger der durch die Verschiebung geweckten Elasticität. Bei jeder Vergrösserung der Kraft wächst die Verschiebung, mit ihr die Elasticität, bis wieder äussere Kraft und Elasticität sich das Gleichgewicht halten.

Innerhalb der Elasticitätsgrenzen wachsen die Verschiebungen wie die Kräfte, und man kann daher innerhalb dieser Grenzen jenen Körper unter mehreren für mehr elastisch bezeichnen, an welchem eine gleiche Kraft kleinerer Verschiebungen zu bewirken vermag. Um die Elasticitäten verschiedener Körper zu messen, kann man daher die Kräfte vergleichen, welche den Körper um eine seiner Länge gleiche Grösse auszudehnen vermag, und letztere Kraft wird Elasticitätscoefficient oder Elasticitätsmodulus $M$ genannt. Es verhalten sich also

$$E : E' = M : M' \tag{42}$$

wobei auch für $M = \frac{P}{L}$ d. i. der Quotient von der Verlängerung in die Kraft gesetzt werden kann.

Der Elasticitätsmodulus $M$ lässt sich jedoch nicht bloss auf directem Wege durch die Verlängerung eines belasteten Stabes, sondern auch durch die Methoden der Akustik bestimmen. Bekanntlich ist für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles angewendet auf den vorliegenden Fall die Formel geltend

$$v^2 = \frac{g}{\Delta} = \frac{M}{D} \tag{43}$$

wo $g$ die Acceleration und $\Delta$ die Dilatation einer Säule von der Länge 1 und des Querschnittes 1 durch ihr eigenes Gewicht, $M$ den Elasticitätsmodulus, $D$ die Dichte bedeutet.

Diese Formel gilt für longitudinale Schwingungen[1]) und mittelst ihr lässt sich aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls der Elasticitätsmodulus berechnen, ein Mittel, welches in manchen Fällen von Wichtigkeit ist. Ausserdem können noch transversale Schwingungen eines einseitig festgemachten Stabes benützt werden. Die Anzahl der transversalen Schwingungen in der Secunde ist

$$s = \frac{n^2 D}{L^2} \sqrt{\frac{2hR}{g}} \tag{44}$$

worin $n$ die jeder Schwingungsart zukommende Zahl, $D$ die Dicke, $Z$ die Länge des Stabes, $R$ die Cohäsion (Rigidität) des Körpers, $h$ die Höhe der Fallkraft, $g$ die Schwere des Körpers[2]) ist. Ferner ist

$$v = \frac{l}{T}$$

worin $l$ die ganze Wellenlänge und zugleich die Länge des vibrirenden Stabes und $T$ die Schwingungsdauer, d. i. den reciproken Werth der Schwingungsanzahl $n$ bedeutet. Es erübrigt daher nur, durch Vergleich mit einem anderen schwingenden Körper, dessen Schwingungszahl $n'$ durch die Höhe seines Tones bekannt ist, den isochronen Werth $n$ zu finden.

Wertheim[3]) hat diess auf höchst sinnreiche Weise dadurch erreicht, dass er eine Stimmgabel und den Stab gleichzeitig schwingen liess und deren Schwingungen auf einer sich drehenden Scheibe zur Darstellung brachte. Letzteres geschah durch senkrecht auf die Enden der Stäbe aufgesetzte Häkchen, welche die geschwärzte Scheibe berührten.

Wertheim bestimmte nach den erörterten Methoden für die Metalle die Elasticitätsmodule. Er fand die Werthe jener Belastungen, welche die Längen eines Stabes von 1 Quadratmillimeter verdoppeln würden, in Kilogrammen für: Blei 1775·0, Gold 8131·5, Silber 7357·7, Zink 8734·5, Palladium 11739, Kupfer 12449, Platin 17044, Eisen 19903—20869.

Die Variation der Elasticität mit den verschiedenen Stoffen suchte Wertheim von der Atomdistanz, d. i. der dritten Wurzel aus dem

---

[1]) Poisson. Mém d'Inst. Paris 1827. tom. 8, pag. 357. Ann. d. chim. II. Ser. 36, 384. 37, 337. 42, 145. 44, 323.

[2]) Chadni. Akustik 1802, pag. 101. Vergl.: Dan. Bernoulli. Comment. Acad. Petrop. T. XIII, L. Euler. Investigatio motuum, quibus laminae et virgae elasticae contremiscunt. Act. Ac. Petrop. 1780. I. 103. Giord. Riccati. Mem. Mat. et physic, d. Soc. Italiana I.

[3]) Wertheim. Pogg. Ann. 1853. Ergänzungsband II. Vergl. Napiersky, über Torsions-Elasticität. Pogg. Ann. Ergänzungsband III.

specifischen Atomvolumen $= \sqrt[3]{\frac{A}{D}}$ abhängig zu machen, und fand, dass $M(\sqrt[3]{\text{Sp. } V})^7$ für die verschiedenen Stoffe nahe constant bleibt.

Bereits früher hat schon Masson[1]) aufmerksam gemacht, dass das Product des reciproken Werthes vom Elasticitätsmodul $M$ in ein Multiplum des Aequivalentes $A$ constant wäre. Er fand

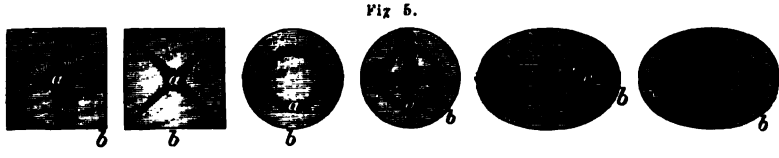
| | $\frac{1}{M}$ | $A$ | $\frac{A}{M}$ | |
|---|---|---|---|---|
| Eisen | 0·384 | 56 | 22704 | 1 |
| Kupfer | 0·530 | 63·4 | 27302 | 1 |
| Zink | 0·630 | 65·2 | 41076 | 2 |
| Zinn | 1·572 | 118 | 185496 | 9 |
| Silber | 1·092 | 108 | 117936 | 5 |

Obgleich die Zahlen nicht für so einfaches Verhältniss sprechen, so scheint doch durch die Untersuchungen der Ausdehnung durch die Wärme es wahrscheinlich geworden zu sein, dass Beziehungen zwischen Elasticität und Atomgewicht bestehen[2]). In späteren Kapiteln werden wir auf dieselben wieder zurückkommen.

§. 24. Elasticität in Krystallen. Klangfiguren. Da die von Wertheim angewendete Methode selbst mit Stäben von 50 Millimeter Länge noch zu operiren erlaubt, so glaubte derselbe aussprechen zu können, dass sie auch gestatten wird, die Verhältnisse der Elasticität in Krystallen direct zu untersuchen. Die geringe Elasticität der Krystalle überhaupt und ihre Kleinheit dürfte nur in den wenigen Fällen, wie bei Quarz oder Kalkspath ein solches Verfahren ermöglichen. Um zu demselben Ziele zu gelangen, hat bereits früher Savart[3]) die stehenden Schwingungen an Platten benützt.

Letztere entstehen im Allgemeinen, wenn eine Platte an einem Punkte $a$ befestigt, an einem zweiten $b$ durch Streichen in Vibrationen versetzt wird. Die Vibrationen werden von den Rändern zurückprallen und mit den neu entstehenden interferiren. An diesen Stellen, Knotenlinien, kommt der Körper in Ruhe, und durch aufgestreuten leichten Sand oder feine Theilchen werden dieselben sichtbar. Je nach der Begrenzung der

Fig. 5.




Platten, ob quadratisch oder rund, und dem Punkte, wo die Bewegung beginnt, werden andere Interferenzen und Knotenlinien entstehen (Fig. 5).

[1]) Masson. Pogg. Ann. vol. 59, pag. 157.
[2]) Vogel. Pogg. Ann. vol. 111, pag. 239.
[3]) Savart. Pogg. Ann. vol. 16, pag. 206.

Ist die schwingende Platte vollkommen homogen, so wird die Klangfigur ident bleiben, wenn auch die Bewegungsstellen und Unterstützungspunkte gleichmässig geändert werden. Anders ist es hingegen bei Platten, welche nicht vollkommen homogen sind, und für welche mehrere Richtungen, die den Charakter einer grösseren oder geringeren Elasticität besitzen, zu berücksichtigen sind. Sind solche Platten kreisrund und in der Mitte unterstützt, so sind die äusseren Verhältnisse wohl gleich, die entstehenden Figuren werden jedoch ungleich werden, wenn man an verschiedenen Punkten der 4 Quadranten die Scheibe in Bewegung setzt.

Aus den Untersuchungen von Savart an Holz mit concentrischer Structur ergaben sich die folgenden Sätze. Wenn eine der Elasticitätsaxen in der Ebene der Scheibe liegt, besteht eine der Knotenfiguren aus zwei senkrecht einander durchkreuzenden Linien, die andere der Figuren besteht aus zwei hyperbelähnlichen Curven. Enthält die Scheibe aber keine der Axen in ihrer Ebene, so bestehen beide Knotenfiguren aus Hyperbeln. Die Anzahl der Schwingungen ist desto grösser, je geringer die Neigung der Platte gegen die Axe der grössten Elasticität ist. Die Scheiben, welche gegen die Axe der grössten Elasticität senkrecht stehen, geben den tiefsten Ton, daher die wenigsten Schwingungen. Wenn sich eine der Axen in der Ebene der Scheiben befindet und die Elasticität senkrecht gegen diese Axe eben so gross wie in derselben ist, so sind beide Knotensysteme einander ähnlich; beide bestehen dann aus einem rechtwinkeligen Kreuze von geraden Linien und liegen um 45$^0$ auseinander. Die Hauptaxe der Knotencurven stellt sich immer in die Richtung des kleinsten Beugungswiderstandes.

Nach diesen Voruntersuchungen ging Savart an die Bestimmungen der Elasticitätsmaxima und Minima von Quarz und Kalkspath, durch die Ermittlung der Lage der Knotenlinien auf vielen symmetrisch zu krystallographischen Linien geschnittenen Platten, welche sich in zwei Hauptgruppen unterscheiden, je nachdem ihre Oberfläche parallel oder geneigt gegen die krystallographische Hauptaxe war. Platten, welche parallel der Hauptaxe und jenen Diagonalen des Sechseckes, welche die Prismenkanten verbinden, geschnitten waren, gaben ein Kreuz und eine Hyperbel, zu welcher letzteren das Kreuz die Hyperbelaxen bildet, wenn die Platten am Rande gestrichen wurden. Platten, welche verschiedene Neigung gegen die Axe haben, deren Oberflächennormale aber sämmtlich in die domatische Zone (001) (110) [von Endfläche zu Prisma] fallen, zeigen am Rande gestrichen ebenfalls ein Kreuz und eine Hyperbel. In diesem Falle ist immer eine der Linien des Kreuzes die Projection der Hauptaxe; die Hyperbel hingegen öffnet sich von oben nach unten, oder von rechts nach links, je nach der Neigung der Platten gegen die Haupt-

axe. Zu der Reihe dieser Platten sind auch jene Scheiben zu zählen, welche parallel den Dihexaeder- oder Rhomboederflächen geschnitten sind. Savart fand, dass von den 6 Dihexaederflächen je 3 rhomboedrisch liegende Flächen gleiche Oeffnung der Hyperbel besitzen, und constatirte dasselbe auch durch Vergleich mit den natürlichen und geschliffenen Platten an Eisenspath. Er fand, dass jene Platten, welche den 3 Dihexaederflächen parallel laufen, die der rhomboedrischen Spaltbarkeit entsprechen, eine grössere Oeffnung der Hyperbel haben, als solche, welche den anderen 3 Dihexaederflächen parallel sind. Um diese Erscheinungen der Knotenlinien zusammenzufassen, gab Savart folgende Sätze:

1. In allen Diametralen irgend einer auf die Axe des Bergkrystalls senkrechten Ebene kann die Elasticität als beinahe gleich angesehen werden.

2. Nicht alle der Axe parallelen Ebenen haben eine gleiche Elasticität, wohl aber je drei derselben, die gleiche Winkel miteinander haben.

3. Scheiben parallel den Prismenflächen haben dieselbe Theilungsart, und eine rechtwinkelige Knotenlinie entspricht immer der Axe.

Aus diesen Ergebnissen muss man folgern, dass Bergkrystall und ebenso Calcit wohl Aehnlichkeiten mit einem Körper von 3 Elasticitätsaxen haben, dass dieselben weder auf rechtwinkelige Elasticitätsaxen bezogen noch aber mit jenen Krystallaxen verglichen werden können, die nach den Methoden von Miller oder Weiss symmetrisch um Eine Linie gruppirt sind.

Es sind nämlich nach Savart die Axen der grössten und mittleren Elasticität für Calcit und Quarz senkrecht auf einanderstehend und parallel den Diagonalen der Rhomboederflächen, während die kleinste Elasticität senkrecht auf der Rhomboederfläche ist. Der Unterschied für Calcit und Bergkrystall ist nur, dass bei ersterem die kleinere Diagonale der Rhomboederfläche die Axe der kleineren, bei Quarz aber die der grösseren Elasticität ist.

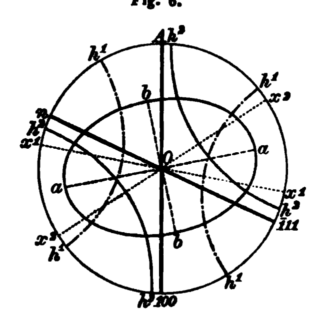
Vergleicht man diese Richtungen, namentlich von Calcit mit den Theilungsgestalten, und bedenkt, dass auch Spuren von Theilbarkeit parallel den Diagonalen zu beobachten sind, so erkennt man, dass analog der Cohäsion auch die Elasticität eine Function der Spaltbarkeit ist und naturgemäss zu jener Richtung — welche zu der leichtesten Theilbarkeit senkrecht steht, also durch letztere in viele Theilchen zerlegt wird — den kleinsten Werth haben wird. Es können in dieser Richtung, ohne den Zusammenhang aufzuheben, nur die kleinsten Verschiebungen möglich sein. Es sagte daher schon Savart: Es scheint, dass die Anordnung der Klangfiguren stets mit den Theilbarkeitsrichtungen in den Scheiben innig verknüpft sind.

§. 25. Klangfiguren monoklinischer Krystallplatten. Bei den von Savart untersuchten Mineralien waren zwei zu einander senkrechte überzählige Spaltungsrichtungen {100}, {010} vorhanden, wodurch sich die Verhältnisse der Klangfiguren leichter auf dieselben beziehen liessen. Ungleich schwieriger sind daher die akustischen Verhältnisse der monoklinischen Krystalle, und wir verdanken erst den wichtigen Untersuchungen an Gyps und Orthoclas von Angström[1]) die nöthige Aufklärung hierüber.

Die leichte Spaltbarkeit des Gypses parallel der Symmetrieebene 010 ermöglicht nämlich, sehr leicht Platten parallel dieser Richtung herzustellen, und diese wurden von Angström untersucht. Ausser dieser Spaltbarkeit besitzt Gyps noch ferner Spaltbarkeit nach $A$ (100) und eine faserige $n$ $\bar{1}11$, welche Richtungen in der Symmetrieebene miteinander den Winkel 66° 14′ einschliessen. An diesen Platten parallel der Symmetrieebene beobachtete Angström sowohl die Klangfiguren, welche entstehen, wenn die in der Mitte unterstützte Platte am Rande gestrichen wird, als auch jene Figuren, welche entstehen, wenn die Scheibe mit einem Strich durch ein in der Mitte angebrachtes Loch zum Vibriren gebracht ward.

Letztere Klangfiguren sind die wichtigeren, weil sie eine geschlossene, nahe elliptische Form [nach Angström der Gleichung $(x^2+y^2)^2 = a^2x^2+b^2y^2$ entsprechend] haben (Fig. 6).

Fig. 6.




Angström bestimmte die Constante dieser Curve *abab*, indem er deren Durchschnittspunkte mit concentrischen, von der Mitte der Scheibe aus gezogenen Kreisen aufsuchte und aus diesen die Coordinaten berechnete. Er fand die Constante der Ellipse zu $a = 0{\cdot}809$, $b = 0{\cdot}585$, $\sphericalangle\, aon = 36^0\ 20'$. Es bildet somit die Axe der grössten Elasticität (kleinere Ellipsenaxe) mit der faserigen Theilbarkeit einen Winkel von 53° 40′.

Durch den Randstrich werden an den undurchlöcherten Platten Hyperbeln hervorgerufen. Die Lage dieser zwei Hyperbeln ist (Fig. 6) mit $h'h'$ und $h^2h^2$ angedeutet. Angström fand als Constante dieser Hyperbel bei einer 1·38mm. dicken Scheibe von 49mm. Durchmesser, für $a_1 = 8{\cdot}67$, $b_1 = 12{\cdot}28$, $a_2 = 9{\cdot}06$, $b_2 = 13{\cdot}91$, und für den Winkel $\alpha$ der $X$Axe ($a$) zur faserigen Theilbarkeit $\alpha_1 = 14^0\ 25'$, $\alpha_2 = 60^0\ 29'$.

Ausser diesen einfachen Curven treten noch Knotenlinien höherer Ordnung auf, welche bei Platten, die in der Mitte gestrichen werden,

[1]) Angström. Pogg. Ann. vol. 86, pag. 216.

wichtig sind. Dieselben bilden sich an einer sehr dünnen, 0·4$^{mm.}$ Platte aus einer elliptischen Curve $a = 0·85$, $b = 0·70$, mit einer Hyperbel $a = 0·26$, $b = 94$, deren $b$ Axen aber nicht, wie früher im obigen Falle liegt, sondern vielmehr deren Winkel zur faserigen Theilbarkeit 48° 20′ beträgt. Da somit die Axen der Knotenlinien, die bei verschiedenen Schwingungszuständen entstehen, nicht gleiche Lage haben, so ist hierdurch bewiesen, dass dieselben nicht Functionen von rechtwinkeligen Elasticitätsaxen sein können, sondern dass die bestimmenden Richtungen der Elasticität zu einander geneigt sind.

Savart hat bereits angedeutet, dass die Theilungsrichtungen $A$, $n$ die Assymtoten der Hyperbel sind. Nach den Untersuchungen Angström's scheinen sie vielmehr die conjugirten Axen der Hyperbel zu sein.

Der Winkel $\alpha_1$ der conjugirten Axen der Hyperbel zu den primären berechnet sich aus der gegenseitigen Neigung $\varphi$ der conjugirten Axen.

$$\text{(45)} \quad \operatorname{tang} \alpha = -\frac{(a^2 + b^2) \operatorname{tang} \varphi}{2a^2} \pm \frac{1}{2a^2} \sqrt{(a^2 + b^2) \operatorname{tg}^2 \varphi + a^2 b^2}$$

Legt man hierin die obigen Werthe von $a_1 b_1$ und $\varphi = 66^0\ 14$ zu Grunde, so erhält man $\alpha = 15^0\ 45'$. Wohl weicht dieser Werth um einen Grad von dem direct gefundenen Werthe $\alpha_1$ ab, doch dürfte mit Rücksicht auf die Schwierigkeit der Messungen selbst, mit Rücksicht auf die oben angegebenen Abweichungen der secundären Knotenlinien und schliesslich auf die Ungleichwerthigkeit der beiden Spaltungsrichtungen (100) und ($\bar{1}11$) diess Resultat mehr als genügen. Man kann daher sagen, in der Symmetrieebene des Gypses bilden die Theilungsrichtungen die Conjugataxen der hyperbolischen Klangfiguren. Die Axen $a$ der elliptischen Figur liegen hingegen fast in der Mitte zwischen den Axen der Hyperbeln selbst (vide Fig. 6), doch etwas näher an $x_1$ als $x_2$. Der Grund dieser geringen Abweichung ist in der Ungleichwerthigkeit der beiden Hyperbeln zu suchen, welche wieder von dem verschiedenen Charakter der Spaltbarkeit nach $A$ und $n$ abhängt.

Man kann somit auch nach den Untersuchungen monoklinischer Krystalle annehmen, dass Cohäsion und Elasticität im innigen Zusammenhange stehen und sich gegenseitig zu erklären vermögen.

Während die Combination der Elementaratome im Molekül die Krystallgestalt und die optischen Eigenschaften zu begründen scheint, so wird hingegen die Spaltbarkeit durch den Aufbau der Moleküle zum Krystalle begründet, und mit letzterem variiren Cohäsion, Elasticität und schliesslich auch die Härte.

# V. Kapitel.

## Härte, deren Beziehung zum Atomvolumen und Cohäsion.

§. 26. Von der gesetzmässigen Anordnung der kleinsten Theilchen im Krystalle und von deren Aufbau und Gefüge ist nicht nur Cohäsion und Elasticität, sondern auch Härte abhängig.

Wie bereits im vorigen Kapitel angegeben ward, versteht man unter Härte diejenige Kraft, mit welcher der Körper dem auf ihm lastenden Drucke und daher auch dem Eindringen eines fremden Körpers Widerstand leistet. Naturgemäss wird diese Kraft im proportionalen Verhältnisse stehen sowohl zum grösseren oder geringeren Grade der Verdichtung der Materie, als auch zu der durch die Molekulargruppirung hervorgerufenen Cohäsion.

Ersteres Verhältniss zur Materie erlaubt die allgemeine Verwerthung der Härte als mineralogisches Kennzeichen. Linné hat bereits die Härte als ein mineralogisches Hauptmerkmal bezeichnet. Näher ging Werner in die Terminologie der Härte ein, und bestimmte die Grade der letzteren durch das leichtere oder schwerere Angegriffenwerden des Körpers durch Messer oder Feile. Es gliedern sich auf diese Weise die Mineralien nach folgenden Graden der Härte:

1. Sehr weich. D. M. lassen sich nicht nur mit dem Messer leicht schaben, sondern auch der Druck des Fingernagels hinterlässt Eindrücke. 2. Weich. D. M. lassen sich mit dem Messer schaben. 3. Halbhart. D. M. lassen sich schwer schaben, geben keine Funken am Stahl. 4. Hart. D. M. lassen sich nur feilen, geben Funken am Stahl. Feldspath. 5. Quarzhart. D. M. lassen sich kaum feilen. 6. Demanthart. D. M. greifen die Feile an.

Aus dieser Aufzählung kann man schon ersehen, dass die Methode der Härtebestimmung nur eine unvollkommene war. Eine Verbesserung erhielt sie durch Haüy, welcher an die Stelle von Messer und Feile

verschiedene Mineralien setzte und die Härte eines Minerals durch die benachbarten, nächst weicheren und nächst härteren Mineralien bestimmte. Haüy unterscheidet daher Mineralien: 1. welche den Calcit nicht ritzen; 2. welche denselben angreifen; 3. welche das Glas ritzen, ohne Funken zu geben; 4. welche das Glas ritzen und Funken geben; 5. welche den Quarz ritzen.

Mohs hat diese Scale der Härte ausgedehnt und die bekannten 10 Grade derselben aufgestellt. Breithaupt hat letztere insofern zu verbessern gesucht, als er durch Einschieben zweier Glieder in die Reihe die relative Zunahme von Grad zu Grad gleichförmiger zu gestalten suchte.

Die Härtegrade beider Scalen sind, nach den hauptsächlichsten Repräsentanten benannt, folgende:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | Talk | 1 | Talk |
| 2 | Gyps | 2 | Gyps |
| | | 3 | Talkglimmer |
| 3 | Kalkspath | 4 | Kalkspath |
| 4 | Flussspath | 5 | Flussspath |
| 5 | Apatit | 6 | Apatit |
| | | 7 | Skapolith |
| 6 | Feldspath | 8 | Feldspath |
| 7 | Quarz | 9 | Quarz |
| 8 | Topas | 10 | Topas |
| 9 | Corund | 11 | Corund |
| 10 | Demant | 12 | Demant |

Obgleich die Breithaupt'sche Reihe regelmässiger verlauft, so hat doch die zehntheilige Scale von Mohs sich allgemeiner Anwendung zu erfreuen, indem dieselbe in Verbindung mit der Idee Kirwan's [1]) „die Grade durch Zahlen zu ersetzen", auch für die Zwischenglieder eine leichte dekadische Berechnung erlaubt.

Ein Mineral, welches das nächst niedere der Reihe ritzt, ohne von ihm angegriffen zu werden, hingegen durch das nächsthöhere der Scale vollkommen leicht geritzt wird, ohne wieder letzteres anzugreifen, wird mit einer Zahl bezeichnet werden können, die gebildet ist aus der Ziffer des nächst weicheren Minerals mehr fünf Zehntheile.

Im Allgemeinen wird man daher mit einiger Vorsicht noch 25 Hunderttheile zu erkennen vermögen, obgleich diese so weit getriebene Unterscheidung für den mineralogischen Gebrauch kaum nothwendig, für den physikalischen hingegen nicht genügend ist.

---

[1]) Kirwan. Mineralogie I. 52.

§. 27. Sklerometrische Versuche. Die mineralogische Bestimmung der Härte wird abhängig gemacht von dem leichteren oder schwereren Eindringen und Ritzen einer Kante oder einer Ecke vom Probestücke in der Fläche des zu untersuchenden Minerals. Ist nun, wie oben gesagt, die Härte auch eine Function der Cohäsion und Spaltbarkeit, so wird sie auf den verschiedenen Flächen verschiedene Werthe erhalten müssen, und die mineralogische Bestimmung der Härte wird somit sowohl von dem krystallographischen Charakter der angewendeten Flächen, als auch von jenem der Kanten und Ecken abhängig sein.

In Uebereinstimmung hiermit zeigen nun schon die Versuche von Mohs und Haüy, dass die verschiedenen Flächen der Mineralien verschiedene Härte besitzen; namentlich ist diess am Cyanit auffallend, dessen Härte je nach der Fläche von 5 bis 7 variirt.

Obgleich auf diese Weise der Einfluss der Flächen auf die Härte erkannt ward, so blieb doch noch lange der wahre Grund desselben unerforscht.

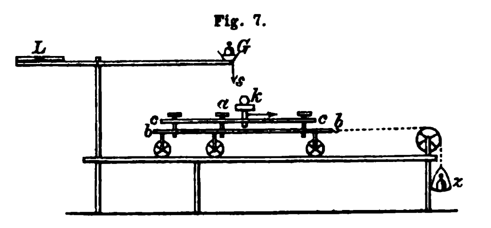
Die Gesetze der Härte als Eigenschaft des Molekularzustandes abzuleiten gelang zuerst Frankenheim[1]).

Um die Differenzen der Härte auf verschiedenen Flächen und Richtungen zu erkennen, benützte Frankenheim Nadeln aus verschiedenen Metallen und schätzte den Druck der Hand, welcher nöthig war, um einen Ritz hervorzubringen. Da diese Methode trotz der schönen Resultate, welche Frankenheim erhielt, doch nur auf Schätzungen beruhte, so setzte dieselben Seebek[2]) fort mit Hilfe eines von ihm ersonnenen Instrumentes, welches gestattete, den Probestift so lange mit Gewichten zu belasten, bis er in das Mineral eindrang. Hierdurch ward es möglich, die Grade der Härte mit den Gewichten zu bestimmen.

Dieselbe Idee haben auch Franz[3]), sowie Grailich und Pekarek[4]) beibehalten und vervollkommnet. Die Einrichtung eines solchen Sklerometers wird im Allgemeinen folgende sein müssen:

1. Der Krystallträger wird die Bedingung zu erfüllen haben, dass er die horizontale Einstellung der zu prüfenden Krystallfläche erlaubt und zweitens für alle Mineralien mit gleicher Kraft unter dem Stifte hinweggeführt werden kann. Zur Erfüllung des ersteren Punk-

Fig. 7.




[1]) Frankenheim. Diss. de cohaesione. 1829. Baumgartner. Zeitschrift für Physik. Wien 1831. vol. IX., pag. 97.

[2]) Seebeck im Programm des Cöln. Realgymnasiums zu Berlin 1833. Berlin 4.

[3]) Franz. Pogg. Ann. vol. 80, pag. 37, 1850.

[4]) Grailich und Pekarek. Wien. Acad. Sitzb. vol. XIII, 410. 1854.

tes genügt, den Tisch und Krystallträger *cc* mit drei verticalen Schrauben an der Unterlage verschiebbar und horizontal einstellbar zu befestigen. Behufs des zweiten Punktes ist der Tisch *bb* selbst auf Räder und Schienen gestellt und durch das Zuggewicht *z* beweglich.

Soll gleichzeitig die Richtung gemessen werden, in welcher der Stift über der Fläche sich bewegt, so erfordert diess eine Gradtheilung des Tisches *cc* und das Anbringen einer Alhidade am Krystallträger *a*, welcher um eine verticale Axe frei drehbar ist.

Stellt man den Krystall *k* zuerst so ein, dass der Stift parallel der Kante läuft, so werden sich dann alle übrigen Richtungen durch einfaches Ablesen auf der Theilung *cc* auf die obige Kante beziehen lassen.

2. Der Stift *s* ist an einem Hebelarm befestigt, dessen unteres Ende eine Libelle *L* trägt. Der Stand dieser Libelle zeigt an, ob der Krystall horizontal gestellt ist, wenn man mit letzterem unter dem Stifte hinwegfährt. Oberhalb des Stiftes befindet sich ein Schälchen, in welches die Gewichte *G* gelegt werden, welche nöthig, um den Stift in dem Masse zu belasten, dass er das Mineral angreift und nach Bewegen des Tisches ritzt. Man kann sich auch begnügen, die Belastung bloss so weit zu steigern, bis die Spitze in den Krystall eindringt[1]), wo dann der bewegliche Wagen überflüssig ist; allein man wird auf die Ermittlung der variablen Härte bezüglich verschiedener Richtungen verzichten müssen.

Letzteres ist mit obigem Sklerometer leicht durchzuführen, indem es nur die Einstellung mehrerer Flächen und für jede die Einstellung mehrerer Richtungen unter der Spitze *s* erfordert.

Die Angaben eines solchen Sklerometers werden immer nur die des Minimalgewichtes sein, welches eben noch hinreicht, einen Ritz hervorzubringen. Je nach der Qualität des Stiftes, ob Stahl oder Diamant, sowie nach der zu Grunde gelegten Einheit für die Tiefe und Stärke des Ritzes werden die Angaben variiren können, und sind daher immer für leicht zu erhaltendes Material einheitlich festzustellen.

Franz fand folgende mittleren Belastungen, welche hinreichend waren, auf den Gliedern der Mohs'schen Scale einen Ritz hervorzubringen:

| | Mohs $H$ = | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Gyps | 2 | Stahlspitze | 1·5 Gr. | | |
| Calcit | 3 | „ | 9·0 | | |
| Flussspath | 4 | „ | 36·0 | | |
| Apatit | 5 | „ | 163·0 | Diamant | 12 Gr. |
| Feldspath | 6 | „ | 260·0 | „ | 20 |
| Quarz | 7 | | | „ | 34 |
| Topas | 8 | | | „ | 43 |
| Saphir | 9 | | | „ | 51 |

[1]) Calvert und Johnson. Pogg. Ann. vol. 108, pag. 577.

Mag auch bei einer etwas anderen Einrichtung des Sklerometers die Einheit der Belastung eine etwas grössere oder kleinere sein, so wird doch diese Scale genügen, um über die relative Bedeutung der Mohs'schen Härtegrade zu entscheiden; zu diesem Zwecke sind auch von Franz nur die mittleren Werthe angegeben worden.

Die von Franz angewendete Stahlspitze ward bei einer Belastung von 23 Gramm von dem Diamant geritzt.

§. 28. Einfluss der Cohäsion auf die Härte. Die Anwendung des Sklerometers erlaubt auch für die Abhängigkeit der Härte von der Cohäsion bestimmte, durch Zahlen belegte Gesetze aufzustellen. Es war wohl bereits Frankenheim gelungen, bei einer Prüfung mit der Hand aus dem angewendeten Drucke die Verschiedenheit der Härte nach verschiedenen Richtungen am Krystalle richtig zu erkennen und auf die Spaltungsrichtungen als seine Ursachen zurückzuführen; doch hat Franz durch seine sklerometrischen Versuche diese Abhängigkeit durch Zahlen belegt und zu Gesetzen erhoben. Solche Gesetze sind zwei, das der Flächen und jenes der Richtungen:

Das Gesetz der Flächen lautet: „Von verschiedenen Flächen desselben Krystalls ist diejenige die härteste, welche von der Ebene der vollkommensten Spaltbarkeit durchschnitten wird." Wenn eine vielfache Spaltbarkeit von gleicher Vollkommenheit vorkommt und die verschiedenen Richtungen derselben die gleiche Neigung gegen alle Krystallflächen haben, so lässt sich ein Unterschied in der Härte der verschiedenen Flächen nicht beobachten.

Das naheliegendste Beispiel für dieses Gesetz bieten Gyps oder Disthen dar, wo die Flächen parallel den vollkommensten Spaltungsflächen weicher sind, als Flächen parallel einer unvollkommenen Spaltungsebene. Ebenso ist es auch bei Kalkspath, wo die Rhomboederflächen die weichsten Flächen sind.

Das Gesetz der Richtungen kann so formulirt werden: „In jener Ebene, welche von den Spaltungsebenen durchschnitten wird, ist die Richtung, welche auf der Spaltungsrichtung senkrecht steht, die weichere, die zu letzterer parallele die härtere." Wenn ein Krystall von zwei Spaltungsrichtungen in einer Fläche durchschnitten wird, so nähert sich auf dieser Fläche die grössere Härte der besseren Spaltungsrichtung. Je geringer die Leichtigkeit ist, mit welcher sich ein Krystall spalten lässt, desto mehr verschwinden die Härteunterschiede.

Ueberdiess ist zu bemerken, dass an Krystallen grösserer Härte die kleinen Unterschiede wegen der Beobachtungsfehler schwerer aufzufinden sind als bei den weicheren.

Diese beiden Gesetze sind durch die zahlreichen Untersuchungen von Frankenheim und Franz an vielen Mineralien bestätigt worden und lassen die regelmässige Abhängigkeit der Härte von der Cohäsion unzweifelhaft erkennen.

Im vorigen Kapitel haben wir bereits erkannt, dass in der zur Spaltungsrichtung normalen Richtung die geringste, hingegen parallel zur ersteren die grösste Cohäsion herrschen, und dass der Spaltungsfläche ein mittlerer Werth der Cohäsion zukommen muss. (Das Beispiel der Blätter eines Buches dürfte vollkommen hinreichen, diess zu erklären.) Es erhellt daher, dass die zur Spaltungsebene senkrechte Fläche die Richtung der grösseren Härte in sich schliesst, dass ferner die Richtung der kleinsten Cohäsion die der kleineren Härte ist. Dass für letzteren Fall der Richtung der kleinsten Cohäsion (d. i. der Normale auf der Spaltungsrichtung) nicht unmittelbar die kleinste Härte entspricht, erklärt sich wohl durch die lamellare Structur des Krystalls, welche nicht erlaubt, bloss Moleküle und Richtungen zu berücksichtigen, sondern vielmehr zur Annahme von nach verschiedenen Richtungen stark cohärirenden Lamellen (Spaltungsstücke) zwingt. Nun wird aber die Härte senkrecht zur Spaltungsrichtung bei der sklerometrischen Methode dadurch erforscht, dass der ritzende Stift theils über die feinen Lamellen, theils über deren Zwischenraum dahinfährt, und aus diesem Grunde kann die Härte für diese Richtung nur einen mittleren Werth erlangen. Auch hierfür ist das Beispiel der Blätter eines Buches das zutreffendste.

Lassen sich die allgemeinen Verhältnisse der Härte auf den verschiedenen Flächen durch die Cohäsion erklären, so ist diess kaum möglich für den auffallenden Unterschied der Härte in Einer Linie bei den um 180° entgegengesetzten Richtungen des Striches.

Naturgemäss wird wohl jeder Werth der Härte abhängen von der Neigung, den die Spaltungsebene zu der zu untersuchenden Fläche sowie zu der Richtung des Striches hat, allein unabhängig davon zeigt sich in den Werthen eines nur entgegengesetzten Weges eine Differenz. Ein auffallendes Beispiel hierfür ist Calcit, dessen Härte in der Rhomboederfläche von der Hauptaxe zur Axe *a* nach abwärts in der kleineren Diagonale eine Belastung des Sklerometers von 0·96 Gramm, hingegen zur Hauptaxe aufwärts 2·85 Gramm (nach Grailich) erfordert, während in der zur grösseren Diagonale parallel der Combinationskante von (201) (100) immer der gleiche Werth 1·52 Gramm erhalten ward.

Franz erklärt diesen Härteunterschied durch die Abhängigkeit von der Schichtung; denn wenn man den Krystall aus kleinsten Theilchen zusammengesetzt denkt, so setzen die Schichtungen des Krystalls

entweder der Spitze entgegen, oder die Spitze überspringt sie, wenn sich letzterer der spitze Winkel der Schichtungen darbietet.

Hiermit ist das Verhalten des Kalkspathes analog. In der längeren Diagonale der Rhomboederfläche ist kein Unterschied der Härte, weil diese Richtung gegen die eine Spaltungsrichtung unter einem spitzen, gegen die zweite hingegen unter einem stumpfen Winkel geneigt ist, das Resultat für die entgegengesetzten Richtungen somit das gleiche sein wird, in der kürzeren Diagonale werden hingegen beide Spaltungsrichtungen das erstemal unter einem spitzen, das zweitemal unter einem stumpfen Winkel getroffen; die Schichtung der Theilchen wird somit der Spitze den grössten Widerstand darbieten in der Richtung von der spitzen Ecke zu der stumpfen, den kleinsten Widerstand in entgegengesetzter Richtung. In allen übrigen Linien leistet der Krystall den grösseren Widerstand in der Richtung von der spitzen Kante zur stumpfen.

Hiermit stimmen nahezu die von Grailich und Pekarek (l. c.) an Calcit gemachten Beobachtungen überein. Die Härte auf der Rhomboederfläche (201) ward bereits angegeben; auf der Endfläche (001) in der Richtung parallel der Axe $a$ von der Ecke senkrecht zur Seite 4·89 Gramm; entgegengesetzt hierzu nur 3·63 Gramm; parallel der Combinationskante mit dem Rhomboeder hingegen (parallel der Axe $b$) 4·40 Gramm. Auf der Fläche (100) des sechsseitigen Prisma ist parallel den Combinationskanten mit dem Rhomboeder die mittlere Härte mit 6·5 Gramm; parallel der Hauptaxe ist die härteste Richtung 9·7 Gramm nach abwärts, die weichste 5·8 Gramm nach aufwärts.

Auf diese Weise erhält man für den Krystall nach allen seinen Richtungen ein Bild seiner Cohäsionsverhältnisse. Für letztere suchte Frankenheim eine genäherte Formel

$$H = k \cos \alpha \sin \beta \qquad (46)$$

zu geben, welche jedoch nur die allgemeinen Variationen der Härte andeuten. In dieser Formel ist $k$ die Kraft der Cohäsion, $\alpha$ der Winkel der Beobachtungsfläche mit der Spaltungsfläche und $\beta$ der Winkel der Strichlinie mit der Kante. Hält man das von ihm befolgte Verfahren bei, berücksichtigt jedoch die neueren Resultate, so kann man eine der von Frankenheim benützten Formeln analog aufstellen, wo $h$ die mittlere Härte, hingegen $\alpha$, $\beta$ die obigen Werthe bedeuten. Die Härte einer Fläche kann dann genähert angedeutet werden durch

$$H = h \sin \alpha \cos \beta. \qquad (46a)$$

Genauere mathematische Erörterungen sind kaum zu geben, da verschiedene Vollkommenheit und Lage der Spaltungsrichtung das Problem für jeden Fall bedeutend modificiren. Diese Variationen der Härte je nach der Richtung der Strichlinie sind in manchen Fällen ziemlich

bedeutend. Um dieselbe durch Zahlen zu charakterisiren, kann man aus den oben erwähnten Untersuchungen von Franz mehrere Beispiele auswählen.

* Flussspath, theilbar nach (111): Auf den Hexaederflächen hat die Härte ihr Maximum parallel den Diagonalen, ihr Minimum parallel den Kanten $M:m = 33\cdot0 : 24\cdot3$. — Quarz: Auf den Flächen der sechsseitigen Säule ist das Maximum der Härte senkrecht gegen die verticalen Kanten, senkrecht dagegen das Minimum. $M:m = 33\cdot5 : 17\cdot5$. — Topas, theilbar nach der Endfläche (001): Prismenfläche (110) härter als die Endfläche (001) im Verhältniss 45 : 42. — Gyps, vollkommen theilbar nach (010), muschlig nach $A$(100), faserig nach $n(\bar{1}11)$: Die weichste Fläche ist (010) und das Minimum der Härte auf dieser Fläche ist gegen die Richtung der muschligen Theilbarkeit um 14° geneigt (vergl. §. 25.) Das Maximum der Härte verhält sich zum Minimum wie 40 : 17.

Bei Cyanit ist der Unterschied der Härte auf den Theilungsflächen $m$(100), $t$(010), $p$(001) so gross, dass die Fläche $m$ noch mit einer Stahlspitze geritzt werden kann, während die übrigen Flächen nur mit Topas geritzt werden können.

§. 29. **Beziehungen der Härte zum Atomvolumen.** Variirt die Härte auch auf den Flächen eines Minerals, so sind doch ihre Unterschiede von Substanz zu Substanz weitaus bedeutender. Zieht man die von Franz angegebenen Gewichtswerthe zu Hilfe, so sieht man, dass selbst die Hälften der Moh s'schen Härtegrade noch sehr wohl zu unterscheidende Werthe sind, wie auch nachfolgende Tabelle zeigt.

Franz hat nämlich in der oberwähnten Abhandlung versucht, durch die Angaben des von ihm benützten Sklerometers die absoluten Werthe für nahegleiche Zahlen der Mohs'schen Härtescala an verschiedenen Mineralien zu bestimmen, und fand bedeutende Differenzen, wie folgt:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Alaun (Ungarn) | 0·9 Grm. | Stahlspitze | $H =$ 2·0 |
| Honigstein (Artern) | 7·5 | „ | 2·0—2·5 |
| Dioptas | 115 | „ | 5·0 |
| Diopsid | 205 | „ | 5·0—6·0 |
| Pistazit | 24 Grm. | Diamant | 6·0—7·0 |
| Zirkon (Ural) | 38·5 | „ | 7·5 |
| Turmalin (Brasilien) | 39·5 | „ | 7·0—7·5 |
| Beryll (Nertschinsk) | 43 | „ | 7·5—8·0 |

Die grossen Differenzen in der Härtebestimmung mittelst des Sklerometers zeigen an, dass für alle jene Fälle, wo sichere Zahlenwerthe

nöthig, die erstere Methode angewendet werden muss, indem die Zahlen der **Mohs**'schen Scala zu weiten Spielraum darbieten. Da aber die Härte nicht bloss eine Function der variablen Cohäsion ist, sondern auch von der Substanz abhängt und die Variationen der Härte von Stoff zu Stoff viel bedeutender sind als diejenigen auf verschiedenen Flächen eines Krystalls, so genügen für erstere die Angaben der **Mohs**'schen Scala in erster Annäherung.

Wie die neueren Versuche zeigen, ist es in der That möglich, die Abhängigkeit der Härte von der Substanz auch schon mit diesen genäherten Werthen der **Mohs**'schen Scala zu erkennen, indem diese letzteren als mittlere Werthe unabhängig von den kleineren Variationen in Folge der Cohäsion angesehen werden können.

**Kenngott**[1]) hat hingewiesen, dass die Variationen der Härte proportional der Atomdistanz sind.

Nimmt man keine Rücksicht auf die Atomistik, so erkennt man, dass die mittlere Härte jedenfalls direct proportional der Masse und verkehrt proportional dem Raume, welchen die Masse einnimmt, sein muss, da die Härte nur der Ausdruck des passiven Widerstandes der Materie ist. Auf Grund dieser Beziehungen habe ich nachfolgende Gesetze erhalten.

1. Die Härte allotroper Körper ist deren Dichte proportional.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Rutil | $TiO_2$ | $D = 4{\cdot}26$ | $H = 6-6{\cdot}5$ |
| Brookit | | $4{\cdot}12-4{\cdot}17$ | $6$ |
| Anatas | | $3{\cdot}83-3{\cdot}95$ | $5{\cdot}5-6$ |
| Arragonit | $Ca\,CO_3$ | $D = 2{\cdot}953$ | $H = 3{\cdot}5-4{\cdot}0$ |
| Calcit | | $2{\cdot}72$ | $2{\cdot}5-3{\cdot}5$ |

2. Für Reihen isomorpher Substanzen ist die Härte dem specifischen Volumen (Satz 27) proportional.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Pyrit | $Fe\,S_2$ | $V = 24{\cdot}0$ | $H = 6{\cdot}0-6{\cdot}5$ |
| Hauerit | $Mn\,S_2$ | $34{\cdot}2$ | $4{\cdot}0$ |
| Bleiglanz | $PbS$ | $31{\cdot}8$ | $2{\cdot}5$ |
| Greenockit | $CdS$ | $29{\cdot}9$ | $3{\cdot}0-3{\cdot}5$ |
| Zinkblende | $ZnS$ | $24{\cdot}0$ | $3{\cdot}5-4{\cdot}0$ |
| Manganblende | $MnS$ | $21{\cdot}8$ | $3{\cdot}5-4{\cdot}0$ |
| Pyrrothin | $FeS$ | $19{\cdot}6$ | $3{\cdot}5-4{\cdot}5$ |
| Korund | $Al_2\,O_3$ | $25{\cdot}3$ | $9{\cdot}0$ |
| Eisenglanz | $Fe_2\,O_3$ | $30{\cdot}6$ | $5{\cdot}5-6{\cdot}5$ |
| Titaneisen | $Fe\,Ti\,O_3$ | $32{\cdot}8$ | $5{\cdot}0-6{\cdot}0$ |

[1]) Kenngott. Jahrbuch d. geol. Reichsanstalt. Wien 1852.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Diaspor | $H_2 Al_2 \Theta_4$ | $V = 35{\cdot}4$ | $H = 6{\cdot}5$—7 |
| Manganit | $H_2 Mn_2 \Theta_4$ | 40·7 | 4 —5 |
| Arragonit | $Ca\, C\Theta_3$ | 33·8 | 3·5—4·0 |
| Strontianit | $Sr\, C\Theta_3$ | 40·9 | 3·5 |
| Witherit | $Ba\, C\Theta_3$ | 45·7 | 3·0—3·5 |
| Arsen | As | 13·1 | 3·5 |
| Antimon | Sb | 18·0 | 3 —3·5 |
| Wismuth | Bi | 21·1 | 2 —2·5 |

Diese Beispiele, denen noch viele andere sich anreihen liessen, zeigen zur Genüge, dass der Gang des Atomvolumens dem der Härte proportional ist, für alle jene Körper, deren krystallographisches Gefüge ident ist. Die Stoffe hingegen, welche bei gleicher Substanz anderes morphologisches Gefüge besitzen, haben auch verschiedene Härte. Zu bemerken ist jedoch, dass die Differenzen von Volumen und Härte nicht für alle isomorphen Reihen gleichwerthig sind.

Wenn gleich auf diese Weise die Härte als Function des Atomvolumens sich darstellt, so ist diess doch nur im beschränkten Sinne zu verstehen. So haben die Legirungen eine Härte, die in den meisten Fällen die der legirten Stoffe übertrifft. Es wird diess letztere eine Folge der verschiedenen krystallinischen Structur sein, welche immer als die allgemeine Ursache eine variablen Cohäsion angesehen werden muss. Diess ist umsomehr bei den Legirungen der Fall, als deren Härte sich meist sprungweise über jene der gemischten Bestandtheile erhebt.

Man sieht somit, wie bei den früheren Untersuchungen auch hier zwei Ursachen der physikalischen Eigenschaften auftreten, das Atomvolumen und die Schichtung der Grundmoleküle zum fertigen Krystall. Die Ableitung der Eigenschaften der Verbindungen von denjenigen der Grundstoffe reducirt sich hierdurch wieder auf die allgemeinen Probleme der Morphologie.

# II. Abtheilung.

## Die optischen Eigenschaften der Körper im Allgemeinen.

## VI. Kapitel.

---

### Licht. Theorie der Transversalvibrationen der kleinsten materiellen Theilchen.

§. 30. Bereits vor Huyghens waren mehrere Physiker geneigt, für das Licht eine wellenförmige Fortpflanzungsweise analog dem Schalle anzunehmen. Huyghens war jedoch der Schöpfer einer wissenschaftlichen Undulationstheorie, die bald darauf durch Euler eine weitere Ausbildung erhielt. Letzterer lehrte, dass die Erscheinungen des Lichtes durch die Vibrationen des leuchtenden Körpers entstehen und durch die Undulationen der materiellen Theilchen bis zum Auge gelangen.

Der Undulationstheorie zu einem durchgreifenden Erfolge zu verhelfen, blieb jedoch den Forschern Young und Fresnel beim Beginn des 19. Jahrhunderts vorbehalten, welche jedoch nicht die von Euler begründete Anschauungsweise befolgten. Da nämlich die Phänomene der Schwingungen kleinster Theilchen sich in manchen Punkten von jenen der messbaren Schallwellen unterscheiden, da ferner die Fortpflanzung des Lichtes durch den hypothetisch von Materie leeren Himmelsraum erfolgt, so stellten sie die Hypothese eines Mediums auf, welches unabhängig von materiellen Theilchen die Schwingungen des Lichtes fortzupflanzen fähig wäre. Es ist diess der sogenannte Aether, welcher schwerlos und allseiend gedacht wird, welcher den Himmelsraum erfüllend von den Licht gebenden Gestirnen den Gang des Lichtes bis zu uns vermittelt, und zugleich chemisch indifferent, alle Materie durchdringen und ohne Natur und Wesen der Körper zu ändern, sich um jedes Atom legen kann.

Der Aether einer solchen Hypothese ist ein unnennbares, unfindbares Etwas, verschieden jedoch in seinen Eigenschaften vollständig von denen der Materie. Es wäre im Sinne der Aetherhypothese falsch, unter Aether eine vielleicht fein vertheilte Materie zu verstehen, indem die Grundbedingungen dieser Hypothese eben jeden Causalnexus mit der

Materie läugnen, und weiters der Einwurf aufstellbar wäre, dass diese fein vertheilte Materie nicht überall in gleichem Zustande vorkommen könne.

Während nun diese Hypothese Ein Imponderabile aufstellt, lehren die zahlreichen Fortschritte der optischen Wissenschaften, dass dasselbe nicht überall gleich sein kann, sondern dass es in den verschiedenen Körpern verschiedene Modificationen desselben geben müsse.

Ja trotzdem, dass der Aether unnachweisbar ist, werden doch so viele Modificationen seiner Dichte und Elasticität ihm zuertheilt, dass er beinahe alle Eigenschaften der groben Materie annimmt, mit Ausnahme derer, dass man die grobe Materie mit chemischen Hilfsmitteln zu ergründen vermag, während der Aether nach wie vor ein theoretischer Gegenstand bleibt. Sucht man sich jedoch von diesen complicirten Hypothesen frei zu halten, so ist es unmöglich, mit dem Aether als solchem alle nöthigen Vorstellungen zu verbinden, und namentlich bei der Untersuchung der Krystalle, in welchen sich die Präponderanz der Materie am deutlichsten zu erkennen gibt.

Die Physik der letzten Jahrzehnte, welche bestrebt ist, durchwegs die einfachsten Hypothesen anzunehmen, versuchte auch die Theorie des Lichtes umzugestalten, und aus der Physik den Begriff des erwähnten Imponderabile zu verdrängen. Die hiefür nöthige Theorie hatte eigentlich bereits Euler, wenn auch unklar geliefert, indem er das Licht als die Schwingungen der Körpertheilchen betrachtete. Das Verdienst, diese Idee in seinen Correlations of physical forces wieder in Anregung gebracht zu haben, gebührt Grove.

Die von Grove vorgetragene Ansicht der Fortpflanzung des Lichtes lässt sich mit folgenden Worten geben: Die Fortpflanzung des Lichtes erfolgt durch die Wellenbewegung der kleinsten materiellen Theilchen des durchstrahlten Körpers, wobei der Weltraum als erfüllt mit verdünnter Materie zu denken ist.

§. 31. Nach dieser Molekulartheorie des Lichtes werden analog wie im sogenannten leeren Raume auch in den festen Körpern die Schwingungen des Lichtes durch die Vibrationen der kleinsten Theilchen des Körpers selbst und nicht durch einen, im Körper etwa vorauszusetzenden Aether dargestellt.

Man könnte wohl denken, dass die in jedem porösen Körper etwa enthaltenen substantiellen und flüchtigen Theilchen die Schwingungen vollziehen; doch lässt sich diess sogar mit Zahlen widerlegen, denn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes variirt mit den Eigenschaften der Substanz in einer durch die einfachsten mechanischen Gesetze nachweisbaren Form.

Diesen Beweis für die directe Abhängigkeit des Lichtes von der Materie habe ich in meinen physikalischen Studien gegeben[1] und werde auf diesen Gegenstand in den späteren Kapiteln zurückkommen.

Während es so der Molekulartheorie des Lichtes möglich ist, für ihre Annahmen mit Zahlen einzustehen, bleibt hingegen den Anhängern der Aethertheorie der problematische Vortheil, dass sie, weil der Aether ein hypothetisches Fluidum ist, nach Willkür seine Charaktere verändern können, ohne dass es den Gegnern möglich wäre, die Nichtwirklichkeit seiner Existenz oder seiner Veränderungen zu beweisen.

Für die Molekulartheorie des Lichtes sprechen ferner die durch dieselbe klar gewordenen Beziehungen zur strahlenden Wärme. Nach den neuesten Untersuchungen, welche auch in den betreffenden Kapiteln ihre Berücksichtigung finden werden, sind nämlich Licht und Wärme Actionen einerlei Art, beide Wellenbewegungen der Materie, und nur durch die Grösse der Wellen unterschieden.

Schliesslich vermöchten selbst die bei der mathematischen Behandlung des Undulationsproblems gewonnenen Erfahrungen gegen den Aether sprechen. Die wichtigsten Gesetze der mathematischen Optik verdanken wir nämlich Cauchy, der bei seinen Untersuchungen zumeist nur die Schwingungen eines Mediums berücksichtigte und hiedurch zu Formeln gelangte, die mit den Experimenten übereinstimmten. Während die Betrachtung eines Mediums wenigstens zu theilweise praktischen Resultaten führte, kann nicht das Gleiche von jenen Versuchen behauptet werden, welche beide Medien — Körper und Aether — berücksichtigen, und welche, trotz oft glänzender mathematischer Behandlung, nur zu Formeln führten, die allzu complicirt waren, um je auswerthbar zu sein. Dabei ist ferner jeder Causalnexus zwischen diesen beiden betrachteten Medien ausser Acht gelassen.; Körper und Aether bestehen unabhängig neben einander, ohne dass man die Einwirkung des einen auf den anderen anzugeben wüsste. Jene Gesetze aber, welche mit der Erfahrung stimmen, basiren auf der Annahme nur eines Medium, diejenigen, welche zwei Medien betrachten, stimmen hingegen mit ersterer nicht und liefern keine Kenntniss der Abhängigkeit der Erscheinung von den materiellen Theilchen, welche doch bei jeder Beobachtung zu Tage tritt.

Anders gestalten sich die Verhältnisse, wenn man die Schwingungen der materiellen Theilchen zur Erklärung der optischen Phänomene benützt. Die allgemeine mathematische Theorie wird in ihren Grundzügen ebenfalls mit den bereits von Cauchy gefundenen Sätzen

---

[1] Schrauf. Physikalische Studien. I. Die gesetzmässigen Beziehungen von Materie und Licht. Mit specieller Berücksichtigung der Molekularconstitution org. Reihen und krystall. Körper. Wien 1867.

für die Schwingungen des Aethers zusammenfallen müssen, da ja beiderseits die Schwingungen Eines Mediums berücksichtigt werden. Günstiger gestaltet sich aber die Erkenntniss der Variationen der optischen Constanten. Während zur Erklärung derselben der Aethertheorie nur unbestimmte Hypothesen zu Hilfe stehen, entspringen unmittelbar den Molekulartheorien die für alle Variationen geltenden Gesetze, die sich durch den Vergleich mit den Beobachtungen als richtig bewiesen, und die zugleich den Einblick in Molekularconstitution der Körper[1]) gestatteten.

§. 32. Die Gleichungen der Wellenbewegung. Eine mathematische Untersuchung der Bewegungen, welche wir Licht nennen, wird sich im Allgemeinen auf Gleichungen stützen müssen, welche die Verschiebungen eines Systems zusammengehörender kleinster Theilchen darstellen. Auf diesem Gebiete der mathematischen Theorie des Lichtes verdanken wir Cauchy fast die vollständige Theorie Eines Mediums.

Im Nachfolgenden ist auch in Kurzem die Methode Cauchy's[2]) angegeben worden, welche zeigte, wie es möglich ist, aus der Annahme, dass die kleinsten Theilchen Eines zusammengehörenden Systems aus ihrer Gleichgewichtslage gebracht sind, die allgemeinen Formeln für eine solche Wellenbewegung zu finden.

Die Elemente einer solchen Bewegung lassen sich durch folgende Erwägung erkennen. Jede Erregung wird sich von dem erregten Punkte $O$ nach allen Richtungen ausbreiten. Ist $v$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, $\tau$ die Dauer der Bewegung eines Moleküls, so wird

$$\lambda = v\tau \tag{47}$$

wo $\lambda$ den Weg andeutet, welchen die Erregung während der Zeit $\tau$ zurückgelegt hat, und das Molekül, welches die Distanz $\lambda$ vom Anfangspunkte hat, wird eben seine Bewegung beginnen. $\lambda$ wird die Wellenlänge genannt. Da von $O$ aus sich die Bewegung gleichmässig nach allen Richtungen ausbreiten wird, so werden sich in einer Kugelsphäre alle Moleküle zu gleichen Zeiten in gleichen Bewegungszuständen befinden müssen und also eine sogenannte Wellenfläche bilden müssen.

Die Fortpflanzung der Wellenbewegung ist somit nichts als die Uebertragung der Bewegungsphasen der einzelnen Welle an die benachbarte. Da aber jeder einzelne Punkt wieder zum Mittelpunkte einer neuen Welle wird, so können wir diffuses und geradlinig fortgepflanztes Licht unterscheiden. Bei letzterem werden die seitlich entstehenden secundären Wellen in der Fortpflanzung gehindert, alle anderen Wellen hin-

---

[1]) Schrauf. l. c. Kap. XVI.

[2]) Cauchy. Theor. de la lumière. Paris 1830 (deutsch v. Moth. Wien 1842).

gegen, die von Theilchen in der Hauptwelle ausgehen, haben einen kleineren Krümmungshalbmesser als die Hauptwelle und werden somit von letzterer eingehüllt. Wir erhalten somit ein kegelförmiges Segment der Kugel, dessen Radien als Lichtstrahlen bezeichnet werden.

Ist der leuchtende Punkt sehr weit entfernt, so werden die für einen schmalen Lichtstreif geltenden Radien als parallel angenommen werden können. Wir erhalten geradlinig fortgepflanztes Licht.

Aus solchen Erwägungen werden die bei jeder solchen Bewegung auftretenden Elemente, und diess namentlich in Bezug auf Wellenlänge die Dauer einer Vibration und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eruirbar.

Die Elongation $s$ der Theilchen aus ihrer Ruhelage, sowie auch die Geschwindigkeit $c$, mit welcher die Theilchen selbst sich bewegen, kommt vorerst nicht in Betrachtung.

Die Grösse der gegenseitigen Anziehung oder Abstossung zweier Moleküle kann durch $m\mathfrak{m}\ F(r)$ bezeichnet werden. Ist das System in Ruhe, besitzt dasselbe somit keine ihm aufgezwungene Bewegung, so wird für dasselbe die Summe aller etwa vorhandenen Bewegungen 0 sein. Ebenso wird auch die Summe der aus der Wirkung der Function $F(r)$ entspringenden Bewegungen Null sein müssen. Man kann somit die Componenten nach XYZ Null setzen, wodurch wir erhalten

$$\begin{aligned} S[mF(r)\cos\mathfrak{x}] &= 0 \\ S[mF(r)\cos\mathfrak{y}] &= 0 \\ S[mF(r)\cos\mathfrak{z}] &= 0 \end{aligned} \qquad (48)$$

wo $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Winkel der Distanz ($m\mathfrak{m} = r$) zu den Coordinatenaxen X, Y, Z bedeuten. Seien somit die Coordinaten von $\mathfrak{m}$: $x, y, z$, diejenigen von $m$: $(x + \Delta x)$, $(y + \Delta y)$, $(z + \Delta z)$, so werden die Richtungs-Cosinusse $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ ausdrückbar sein durch $\frac{\Delta x}{r}$, $\frac{\Delta y}{r}$, $\frac{\Delta z}{r}$, wo also auch $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ die Projection der Distanz $r$ auf die Richtung der Coordinatenaxe ist.

Wir erhalten hiedurch, wenn wir nur die Gleichung nach x betrachten, und ferner noch den Ausdruck Potenzial $\frac{F(r)}{r} = f(r)$ einführen, die nachstehende Gleichung für das Gleichgewicht.

$$0 = S[m\Delta x\, f(r)] \qquad (48a)$$

Im Falle einer Bewegung wird das Molekül $\mathfrak{m}$ die Coordinate $x + \mathfrak{x} \ldots$ das Molekül $m$ die Coordinaten $(x + \mathfrak{x} + \Delta x + \Delta\mathfrak{x}) \ldots$ erlangen, und deren Distanz $m\mathfrak{m}$ wird in $(r + \Delta r)$ übergehen. $\Delta\mathfrak{x}$ kann gleichsam als die Variation von $\Delta x$ angesehen werden.

Da nun jede bewegende Kraft durch das zweite Differenzial des Weges nach der Zeit gemessen wird, so folgt auch hier

$$d_t^2 x = Sm(\Delta x + \Delta \mathrm{x})\, f(r + \Delta r) \tag{49}$$

Da nun $f(r + \Delta r) = fr + \Delta r\, d_r\, f(r)$, so folgt auch

$$d_t^2 x = Sm[f(r) + \Delta r\, d_r\, f(r)]\, [\Delta x + \Delta \mathrm{x}]$$

Sind die Coordinaten x, y, z rechtwinkelig, so ist

$$\begin{aligned} r^2 &= \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \\ r\Delta r &= \Delta x \Delta \mathrm{x} + \Delta y \Delta \mathrm{y} + \Delta z \Delta \mathrm{z} \end{aligned} \tag{49a}$$

Substituirt man diess, nimmt auf die obige Gleichgewichtsgleichung Rücksicht und vernachlässigt die höheren Potenzen von $\Delta \mathrm{x}$, $\Delta \mathrm{y}$, $\Delta \mathrm{z}$, so erhält man

$$\begin{aligned} d_t^2 \mathrm{x} &= \Sigma m \left[ f(r) \Delta \mathrm{x} + \frac{d_r f(r)}{r} \{\Delta x^2 \Delta \mathrm{x} + \Delta x \Delta y \Delta \mathrm{y} + \Delta x \Delta z \Delta \mathrm{z}\} \right] \\ d_t^2 \mathrm{y} &= \Sigma m \left[ f(r) \Delta \mathrm{y} + \frac{d_r f(r)}{r} \{\Delta x \Delta y \Delta \mathrm{x} + \Delta y^2 \Delta \mathrm{y} + \Delta y \Delta z \Delta \mathrm{z}\} \right] \\ d_t \mathrm{z}^2 &= \Sigma m \left[ f(r) \Delta \mathrm{y} + \frac{d_r f(r)}{r} \{\Delta x \Delta z \Delta \mathrm{x} + \Delta y \Delta z \Delta \mathrm{y} + \Delta z^2 \Delta \mathrm{z}\} \right] \end{aligned} \tag{49b}$$

Dieses System von Gleichungen zwischen x, y, z, $\tau$ wird die Bewegung des Moleküls m, sowie überhaupt die Bewegung Eines Systems von Molekülen darstellen, wenn sich diese Theilchen gegenseitig anziehen und abstossen, während sie sich ein wenig aus ihrer Gleichgewichtslage entfernen.

Den Gleichungen wird genügt durch eine Exponentialform der allgemeinsten Form, in welcher x, y, z eine Linearfunction von $x, y, z$ ist, also

$$\mathrm{x} = U_1\, e^{-\sigma\tau i}, \text{ wobei } U_1 = U e^{\varphi i}.$$

Betrachtet man nur die reellen Theile dieser imaginären Ausdrücke für x, y, z, so können sie als Product 2 Cosinusse geschrieben werden.

$$\begin{aligned} \mathrm{x} &= \cos \mathfrak{x} \cos (K\omega - \sigma\tau + \gamma') \\ \mathrm{y} &= \cos \mathfrak{y} \cos (K\omega - \sigma\tau + \gamma'') \\ \mathrm{z} &= \cos \mathfrak{z} \cos (K\omega - \sigma\tau + \gamma''') \end{aligned} \tag{50}$$

Im Allgemeinen werden x, y, z dieselben Werthe annehmen, wenn die Zeit $\tau$ um die Grösse $\frac{2\pi}{\sigma}$ oder ein Vielfaches derselben zunimmt. Die Bewegung des Mittels wird daher so beschaffen sein, dass die einzelnen Moleküle Schwingungen machen und die Grösse $\tau$ die Dauer derselben angibt. Haben in Gleichung 50 die Constanten $\gamma'$, $\gamma''$, $\gamma'''$ gleiche Werthe, so erkennt man, dass die Bewegungen des Moleküls in einer geraden Linie

$$\frac{x}{\cos \mathfrak{x}} = \frac{y}{\cos \mathfrak{y}} = \frac{z}{\cos \mathfrak{z}} \tag{50a}$$

erfolgen. Man nennt einen solchen Schwingungszustand geradlinig polarisirt. Für variable Werthe von $\gamma'$, $\gamma''$, $\gamma'''$ wird die Bewegung in einer krummen Linie zweiter Ordnung, Kreis oder Ellipse erfolgen. Die Bewegungen des Moleküls m werden für eine bestimmte Zeit $\tau$ auch von $\omega$ abhängig sein, $\omega$ kann aber als die Distanz aufgefasst werden, welche das Molekül m von einer Ebene $ax + by + cz = v$ hat, wo $a^2 + b^2 + c^2 = K^2$ gesetzt ist. Da die Bewegungen gleich bleiben, wenn man $v$ um die Grösse $\lambda = \frac{2\pi}{K}$ ändert, so folgt, dass in allen Ebenen, welche zur obigen Ebene parallel sind und gleiche Distanz $\lambda$ haben, derselbe Bewegungszustand periodisch wiederkehrt. Wenn man in den Formeln für x, y, z beide Variabeln, $\omega$ und $\tau$ gleichzeitig ändert, um $\Delta\tau$, $\Delta\omega$, so wird die Ruhelage des Moleküls bezeichnet mit

$$K\Delta\omega - \sigma\Delta\tau = 0 \qquad \frac{\Delta\omega}{\Delta\tau} = \frac{\sigma}{K} = \frac{\lambda}{\tau} = v \tag{51}$$

Man hat somit dieselben Zustände sowohl in der Distanz $\omega$ und am Ende der Zeit $\tau$, als auch in der Zeit $\tau + \Delta\tau$ und in der Distanz $\omega + \Delta\omega = \omega + v\Delta\tau$, wodurch erhellt, dass $v$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der ebenen Wellen ist, welche sich dann von Mittel zu Mittel ändert. Diese Aenderungen werden dadurch hervorgebracht, dass die Schwingungsdauer, welche die Farbe des Lichtes bestimmt, in allen Mitteln dieselbe bleibt, hingegen die Wellenlänge sich verändert. Es verhalten sich also in zwei Medien die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten wie die bezüglichen Wellenlängen, oder führt man den Brechungsexponenten $\mu = \frac{v}{v'}$ ein, so erhält man

$$\lambda = \mu\lambda' \tag{51a}$$

wobei im Sinne dieser Theorie $v > v'$ ist.

§. 33. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes. Aus der allgemeinen Gleichung (49) leitet Cauchy[1]) die Werthe der Fortpflanzungsgeschwindigkeit als Function der Molekularfunction $F$ ab. Im Nachfolgenden beschränke ich mich, aus derselben nur das Wesentlichste hervorzuheben, um den Gang der Untersuchungen erkennen zu lassen.

Führt man die Werthe (50) in die Gleichungen 49 ein, so erhält man die bekannten abgekürzten Formeln:

---

[1]) Cauchy. Ex. d. An. et de Phys. Math. Broch. in Dove's Repertorium, vol. 5, 7.

$$(49c)\qquad \begin{aligned} (\mathfrak{L} - d_t^2)\,x + \mathfrak{R}y + \mathfrak{Q}z &= 0 \\ (\mathfrak{M} - d_t^2)\,y + \mathfrak{R}x + \mathfrak{P}z &= 0 \\ (\mathfrak{N} - d_t^2)\,z + \mathfrak{Q}x + \mathfrak{P}y &= 0 \end{aligned}$$

worin $\mathfrak{L}\ \mathfrak{M}\ \mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}\ \mathfrak{Q}\ \mathfrak{R}$ summatorische Functionen des Potenzials und der Molekularsummen sind (vergl. Kapitel XIII). Sei nun $S$ die Verschiebung längs der Vibrationsrichtung, deren Cosinus abgekürzt mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ bezeichnet werden, so ist

$$S = \mathfrak{x}x + \mathfrak{y}y + \mathfrak{z}z$$

Combinirt man diese Gleichung mit (49b), so folgt

$$(52)\qquad \frac{d^2S}{d^2t} = -\,\sigma^2 S$$

wobei als Bedingung zu erfüllen ist

$$(52a)\qquad \begin{aligned} \sigma^2\mathfrak{x} &= \mathfrak{L}\mathfrak{x} + \mathfrak{R}\mathfrak{y} + \mathfrak{Q}\mathfrak{z} \\ \sigma^2\mathfrak{y} &= \mathfrak{R}\mathfrak{x} + \mathfrak{M}\mathfrak{y} + \mathfrak{P}\mathfrak{z} \\ \sigma^2\mathfrak{z} &= \mathfrak{Q}\mathfrak{x} + \mathfrak{P}\mathfrak{y} + \mathfrak{N}\mathfrak{z} \end{aligned}$$

Eliminirt man aus dieser Gleichung $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, so erhält man

$$(53)\qquad \begin{aligned} (\mathfrak{L} - \sigma^2)(\mathfrak{M} - \sigma^2)(\mathfrak{N} - \sigma^2) - \mathfrak{P}^2(\mathfrak{L} - \sigma^2) - \mathfrak{Q}^2(\mathfrak{M} - \sigma^2) \\ - \mathfrak{R}^2(\mathfrak{N} - \sigma^2) + 2\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R} = 0 \end{aligned}$$

welche Function des 3. Grades sich im Allgemeinen schreiben lässt als

$$(53a)\qquad (\sigma^2 - \mathfrak{E}')\,(\sigma^4 - \sigma^2\,\mathfrak{E}'' + \mathfrak{E}''') = 0.$$

Diese Gleichung wird als Gleichung des Polarisationsellipsoides bezeichnet, da die Werthe derselben die Elongation der Theilchen nach drei Richtungen bestimmen. Da für den Fall des Lichtes, welcher nur die zwei Transversalvibrationen in sich fasst, die Longitudinalcomponenten Null werden müssen, so wird für diesen Fall der Factor $(\sigma^2 - \mathfrak{E}')$ Null gesetzt werden müssen.

Da $\mathfrak{E}'$, wie sich leicht erkennen lässt, eine Function von $\mathfrak{L}\mathfrak{M}$ . . somit auch von $F(r)$ ist, so ist es möglich, den Ausdruck von $\sigma^2$ und hierdurch als analoge Function auch $v^2$ hieraus ableiten. Nach vielfacher Reduction, auf welche hier nicht eingegangen werden kann, gelingt es Cauchy, $\mathfrak{E}$ als summatorische Function in der Weise

$$(54)\qquad \mathfrak{E} = \Sigma m\,F(r)\,\Phi + \frac{1}{k}\,d_k\,\Sigma\,\frac{m}{r}\,d_r\,F(r)\,\Psi$$

darzustellen, wo $\Phi$ und $\Psi$ die aus den Werthen von x, y, z abgeleiteten Exponentialformen darstellen.

Da die Integration auf unendliche Reihen zurückführt, so hat Cauchy versucht, statt der Masse einen Ausdruck einzuführen, der gleichzeitig mit der principalen Function $F(r)$ reducirbar ist. Diess ge-

lang durch Zerlegung des Molekularsystems in Kugelschichten, deren Masse $4\pi r^2 D \Delta r$ ist, wenn $\Delta r$ die Dicke der Schichte darstellt.

Es ist diese Substitution zur Ermöglichung der Integration der bedenklichste Punkt in der Entwicklung, denn die Integration der Ausdrücke wird von $r_0$ bis $r_\infty$ ausgedehnt, während über die Grenzen der Wirkungssphäre keine Bestimmungen bekannt sind; auch folgt aus der Einführung der Distanz der Atome die Ausserachtlassung der Masse selbst. Integrirt man von $r_0$ bis $r_\infty$, so erhält man für

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= -\frac{4\pi D}{3}\left[r^2_\infty F(r_\infty) - {}^1/_{10} K^2 r_0^4 F(r_0)\right] \\ v^2 &= \frac{\sigma^2}{K^2} = -\frac{\mathfrak{E}}{K^2} \quad \text{wo } K = \frac{2\pi}{\lambda} \\ v^2 &= \frac{4\pi D}{3}\left[\frac{\lambda^2 r^2_\infty F(r_\infty)}{4\pi^2} - {}^1/_{10} r^4_0 F(r_0)\right] \end{aligned} \tag{55}$$

Da $\lambda$ die Wellenlänge bedeutet und die Functionen wohl auch durch Reihen ausgedrückt werden können, so vermag der Ausdruck für $v^2$ dargestellt zu werden durch

$$v^2 = a\Sigma + \lambda^2\Sigma' + \ldots \tag{56}$$

ein Ausdruck, der besagt, dass mit dem Quadrate der Wellenlänge das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes zunimmt.

Es führen diese Betrachtungen daher im Allgemeinen zu einer Reihe, welche von der Wellenlänge abhängt. Zu bedenken ist jedoch, dass weder die principale Function, noch die Masse der Moleküle in nähere Betrachtung gezogen, sondern nur die Form der Bewegung aus den allgemeinen Bedingungen abgeleitet worden ist.

§. 32. **Messung der absoluten und relativen Lichtgeschwindigkeit.** Wäre die im vorigen Paragraphe von Cauchy aufgestellte Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes eine absolut auswerthbare, so müsste es möglich sein, durch dieselbe auch den Werth der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in den verschiedenen Mitteln aus der Kenntniss der materiellen Eigenschaften der letzteren abzuleiten. Da aber nach der Formel 55 $v$ proportional zur Dichte $D$ gesetzt worden, so kam Cauchy hierdurch zur Annahme, dass der Aether in den festen Körpern viel weniger dicht sei, als in den Gasen. Es ist diese Annahme, gemacht von dem Schöpfer der neueren theoretischen Optik, wohl kein günstiges Argument für die Existenz des Aethers selbst, der nach dieser Hypothese im leeren Raume am dichtesten wäre; denn im Gegensatze hierzu lehren die directen Versuche, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes zur Dichte der körperlichen Mittel sich nahezu verkehrt proportional verhält.

Diese für die Undulationstheorie wichtigen Messungen der relativen Lichtgeschwindigkeit sind Gegenstände der allgemeinen Physik, und können daher im Nachfolgenden nur mit wenigen Worten berührt werden. Die ihnen zu Grunde liegenden Methoden suchen messbare Verschiebungen eines Lichtstrahls hervorzurufen durch die schnelle Rotation eines reflectirenden Spiegels, dessen Geschwindigkeit durch die Höhe des Tones gemessen werden kann.

Die absolute Geschwindigkeit des Lichtes in der Luft bestimmte Fizeau (C. r. 1849), indem er den von *A* ausgehenden Lichtstrahl durch einen entfernten Spiegel *B* wieder nach *A* reflectiren liess. Zwischen *A* und *B* war ein rotirendes Zahnrad angebracht. Der Lichtstrahl konnte somit entweder durch die Zähne abgeblendet werden oder die Zwischenräume passiren. Hat nun das Rad eine solche Rotations-Geschwindigkeit, dass das beim Hingange einen Zwischenraum passirende Licht bereits beim Rückweg an der Stelle des Zwischenraumes einen Zahn findet, so wird Dunkelheit entstehen. Letzteres trat ein, wenn das Rad mit seinen 720 Zähnen in der Secunde 12·6 Umdrehungen machte, während das Licht durch eine zweifache Reflexion 2 × 8633 Meter zurücklegte. Die Geschwindigkeit des Lichtes in Luft ergab sich somit analog den astronomischen Berechnungen zu 42·500 geogr. Meilen.

Von der directen Methode abgehend, hat Foucault (C. r. 1850 und Pogg. Ann. vol. 81) ein indirectes Verfahren zur Bestimmung der relativen Lichtgeschwindigkeit in Luft und Wasser angewendet, welches auf der Verschiebung eines Lichtbildes durch die Rotation eines Spiegels beruht.

Bei seiner Methode geht der Lichtstrahl von der Lichtquelle zu dem rotirenden Spiegel *A*, von diesem zu dem Reflector *B*, und wird, von diesem zurückgeworfen, denselben Weg wieder nach rückwärts machen und parallel dem einfallenden Lichte austreten, wenn *A* in Ruhe ist. Ist hingegen *A* in schneller Rotation, so wird der das Bild gebende Lichtstrahl von dem wahren Orte der Lichtquelle abgelenkt, und zwar um so mehr, je längere Zeit das Licht braucht, um den Zwischenraum *AB* (bei Foucault 4 Meter) zurückzulegen.

Da nun in dem Falle, wo Wasser in dem Zwischenraume *AB* eingeschaltet war, die Verschiebung grösser war, als bei Luft allein, so ergibt sich, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in dem materiell dichteren Mittel die grössere war.

Es ist diess eine directe Bestätigung der Undulationstheorie, da die Emissionstheorie nach Newton annahm, dass proportional der Dichte die Geschwindigkeit des Lichtes sich steigere.

§. 33. Die Vibrationen der Moleküle. Ist durch die bisherigen Untersuchungen gelungen, für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtimpulses die allgemeinen Beziehungen aufzufinden, so erübrigt noch, die Bewegungen der Theilchen selbst zu beobachten.

Es lassen sich diese Bewegungen entweder als translatorische oder als vibratorische betrachten. Nur vermöge der letzteren würde das Molekül wieder auf seinen Ort zurückkehren, während bei der ersteren das Zurückkehren auf den Ausgangspunkt nicht erfolgt. Die Annahme von Vibrationen erfordert somit die Existenz eines Gravitationscentrums des bewegten Moleküls. Da nach den schon mehrmals erwähnten Grundzügen der Molekularconstitution bei den Gasen den Molekülen freie Bewegung im Raume zukommt, so dürfte es schwer sein, Vibrationen der Gasmoleküle zu beweisen. Anders bei den flüssigen oder festen Körpern, welche ein stabiles Centrum ihrer Bewegung besitzen. Die Vibrationen der kleinsten Theilchen, sowie sie bisher angenommen wurden, sollen nun im Nachfolgenden ihre Erörterung finden.

Durch die Verschiebung der Theilchen aus der Ruhelage wird eine beschleunigte Kraft $d^2S$ geregt, welche das Molekül in seine Ruhelage zurückzuführen, also die Elongation $S$ zu verkleinern strebt, andererseits wird diese Kraft aber mit $S$ wachsen und von denselben eine Function darstellen. Für die Elongation gilt die Gleichung 52, für die Geschwindigkeit der Theilchen auf seiner Bahn $c = \frac{dS}{dt}$.

Die Integration dieser Gleichung (52) ergibt aber

$$S = s \cos \sigma\tau + \frac{c}{\sigma} \sin \sigma\tau \qquad (57)$$

worin $s$ die Anfangsverschiebung und $c$ die Anfangsgeschwindigkeit und $\sigma = \frac{2\pi}{\tau}$ bedeutet.

Unter der Annahme, dass die Bewegung von jener Zeit an gezählt wird, für welche $c = o$, folgt für die Phasenverschiebung

$$S = s \cos \frac{2\pi t}{\tau} \qquad (57a)$$

für die Geschwindigkeit in der Bahn

$$c = \frac{2s\pi}{\tau} \sin \frac{2\pi t}{\tau} \qquad (58)$$

Würde die Zeit aber von jenem Punkte an gezählt, wo die Anfangsverschiebung gleich Null ist, so würden sich diese Gleichungen in die nachstehenden

$$S = s \sin \frac{2\pi t'}{\tau} \qquad c = \frac{2s\pi}{\tau} \cos \frac{2\pi t'}{\tau} \qquad (59)$$

verwandeln, wo dann $t' = \frac{\pi}{2} + t$ ist; geht man zu dem in der Entfernung $x$ befindlichen Theilchen[1]) über, so wird dann seine Elongation

(59a) $$S = s \sin 2\pi \left(\frac{t'}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right) = s \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt' - x)$$

geschrieben werden können, die zumeist angewendete Gleichung. In eine analoge Form lässt sich der Ausdruck (58) für $c$ verwandeln. Diese Ausdrücke geben nun sowohl die Grösse der Elongation, als auch die Geschwindigkeit für jeden intermediären Zeitpunkt der totalen Schwingungsdauer an.

Geht man in die Discussion dieser Gleichungen ein, so ersieht man deutlich die periodische Bewegung des einzelnen Moleküls. Die vom Molekül zurückgelegte Curve wird im allgemeinsten Falle eine Ellipse sein, und nur in speciellen Fällen in einen Kreis oder eine gerade Linie übergehen. Man pflegt dann elliptisch, kreisförmig und linear polarisirtes Licht zu unterscheiden, wenn der Bewegungszustand der einzelnen Moleküle in der ganzen Welle gleich und gegen $XYZ$ gleich orientirt bleibt.

Als unpolarisirt wird jener Lichtstrahl bezeichnet, bei dem die linearen[2]) Schwingungen der einzelnen Moleküle variabel gegen $XYZ$ orientirt sind.

Die Bewegung der Moleküle wird im allgemeinsten Falle eine mehr oder minder seitliche bezüglich der Fortpflanzungsrichtung sein müssen, wobei sich dieselben periodisch von Welle zu Welle wiederholt. In jeder Welle hingegen werden, wie aus oberen Gleichungen ersichtlich, folgende Bewegungszustände zu unterscheiden sein. Die Anfangsglieder der vorhergehenden oder nachfolgenden Welle sind gleichzeitig in Ruhe. Die Theilchen von $0 - \frac{\lambda}{2}$ werden dann beispielsweise eine Elongation nach rechts, die von $\frac{\lambda}{2} - \lambda$ eine nach links haben; in jeder dieser Wellenhälften haben aber wieder die Theilchen doppelte Richtung ihrer Bewegung; vorerst von der Gleichgewichtslage weg, im ersten Viertel der Wellenlänge nach rechts, im dritten Viertel nach links; dann wieder im zweiten und vierten Viertel zur Gleichgewichtslage zurück. Diese Bewegungen setzen jedoch, wie schon oben erwähnt, ein stabiles Gravitationscentrum des Moleküls voraus. Wäre letzteres nicht vorhanden, so würde der Anprall an die nächstgelegenen Moleküle genügen, um den Sinn der Bewegung analog ganz zu ändern.

---

[1]) Vergl. Pogg. Ann. vol. 23, pag. 219 Anmerkung.

[2]) Stefan. Sitzb. der Wien. Academie. L. 2. Abth. 380, vergl. Lippich. Sitzb. der Wien. Acad. 1863. XLVIII, 146.

§. 34. Interferenz. Wenn auch bei den optischen Phänomenen longitudinale Schwingungen vorhanden sind, so lassen sich doch die für unser Auge sichtbaren Erscheinungen nur durch die Annahme transversaler Bewegungen der kleinsten Theilchen erkläien. Von der wichtigsten Beweiskraft hierfür sind die Erscheinungen der Interferenzen des Lichtes durch Reflexion, Brechung oder Beugung. In allen diesen Fällen kommen Strahlen gleicher Art zum Durchschnitte, und an diesem Durchschnittspunkte werden somit die Moleküle sowohl an der Wellenbewegung der ersten als auch an der der zweiten theilnehmen müssen. Treffen nun gleich orientirte Erregungszustände beider Strahlen zusammen, so wird die Intensität der Bewegung des Moleküls gesteigert; im Gegensatze hierzu wird die durch den ersten Strahl bewirkte Erregung durch eine auf denselben Punkt fallende widersinnige Bewegung des zweiten Strahles aufgehoben werden. Die Möglichkeit der Interferenz zweier Strahlen lässt sich auf Grund der obigen Gleichung (58) nachweisen [1].

Ist der Phasenunterschied $\Delta$ zweier Strahlen gleich $n \dfrac{2\pi}{t}$, so ist

$$c = \frac{2s\pi}{\tau} \sin \frac{2\pi t}{\tau} = a \sin \mu$$

$$c' = \frac{2s'\pi}{\tau} \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - n) = b \sin (\mu - \Delta)$$

Es wird daher die resultirende Geschwindigkeit sein

$$C = c + c' = (a + b \cos \Delta) \sin \mu - b \sin \Delta \cos \mu$$

oder führt man die Hülfsgrössen $\Theta$ für den Phasenunterschied ein

$$\operatorname{tang} \Theta = \frac{b \sin \Delta}{a + b \cos \Delta}$$

so gilt für das Quadrat der Amplitude $S_1$, womit die Intensität bezeichnet wird; und für die Geschwindigkeit $c_1$ der interferirenden Strahlen

$$\left.\begin{aligned} S_1^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \cos \Delta \\ C_1 &= S \sin \left( \frac{2\pi t}{\tau} - \Theta \right) \end{aligned}\right\} \quad (60)$$

Hieraus folgt, dass die Amplitude und Intensität für einen Gangunterschied von einer ungeraden Anzahl halber Wellenlängen Null ist, wenn die Intensitäten der beiden Strahlen $a$, $b$ gleich sind. Im Allgemeinen werden also jene Strahlen sich gegenseitig aufheben, deren homologe Theilchen um die Hälfte einer oder mehrerer Wellenlängen in ihrer Bewegung sich unterscheiden. Sie werden nach Stefan, Brequet, Fizeau selbst dann interferiren, wenn sich dieser Wegunterschied selbst auf mehrere Tausende (50000) von Wellenlängen belaufen würde.

[1] Fresnel. Mém. de l'Instit. vol. V, pag. 339. Pogg. Ann. XXX, 140.

Um Interferenzen zu erzeugen, kann man entweder direct zwei Lichtbüschel durch naheliegende Spaltöffnungen einfallen lassen oder durch Reflex eines leuchtenden Punktes an zwei geneigten Spiegeln zwei Strahlen erzeugen, die dann ebenfalls von zwei hinter den Spiegeln liegenden Punkten herzukommen scheinen. Dasselbe Resultat kann auch erreicht werden durch jene Methoden, welche die interferirenden Strahlen entweder durch Doppelbrechung oder bloss durch ein eingeschaltetes verzögerndes Mittel in seinem Gange gegenüber den anderen zurückhalten. Es entstehen nun, je nach dem Wegunterschiede der Strahlen, die eine gerade oder ungerade Anzahl der Vielfachen von der halben Wellenlänge beträgt, lichte und dunkle Partien. Sind die Lichtquellen nicht Punkte, sondern vielmehr nach einer Richtung vorherrschend verlängerte Streifen, so wird in der Richtung dieser Längenaxe durch Interferenz alles seitliche Licht ausgelöscht, hingegen senkrecht zu derselben werden die lichten und dunklen Partien der Interferenz aufeinander folgen.

§. 35. Beugung und Asterismus. Die durch eine Reihe von seitlich aufeinanderfolgenden Lichtquellen hervorgerufenen Interferenzerscheinungen haben ihren Grund aber nicht allein in der Uebereinanderlagerung des geradlinig fortgepflanzten, sondern auch in jener des seitlich abgelenkten, gebeugten Lichtes. Die Spalte, durch welche Licht einfällt, kann nämlich als eine secundäre Lichtquelle betrachtet werden, von der nach allen Seiten Licht ausgeht. Ist die Breite der Spalte so gross, dass der Wegunterschied zu einem ausser der Richtung der geradlinigen Fortpflanzung liegenden Punkt für jene Strahlen, welche von den beiden Enden der Spalte ausgehen, ein Vielfaches der halben Wellenlänge beträgt, so werden dieselben durch Interferenz sich aufheben. Wir sehen daher in dem Falle breiter Spalten nur das directe Bild. Anders hingegen bei Spalten, deren Breite bereits mit der Grösse der Wellenlänge commensurabel ist. Hier wird das seitlich abgelenkte Licht nur mehr für einzelne Partien durch Interferenz ausgelöscht werden, und daher wechseln dunkle und helle Partien miteinander ab.

Fig. 8.

Die für die Beugung geltenden Formeln können hier nur in Kürze erörtert werden[1].

Geht vom Punkte $P$ eine directe Welle mit der Geschwindigkeit $v$, eine gebeugte mit der Geschwindigkeit $v_1$ aus, und seien deren Normalen $D$ und $B$, so werden, wenn wir vom

[1] Vergl. Fresnel. Pogg. Ann. vol. 23. Wilde. Pogg. Ann. vol. 89. pag. 91. Wüllner. Pogg. Ann. 119, pag. 616. Ditscheiner. Sitzb. d. Wien Acad. 1868.

Coordinatenmittelpunkte Normalen auf $D$ und $B$ ziehen, die Phasen dargestellt sein durch das Verhältniss des Weges zur Geschwindigkeit

$$d = \frac{MP}{v} \qquad d' = \frac{NP}{v'}$$

Sind die Coordinaten von $A$: $x$, $y$, $z$, sind die Cosinusse von $OA$ respective $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$, ferner die Cosinusse der directen Wellennormalen $A$, $B$, $C$, die der gebeugten $A_B$, $B_B$, $C_B$, so ist

$$\cos MPO = \frac{xA}{r} + \frac{yB}{r} + \frac{zC}{r}$$

daher

$$AM = xA + yB + zC \text{ und } AN = xA_B + yB_B + zC_B$$

Der Phasenunterschied der beiden Strahlen wird somit sein

$$\varDelta = d - d' = x\left(\frac{A}{v} - \frac{A_B}{v'}\right) + y\left(\frac{B}{v} - \frac{B_B}{v'}\right) + z\left(\frac{C}{v} - \frac{C_B}{v'}\right) \quad (61)$$

oder abgekürzt $\varDelta = xp + yq + zr$

Betrachtet man nur den einfachen Fall von Spalten, welche in einer Ebene liegen, so kann man ein solches Coordinatensystem wählen, dass die Ebene der Spalte mit einer Coordinatenebene zusammenfällt, daher z. B. $y = 0$ wird, dann die Dimensionen der Höhe und Breite mit den beiden anderen Axen zusammenfallen. Es wird dann die auf einen Punkt entfallende Bewegung in folgender der von einer Spalte von $b$ Breite und $h$ Höhe ausgehenden Wellenbewegung sein

$$S' = \int\limits_{z=0}^{z=h} \int\limits_{x=0}^{x=b} S \sin\frac{2\pi}{\tau}(t - \varDelta)\, dx\, dz$$

$$\frac{S'}{\sin\frac{2\pi}{\tau}(t - \varDelta)} = Sbh \frac{\sin\frac{\pi}{\tau} bp}{\frac{\pi bp}{\tau}} \; \frac{\sin\frac{\pi}{\tau} hr}{\frac{\pi hr}{\tau}} = \sqrt{I} \quad (62)$$

wo $\varDelta$ eine constante Phasendifferenz, $I$ die Intensität, $p$ und $r$ die Werthe aus (61) bedeuten. Man erkennt hieraus gleichzeitig die Variationen der Intensität im Maximum oder Minimum.

Sind mehrere $n$ Spalten vorhanden, deren Distanz $d$ in der Coordinate $X$ ist, so wird

$$S = \int\limits_0^h dz \left[\int\limits_0^a \sin(\ldots)\, dx + \int\limits_{a+d}^{2a+d} \ldots + \int\limits_{2a+2d}^{3a+2d} \ldots\right]$$

wodurch man erhält

$$\frac{S}{\sin\frac{2\pi}{\tau}(t-\Delta)} = \sqrt{I} = Sbh \frac{\sin\frac{\pi}{\tau}pb}{\frac{\pi bp}{\tau}} \frac{\sin\frac{\pi}{\tau}hr}{\frac{\pi}{\tau}hr} \frac{\sin n(b+d)\pi p}{\sin(b+d)\pi p}$$

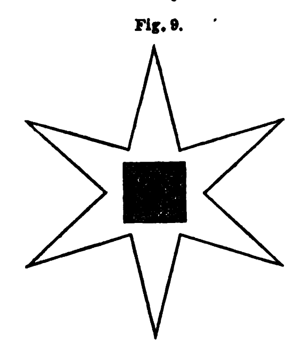
Hieraus ergeben sich leicht die Bedingungen für das Maximum und Minimum der Intensität

$$(63)\qquad \begin{array}{l} \frac{A}{v} - \frac{A_B}{v'} = p = 0 \,..\, \frac{\tau}{b+d} \,..\, \frac{2\tau}{b+d} \\ \frac{C}{v} - \frac{C_B}{v'} = r = 0 \,..\, \frac{\tau}{h} \,..\, \frac{2\tau}{h} \end{array}$$

Die auf einen Schirm projicirten Orte der grössten und kleinsten Intensität sind Kegelschnittslinien mit Ausschluss des Kreises, jede der ungleichen Parallelogrammseiten einer Spalte entspricht, unabhängig von den anderen, einem Systeme solcher Curven, durch deren gegenseitigen Durchschnitt die Gestalt der ganzen Erscheinung bestimmt wird[1]).

Dieses gebeugte und interferirende Licht gibt nun Veranlassung zu dem bei den Krystallen beobachteten Asterismus, einer büschelförmigen Lichtfigur, die concentrisch von dem primären Lichtbilde auszugehen scheint, und sowohl im durchfallenden, als auch im reflectirten Lichte sichtbar ist. Es sind diese Büschel nur die Interferenzspectra[2]), welche feinen unter dem Mikroskope sichtbaren Streifen auf der Oberfläche des Krystalls ihre Entstehung verdanken (Fig. 9)

Fig. 9.



Dieselben verdanken bei manchen Mineralen, z. B. Calcit, erst künstlichen Aetzungen ihren Ursprung, in welchem Falle man sie mit dem Namen Brewster'sche Lichtfiguren [2]) bezeichnet. Gegen die von Mehreren gemachte Annahme [3]), dass eingesprengte Krystalle diess Phänomen erzeugen, sprechen mehrere Gründe, namentlich die Untersuchung von Hausenblasen-Abdrücken der geätzten Flächen, welche ohne eingeschlossene fremde Bestandtheile

[1]) Vergl. R. Felgel: Ueber die Gestalt einiger Beugungs-Erscheinungen. Realschulprogramm. Wien 1866.

[2]) Brewster. Edinburgh Transactions 1837, vol. XIV. Philos. Magazin 1853, vol. V. Babinet C. r. 1837. IV, 757. Volger. Sitzb. d. Wien. Acad. 1856. XIX. 103. Kobell. Sitzungsber. der bayr. Acad. in München 1862. I. Haushofer. Ueber Asterismus und die Brewster'schen Lichtfiguren am Calcit. Habilitationsschrift 1865. München. 8.

[3]) Rose. Ueber Asterismus (insbesondere des Glimmer von Canada South Burgess.) Monatsbericht der Berliner Academie 1862.

nur durch die Streifung ihrer Oberfläche die Erscheinung im reflectirten Lichte auf das schönste zeigen.

Die Distanzen dieser dunklen und hellen Interferenzstreifen sind nun, wie sich leicht beweisen lässt, Functionen der Wellenlänge, und es lässt sich sogar letztere hierdurch berechnen. Im Allgemeinen kann als Annäherungsformel für die Abhängigkeit dieser erwähnten Distanzen $d$ der Interferenzstreifen von dem Werthe der Wellenlänge gelten

$$\frac{n\lambda}{2} = \frac{db}{c} \tag{64}$$

worin $b$ die auf dem Lichtstrahl senkrecht stehende Distanz der beiden lichtgebenden Punkte, $c$ die Distanz der interferirenden Stelle von der letztgenannten, $n$ die Reihenfolge der natürlichen Zahlen ist, gleichzeitig entsprechend der Reihenfolge der Interferenzen. Hierdurch tritt die Wellenlänge in Connex mit messbaren Grössen, und lässt sich aus denselben ermitteln. Für farbiges Licht sind die Distanzen der dunklen Interferenzstellen variabel, und zwar für violettes Licht kleiner als roth, daher analog hiermit auch die Wellenlänge für violett kleiner als für roth ist. Die Bestimmungen der Wellenlänge ergaben im rothen Lichte 0·000687 Millimeter, für violett 0·000400 Millimeter.

Hieraus könnte man einen Schluss auf die Anzahl der Vibrationen der Moleküle in einer Secunde machen mittelst der Formel $\lambda = v\tau$, worin, wie bekannt, für Luft $v = 42.000$ Meilen. In einer Secunde ist somit die Anzahl der Schwingungen für roth 481, für violett 764 Billionen.

Es ergeben somit die Erscheinungen der Interferenz bereits die wichtigsten Zahlenverhältnisse der optischen Elemente, und sind hierdurch eine wesentliche Stütze zur Annahme von Transversalvibrationen zur Erklärung des Lichtes.

Da dieselben Erscheinungen auch bei der strahlenden Wärme auftreten, so muss auch für letztere ein analoger Vorgang angenommen werden. Inwieweit sich die beiden Agentien unterscheiden und überdiess von den Eigenschaften der Materie abhängen, wird in einem späteren Kapitel erörtert werden. Ebendaselbst werden aber auch die Gesetze aufgestellt werden, welche für die Wellenbewegung des Lichtes gelten, wenn man nicht, wie bisher bei der allgemeinen Theorie geschehen, die Masse des bewegten materiellen Theilchen vernachlässigt.

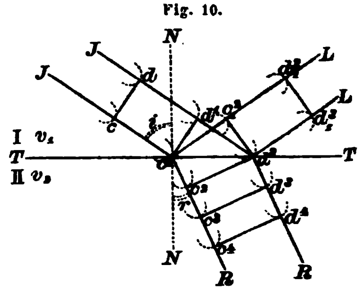
# VII. Kapitel.

## Refraction und Dispersion des Lichtes. Spectralanalyse.

§. 36. In den Mitteln, deren Dichtigkeit und Elasticität nach allen Richtungen gleich ist, bewegt sich die ebene Welle mit gleich bleibender Geschwindigkeit fort, ohne Gestalt und Richtung zu ändern. Wir pflegen solche Mittel isotrope Medien zu nennen. Trifft jedoch die Welle an die Oberfläche eines zweiten Mediums, so erleidet sie eine Veränderung; ein Theil der Welle setzt sich in dem zweiten Medium fort und heisst gebrochen, während ein anderer Theil nach dem bekannten Spiegelungsgesetze in das erste Medium zurückgeworfen wird. Ist $T'T$ die Trennungsfläche zweier Medien und $N$ das Loth auf dieselbe, so pflegt das einfallende mit $I$ (I)ncidenz, das ref(r)ingirte mit $R$, das ref(l)ectirte Licht mit $L$ bezeichnet zu werden, und es lässt sich aus den allgemeinen Annahmen der Undulationstheorie der Gang dieser Wellen der verschiedenen Mittel auf constructivem Wege nach Huyghens leicht erkennen.

Letzteres ist namentlich durch die Erwägung möglich, dass jeder Punkt der Hauptwelle der Mittelpunkt neuer Elementarwellen ist, so dass die Hauptwelle nur die umhüllende der Elementarwellen und gleichzeitig senkrecht auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Strahles ist. Im einfallenden Strahle $Jc'J'd^2$ breiten sich die Wellen mit einer Geschwindigkeit aus, die sowohl der totalen Fortpflanzungsgeschwindigkeit $v$ des Lichtes im ersten Medium, als auch den Radien der Wellen für gleiche Zeiträume proportional sein muss. Letztere sind im einfallenden Strahle mit $cc'$ und

Fig. 10.



$dd'$ bezeichnet und die Zeit $t$, in welcher die Welle von $c$ bis $c'$ vorschreitet, wird gleich sein $\left(\frac{dd'}{v}\right)$. Fällt nun der Strahl $I$ nicht senkrecht auf die Trennungsfläche $TT'$ der Medien I und II, so wird gleichzeitig die Welle noch an dem Punkte $d'$ sich im ersten Medium fortpflanzen, während sie hingegen bereits den Punkt $c'$ die Trennungsfläche $TT'$, also das zweite Medium erreicht hat.

In derselben Zeit $\left(t = \frac{d'd^2}{v}\right)$, die nothwendig ist, damit auch die Welle von $d'$ zum Punkte $d^2$ im zweiten Medium fortschreitet, wird sich bereits von $c'$ die Welle im zweiten Medium ausgebreitet und einen Weg $c'c^2$ zurückgelegt haben, der gleich ist $\left(v't = v' \frac{d'd^2}{v}\right)$

Ist nun die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $v'$ des zweiten Mittels eine verschiedene von derjenigen $v$ des ersten Mittels, so wird auch der in II zurückgelegte Weg $cc'$ verschieden von jenem $d'd''$ sein. In obiger Figur ist $v > v'$ vorausgesetzt, daher $\left(v' \frac{d'd^2}{v} = c'c^2\right) < d'd^2$

In derselben Zeit, als somit die Welle von $d'$ nach $d^2$ gelangt, legt sie nur mehr den kürzeren Weg bis $c^2$ im zweiten Mittel zurück; in allen nachfolgenden Zeiten sind jedoch wieder die in II zurückgelegten Wege $c^2c^3 = d^2d^3$ gleich, und es werden somit die Punkte $c^3d^3$ und $c^4d^4$ die gleichzeitige Lage der Welle angeben, und da auf letzterer die Fortpflanzungsrichtung senkrecht steht, so gibt $c'c^2$ als die Normale auf $c'd^2$ die Fortpflanzungsrichtung des gebrochenen Strahles.

Man nennt den Winkel des Einfallslothes mit dem gebrochenen Strahl den Brechungswinkel $r$, den hingegen zu dem einfallenden Strahl den Einfallswinkel $i$.

Der zweite Strahl, der in das I. Medium zurückgeworfen wird, wird in der Ebene des einfallenden Strahles und Einfallslothes liegen und mit letzterem einen Winkel $l$ bilden, der dem Incidenzwinkel gleich ist. Diess bekannte Spiegelungsgesetz lässt sich durch eine analoge Construction der ebenen Wellen $c'c^2$; $c^2{}_1d^3{}_1$; $d^2d^3{}_1$, wie für den gebrochenen Strahl leicht ableiten.

§. 37. Brechungsexponent. Der Weg, den die gebrochene Welle im II. Mittel verfolgt, hängt somit vor Allem von dem Verhältnisse der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten $v'$ zu $v$ ab. Für den Fall, dass $v' = v$ wird auch $c'c^2 = d'd^2$ und $\sphericalangle\, r = i$, der Strahl geht ungebrochen durch; ist hingegen $v' < v$, so ist auch $c'c^2 < d'd^2$;

und $\sphericalangle r < i$ und der Strahl wird zu dem Einfallslothe gebrochen. Im Gegensatze hierzu, wenn $v' > v$ wird $c'c^2 > d'd^2$ und $\sphericalangle r > i$ und der Strahl wird vom Einfallslothe gebrochen.

Aus der obigen Construction erhellt aber, dass man, wenn $\sphericalangle i$ und $v$ bekannt, mit Zuhilfenahme von $v'$ den Gang des gebrochenen Strahles oder mittelst $\sphericalangle r$ zur Kenntniss der Geschwindigkeit $v'$ des Lichtes im zweiten Medium gelangen kann.

Da nämlich in isotropen Medien die ebene Wellenfläche senkrecht auf den Strahl steht, so sind die Winkel der Strahlen zum Lothe jenen der Wellen zur Trennungsfläche gleich und daher gelten

$$c'c^2 = c'd^2 \sin r; \quad d'd^2 = c'd^2 \sin i; \quad c'c^2 = \frac{v'}{v} \, d'd^2$$

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v}{v'} = \mu \tag{65}$$

in welcher Gleichung $\mu$ mit dem Namen Brechungsexponent bezeichnet wird.

Diess Gesetz hat bereits Snellius entdeckt und Descartes hat dasselbe in seiner Dioptrice veröffentlicht und angegeben, dass das Verhältniss des Sinus der Einfalls- und Brechungswinkel für dieselben Mittel gleich bleibt. Um den absoluten Werth des Brechungsexponenten zu finden, muss auch der Werth von $v'$ und $v$ bekannt sein oder direct bestimmt werden. Die Emissionstheorie des Lichtes nahm an, dass die Geschwindigkeit des letzteren mit der Dichte wachse, also in der Luft kleiner sei als in jedem körperlichen Mittel; im Gegensatze hierzu steht die Vibrationstheorie, welche eine Abnahme von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit Zunahme der Körperdichte selbst durch Versuche constatirt hat.

Aus obiger Gleichung folgt somit, dass ein Werth von $\mu > 1$ für die Vibrationstheorie den Bedingungen $v' < v$ entspricht.

Als Maximum der Lichtfortpflanzungsgeschwindigkeit wird jene im Weltraume (im sogenannten leeren Raume, obgleich diess Wort nicht absolut richtig ist) angenommen, deren Werth ungefähr 42.000 Meilen ist und auf diesen als Einheit alle übrigen Beobachtungen zurückgeführt. Von demselben weichen die Werthe der Gase nur um einen sehr geringen Procenttheil ab, daher auch für nicht allzugenaue oder für relative Beobachtungen in Luft die Reduction auf den leeren Raum ohne grossen Fehler vernachlässigt werden kann. Der Brechungsexponent der Luft ist von Delambre auf astronomischem Wege zu 1.000294 bestimmt wor-

den, welche Zahl ziemlich genau mit jener von **Biot** und **Arago** (Mémoires de l'Institut 1824), sowie mit der von **Ketteler** (Berliner Monatsber. 1864) zu $\mu = 1.000292 - 1.000300$ gefundenen übereinstimmt.

Sind die relativen Exponenten zweier Medien und eines derselben gegen Luft bekannt, so wird sich auch durch einfache Reduction das Verhältniss des anderen gegen Luft oder sogenannten leeren Raum bestimmen lassen, denn es ist

$$q'' = \frac{v'}{v''} \qquad q' = \frac{v}{v'} \qquad v'' = \frac{v}{q'q''} \qquad \mu = \frac{v}{v''} = q'q'' \quad (65a)$$

Aus dem obigen allgemeinen Gesetze, dass der Brechungsexponent für jedes Mittel eine constante Grösse ist, lassen sich auch einige Bestimmungen über die möglichen Werthe von $i$ und $r$ ableiten. Zwei Fälle $i = o$ und $i = 90^0$ sind bemerkenswerth.

Für den Fall der senkrechten Incidenz, wo $i = o$, muss, da $\sin i : \sin r = \mu$ constant ist, wegen $\sin i = o$ auch $\sin r = o$ werden. Für diesen Fall ist $r = o$, also ist kein abgelenkter Strahl vorhanden, sondern die Welle pflanzt sich, ohne ihre Richtung zu ändern, im zweiten Mittel fort.

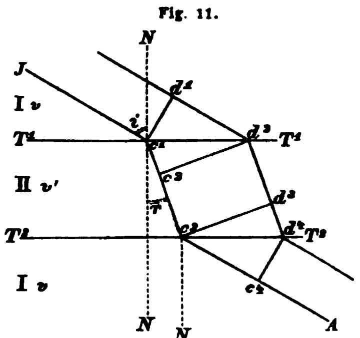
Ist hingegen $i = 90^0$, so wird $\sin i = 1$ und $\mu \sin r = 1$, wesshalb der Uebergang des Lichtes nur dann möglich ist, wenn das zweite Mittel das optisch dichtere ist, also $\mu > 1$ oder $v' < v$ ist.

Geschieht hingegen der Uebergang aus einem dichteren Mittel in in ein dünneres, also $v' > v$, so wird wegen $v' \sin i = v \sin r$ nur dann eine Brechung möglich sein, wenn $v' \sin i < v$ ist. Für den Fall, dass $v' \sin i = v$ ist, wird $\sphericalangle r = 90^0$, das Licht pflanzt sich somit längs der Trennungsfläche fort, und man kann diesen Fall mit den Worten streifende Incidenz bezeichnen. Wird hingegen $v' \sin i > v$, so kann kein Uebergang in das zweite Mittel stattfinden, und es tritt eine totale Reflexion des Strahles ein.

§. 37. **Weg des gebrochenen Lichtes in Platten und Prismen.** Durch die vorhergehenden Untersuchungen ward der Vorgang der Brechung des Lichtes beim Eintritte in ein zweites, bisher als unbegrenzt vorausgesetztes Medium erörtert. Ist hingegen das letztere begrenzt, so wird sich derselbe Vorgang wie beim Eintritt an der Austrittsstelle wiederholen, und nur durch die relative Lage der zweiten Fläche gegen das Loth der ersten eine Veränderung erleiden.

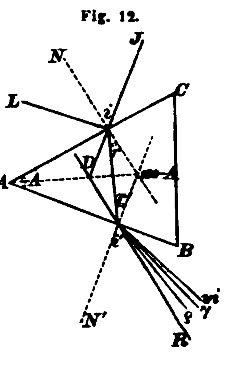
1. Sind Ein- und Austrittsflächen parallel, so wird sich der in Fig. 10 dargestellte Vorgang nur in veränderter Ordnung an der Austrittsstelle wiederholen, wie diess Fig. 11 zeigt. Die Betrachtung letzterer lehrt,

dass während beim Eintritt in der Zeit $\left(\frac{d'd^2}{v}\right)$ der Weg $c'c^2$ zurückgelegt wird, hingegen beim Austritt während der Zeit $\left(\frac{d^3\,d^4}{v'}\right)$ bereits der grössere Weg $c^3c^4 = d'd^2$ gemacht wird, wodurch erhellt, dass der Austrittswinkel $Ac^3N$ dem Incidenzwinkel $i$ gleich ist. Es können somit beim Durchgange durch parallele Platten die Strahlen in einer zur früheren Richtung parallelen Fortpflanzungsrichtung austreten.




2. Der Werth des Austrittswinkels $i'$ weicht hingegen (vergl. Fig. 12) von jenem des Einheitswinkels $i$ ab, wenn die beiden Trennungsebenen nicht parallel, sondern zu einander geneigt sind. In diesem Falle wird dann, wie sich aus der Zeichnung leicht ergibt, die Werthe von $d^3d^4 \gtrless c'c^2$ sein und der austretende Strahl ist dem eintretenden nicht mehr parallel. Der in diesem Falle gebildete Winkel des austretenden Strahles zum einfallenden heisst der Deviationswinkel $D$ und ist mit der Neigung $A$ der beiden Trennungsflächen, sowie mit dem Incidenzwinkel $i$ veränderlich.

Solche Prismen sind fast durchwegs im Gebrauche, um mittelst derselben den Brechungsexponenten zu bestimmen. Die hierfür zu messenden Grössen (Fig. 12) sind der Winkel des Prisma $A$, dann der Incidenzwinkel $i$ und der Winkel $D$ des austretenden Strahls zum eintretenden. Es lassen sich diese Winkel, wie Kap. 14 erörtert werden wird, auf die einfachste Weise dadurch bestimmen, dass man das Prisma in den Mittelpunkt eines fixen getheilten Kreises stellt, an welchem ein Fernrohr frei verschiebbar ist, und welches daher durch drei Stellungen. 1. parallel dem einfallenden Strahle, 2. parallel dem Reflex des einfallenden Strahles, 3. parallel dem austretenden Strahle, aus 1, 2 den Winkel $i$, aus 1, 3 den Winkel $D$ ableiten lässt. Der Winkel $A$ wird nach krystallographischen Methoden bestimmt.




Diese 3 leicht messbaren Stücke genügen, um aus ihnen $\mu$ abzuleiten, da $\sphericalangle\, rr'\; ii'$ mit denselben in den einfachen Relationen stehen

$$r + r' = 180 - (180 - A) = A$$

$$(66) \qquad 360 - (i + i') = 180 - A + 180 - D; \quad i + i' = A + D$$

Nun ist aber, wie leicht erhellt

$$\frac{\sin i + \sin i'}{\sin r + \sin r'} = \frac{\sin i - \sin i'}{\sin r - \sin r'} = \mu \tag{67}$$

Löst man die Summen der Sinusse und Cosinusse in die Producte der halben Winkel auf, so folgt durch die Substitution von $A$ und $D$

$$\frac{\sin\frac{A+D}{2}\cos\left(i - \frac{A+D}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\cos\left(r - \frac{A}{2}\right)} = \frac{\cos\frac{A+D}{2}\sin\left(i - \frac{A+D}{2}\right)}{\cos\frac{A}{2}\sin\left(r - \frac{A}{2}\right)} = \mu \tag{67a}$$

Daraus berechnet sich der Winkel $r$ mittelst

$$\text{tang}\left(r - \frac{A}{2}\right) = \text{tang}\frac{A}{2}\ \text{cotang}\ \frac{A+D}{2}\ \text{tang}\left(i - \frac{A+D}{2}\right) \qquad \mu = \frac{\sin i}{\sin r} \tag{68}$$

Aus dieser Ableitung des Brechungsexponenten ersieht man aber auch, dass für eine bestimmte Lage des einfallenden und gebrochenen Strahles eine Vereinfachung der Formel möglich ist.

Für den Fall nämlich, dass $2i = A + D$, also $i = i'$, folgt aus der Gleichung 68, dass $2r = A$ oder $r = r'$ ist. Letzteres besagt, dass die durchgehende Welle gleiche Neigung gegen die Normalen beider Prismenflächen hat, und für diesen Fall kann man statt der obigen Gleichung direct anwenden

$$\mu = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin\frac{A+D}{2}}{\sin A} \tag{69}$$

Dieser Fall ist gleichzeitig dadurch ausgezeichnet, dass hierfür $D$ den kleinstmöglichsten Werth — das Minimum der Deviation — erreicht. Letzteres lässt sich beweisen, denn da $D = A - (i + i')$ und beim Durchgange durch nahe parallele Platten eines dichteren Mediums der austretende Strahl nahe parallel (lim. $i' = i$) dem einfallenden sein wird, so lässt sich leicht ersehen, dass der Fall $i' = i$ den Maximalwerth von $i'$ und daher das Minimum von $D$ bezeichnet.

Beim Minimum der Deviation geht, wie bereits erwähnt, die Welle gleichgeneigt gegen die Normalen der Prismenflächen durch das Mittel. Hieraus folgt, dass im Dreiecke $[rr'(180 - A)]$ auch die den Winkeln $rr'$ gegenüberliegenden Seiten gleich, und wenn man von $\sphericalangle\ (180 - A)$ eine

Normale auf $rr'$ zieht, dass auch die dadurch entstehenden neuen Dreiecke congruent sind. Hierdurch ist der Beweis geliefert, dass diese letztgezogene Normale den Winkel 180 — $A$ halbirt, oder mit anderen Worten, der im Minimum der Deviation gebrochene Strahl steht senkrecht auf der Halbirungslinie der Prismenwinkel. Ein für die späteren Untersuchungen der Polarisation wichtiger Satz.

§. 38. Dispersion. Mit der Theorie der prismatischen Brechung ist aber zugleich die Lehre der von Newton entdeckten Dispersion verknüpft. In dem früheren Paragraphe war mehrmals erwähnt, dass der Brechungswinkel $r$ in Folge der Construction von dem Verhältnisse der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im einfallenden und gebrochenen Strahle abhängt. Ist im einfallenden Strahle bereits Licht vorhanden von verschiedener Art und Geschwindigkeit $v$, so wird dasselbe im zweiten Medium nicht mehr in einem Strahle von bestimmtem $\sphericalangle r$ sich fortpflanzen, sondern letzterer wird proportional den Variationen von $v$ auch geringe Variationen erleiden, und es wird nicht mehr ein einfacher Strahl, sondern ein fächerartiges Strahlenbüschel sich fortpflanzen. Ist aber die Austrittsfläche des zweiten Mediums der Eintrittsfläche parallel, so werden sich — in Folge der wiederholten Brechung — diese mehrere Strahlen wieder in Einen vereinen, der dem eintretenden parallel wird, und in welchem die verschiedenen Werthe von $v$ vermischt und nicht weiter zu trennen sind. Wäre hingegen die Austrittsfläche geneigt zur Eintrittsfläche, so kann ein Wiedervereinen der Strahlen nicht eintreten, und dieselben werden mit verschiedenen, aber messbaren Deviationswinkeln $D$ auf dem Prisma austreten. Genau derselbe Fall, nur mit anderen Zahlenwerthen, muss eintreten, wenn das zweite Medium nicht alle Vibrationen mit gleicher Schnelligkeit fortzupflanzen fähig wäre.

Geht man nach diesen Erörterungen zum Experiment über, lässt auf ein Prisma einen homogenen Strahl von geringem Durchmesser — um etwaige Interferenzen abzuhalten — fallen, so wird nach dem Durchgange durch diess dichtere Mittel ein Bündel von verschieden gefärbten Strahlen austreten. Diese Erscheinung wird Dispersion, das Bild des dispergirten Strahls, Spectrum genannt. Die Beobachtung lehrt weiter, dass die Deviationswinkel für die Strahlen in der Reihenfolge der Farben roth, gelb, grün, blau, violett zunehmen, so dass also nachfolgende, aus dem früheren leicht erkennbare Relationen bestehen.

$$D_\rho < D_v \qquad \mu_\rho < \mu_v \qquad v'_\rho > v'_v \tag{70}$$

und da man weiters die Oscillationsdauer, durch welche die Farbe bestimmt gedacht wird, als eine durch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

nicht veränderbare Grösse annehmen muss, so folgt aus $\lambda' = v'\tau'$ auch $\lambda'_\rho > \lambda'_v$, wie wir bereits durch Zahlen im vorigen Paragraphe gefunden haben. Aus der eben erwähnten Constanz der Oscillationsdauer (obgleich diese nicht für alle Farben gleich ist, §. 37) folgt dann weiter, dass

$$\lambda:\lambda' = v:v' \text{ oder } \lambda' = \frac{\lambda}{\mu} \tag{71}$$

wodurch sich der Werth der Wellenlänge für jedes Mittel aus denjenigen, welche §. 37 für Luft gefunden, ableiten lassen.

Durch diese Sätze ist der qualitative Zusammenhang zwischen den optischen Werthen in zwei Mitteln genügend erörtert; um aber den quantitativen Werth der Dispersion zu kennen, erübrigt vorerst, für jedes Mittel directe Beobachtungen anzustellen.

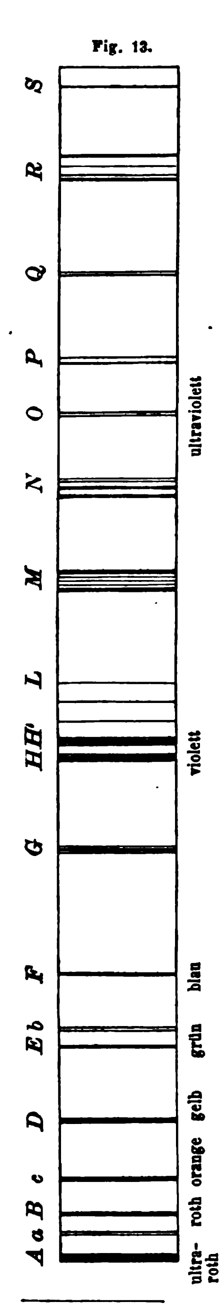
Seit der durch Newton erfolgten Entdeckung der Dispersion hat man solche Versuche an zahlreichen Körpern angestellt, und man pflegte unabhängig von dem Zustande des Mittels die Länge des Spectrums $\mu_v - \mu_\rho$ als zerstreuende Kraft anzugeben. Eine Angabe, die ziemlich ausser allen Beziehungen zu dem übrigen Verhältnisse steht.

In diesen Zeiten war es auch schwer, für die Dispersion bestimmte, durch Zahlen zu beweisende Gesetze aufzustellen, da man sich nur allgemein an die Farben halten konnte, daher eine geringere Genauigkeit in Bestimmung einer untersuchten Spectrumsstelle und deren Deviationen oder $\mu$ erzielen vermochte. Es ward daher die Entdeckung dunkler Linien im Spectrum, die als Signalpunkte verwendbar wären, für die Optik von Bedeutung. Wollaston hat (Philos. Transact 1802) die Intermittenz des Farbenbildes gefunden. Fraunhofer[1]) kam 1810—1824 auf diesen Gegenstand zurück; er beobachtete die austretenden gebrochenen Strahlen mit einem Fernrohre, fand eine grössere Anzahl von dunklen Streifen in den verschiedenen Farben des Spectrums, bestimmte deren Lage und Wellenlänge sowie ihren Charakter als constante Linien und erkannte dadurch ihre Brauchbarkeit als Fixpunkte der optischen Messung. In Folge seiner genauen Untersuchungen gewannen diese Linien an Bedeutung und werden in der Wissenschaft als Fraunhofer'sche Linien bezeichnet.

Für gewöhnliche Grade der Absorption des brechenden Mittels sieht man das Spectrum von roth bis violett. Doch dehnt sich dasselbe sowohl ausserhalb roth und ausserhalb violett noch aus, obgleich in

[1]) Fraunhofer. München. Acad. Denksch. 1814—1815 und in Schumacher's astronomischen Nachrichten 1823

Fig. 13.




beiden Fällen die durch diese extrarothen oder extravioletten Strahlen hervorgebrachte Lichtwirkung für gewöhnlich beinahe verschwindend ist. Die ultrarothen Strahlen zeichnen sich hingegen durch ihre thermischen, die ultravioletten durch ihre chemischen Wirkungen aus.

Durch Anwendung eines Quarzprisma gelingt es auch, wenigstens theilweise die ultravioletten Strahlen sichtbar zu machen, und selbst auf dieser matten, verschwommenen, lavendelgrauen Partie des Spectrums lassen sich noch dunkle, fix bleibende Linien erkennen. Wir erhalten somit eine Reihe von fixen Linien, *A*... *S* welche, wie die Figur zeigt, ziemlich stark hervortreten und zur Messung leicht anwendbar sind.

Wendet man jedoch noch bedeutende Vergrösserung des Spectrums an, welche man dadurch erlangen kann, dass man den einfach gebrochenen Strahl noch weiters durch mehrere Prismen gehen und dispergiren lässt, so wird man nebst diesen wenigen dunklen Linien noch eine grosse Anzahl von feinen, dunklen Streifen im Spectrum gewahr. Kirchhoff hat eine bedeutende Menge derselben bestimmt[1]), welche sich über den ganzen Raum des Spectrums ausdehnen.

Da diese dunklen Streifen constante Stellen im Spectrum bezeichnen, so waren nebst Fraunhofer mehrere Gelehrte thätig, die Werthe der für sie geltenden Wellenlängen durch Versuche abzuleiten[2]).

Die Werthe sind in Millionstel der Millimeter für

| | | | |
|---|---|---|---|
| *A* | 0·000739 | *H'* | 0·000394.05 |
| *B* | 0·000688.33 | *L* | 0·0003791 |
| *C* | 0·000657.11 | *M* | 0·0003657 |
| *D* | 0·000590.21 | *N* | 0·0003498 |
| *E* | 0·000527.83 | *O* | 0·000336 |
| *F* | 0·000486.37 | *P* | 0 000329 |
| *G* | 0·000431.70 | *Q* | 0·000323 |
| *H* | 0·000397.42 | *R* | 0·000309 |

[1]) Kirchhoff. Abh. d. Berliner Acad. 1862—1863.

[2]) Esselbach. Pogg. Ann. 98, pag. 513. Angström. Oefversigt. Vet. Acad. 1863. Pogg Ann. 123, p. 489. Mascart. Compt. rendu. 1864, p. 1111. Ditscheiner. Wien. Acad. Sitzb. 1864, vol. L.

**§. 39. Dispersionsformel.** Die genaue Kenntniss der Wellenlängen ermöglicht auch die Gesetze der Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes von der Oscillationsdauer zu erkennen.

Bevor noch die Undulationstheorie sich dieses Gegenstandes bemächtigte, hatte bereits Rudberg (Pogg. Ann. vol. 9, pag. 481) eine empirische Formel für die Zunahme des Brechungsexponenten mit gleichzeitiger Abnahme der Wellenlänge aufzustellen versucht.

Genauer und schon auf die Grundsätze der Undulationstheorie gegründet ist die von Baden-Powell[1]) aufgestellte Dispersionsformel

$$\frac{1}{\mu} = h\left(\frac{\sin\frac{\pi r n}{\lambda}}{\frac{\pi r n}{\lambda}}\right) = h\left(1 - \frac{\pi^2 r^2 n^2}{2.3\lambda^2}\right) \tag{72}$$

Nahe zu gleicher Zeit wie Baden-Powell hatte jedoch auch Cauchy[2]) seine ausgedehnten Untersuchungen über die Dispersion des Lichtes vollendet und gelangte durch dieselben zu der bereits im vorigen Kapitel aufgestellten Gleichung

$$v^2 = a_1 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^4 \tag{73}$$

Durch Umkehrung der Reihen verwandelte Cauchy diese Formel in nachfolgende, für den Brechungsexponenten geltende Gleichung

$$\mu^2 = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,\frac{(2\pi v)^2}{\lambda^2} + \mathfrak{C}\,\frac{(2\pi v)^4}{\lambda^4} \tag{74}$$

woraus die einfachere, für die erste Potenz geltende, gewöhnlich Cauchy'sche Formel genannte — Relation abgeleitet ist

$$\mu = A + \frac{B}{\lambda^2} \tag{75}$$

Behufs der Vergleichung der Erscheinungen der Dispersion mit der Molekulartheorie des Lichtes (siehe später) kann aber noch eine weitere Formel auf einfacherem Wege abgeleitet werden[3]).

Gliedert man in obige Formel für $v^2$ die Constante $a_1$ in zwei Functionen, deren eine $a_1$ die Abhängigkeit von chemischen Eigenschaften, deren zweite hingegen eine Function $\mathfrak{R}$ der materiellen Eigenschaften, z. B. Dichte wäre, so kann geschrieben werden

$$v = a_1 + \mathfrak{R} + \frac{a_2}{\lambda^2} \tag{73a}$$

---

[1]) Baden-Powell. Philos. Transact. 1835. I. 249. 1836. I. 17, Pogg. Ann. 37. 352, 39, 365.

[2]) Cauchy. Mém. s. la dispersion de la lumière. Publ par Soc. d. Scienc. Prag 1836.

[3]) Vergl. Schrauf. Physik. Studien. Wien 1867. Kap. III. Einfluss der Wellenlänge. Verhältniss der Dispersion.

Wohl haben alle Gase ein Dispersionsvermögen, wie schon Arago (Pogg. Ann. 39, pag. 224) erwähnt, jedoch ist nach allen Bestimmungen dasselbe nur sehr gering. Ketteler (Berl. Ac. Monats. 1865) gibt für Wasserstoffgas bei der Dichte 0·068 (Luft = 1) $\mu$ = 1·000141 — 1·000145 an. Die Dispersion ist somit so gering, dass für Gase selbst das Glied mit $\lambda^2$ annähernd vernachlässigt werden darf.

Nehmen wir jetzt zwei Molekularzustände derselben Substanz an, erstens a) einen gasförmigen Zustand mit limite der Dichte gleich Null, zweitens b) einen festflüssigen Zustand, so wird sein, da $a_1$ bloss von der chemischen, also hier ungeänderten Beschaffenheit abhängt, für

$$\text{a)} \quad v^2 = a$$

$$\text{b)} \quad v_1^2 = a_1 - \Re - \frac{a_2}{\lambda^2}$$

Die negativen Zahlen der letzteren Gleichung entsprechen der Thatsache, dass $v_1 < v$.

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\frac{1}{\mu^2} = \frac{v_1^2}{v^2} = 1 - \frac{\Re}{\alpha_1} - \frac{a^2}{a_1\lambda_2}$$

oder annähernd

$$\mu^2 = 1 + \frac{\Re}{a_1} + \frac{a^2}{a_1\lambda^2} \tag{76}$$

Diese Formel stimmt in ihrer Gliederung mit jener überein, welche später auf Grund der Molekulartheorie gewonnen ward. Durch Vergleich mit letztgenannter ist es auch möglich, die in den Coefficienten auftretenden Functionen näher zu bestimmen.

Hierdurch erlangt die letztgenannte Gleichung für die Kenntniss der Molekularfunctionen eine Bedeutung. Da gleichzeitig in derselben $\Re$ eine Function der Dichte ist, so erhalten wir zugleich hierdurch eine allgemeine Beziehung zwischen Brechungsexponent und Dichte in der Fom

$$\mu^2 - 1 = f(d)\, F(a_2 a_1 \lambda^2) \tag{77}$$

welche bereits in dieser Form hinreichen mag, die Variationen der Fortpflanzung des Lichtes mit den Variationen der Molekularzustände, namentlich in den Krystallen zu verknüpfen.

Schliesslich kann die Methode von Christoffel[1]) erwähnt werden, welche ebenfalls auf der von Cauchy aufgestellten Gleichung

$$s^2 = a_1 K^2 + a_2 K^4 \tag{73b}$$

beruht. Setzt man statt dieser für den leeren Raum geltenden Grösse jene, welche für das Medium gelten $\sigma, K, L, \mu$, wobei $\tau = t', \lambda = \mu L$, so folgt

[1]) Christoffel. Pogg. Ann. vol. 117, pag. 27. vol. 124, pag. 57.

$$a_1\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = a_1\left(\frac{2\pi\mu}{\lambda}\right)^2 + a_2\left(\frac{2\pi\mu}{\lambda}\right)^4$$

Hieraus kann man ableiten

$$\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^4 - 2\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2 = 0$$

$$\mu = \frac{\mu_0\sqrt{2}}{\sqrt{\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)} + \sqrt{\left(1-\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)}} \qquad (78)$$

worin die Constanten $\lambda_0$, $\mu_0$ die Werthe erhalten

$$\mu_0^2 = 2\mu_1^2\mu_2^2 \frac{\frac{\mu_2^2}{\lambda_2^2} - \frac{\mu_1^2}{\lambda_1^2}}{\frac{\mu_2^4}{\lambda_2^2} - \frac{\mu_1^4}{\lambda_1^2}} \qquad \lambda_0^2 = \frac{2\mu_0^2(\mu_2^2 - \mu_1^2)}{\frac{\mu_2^4}{\lambda_2^2} - \frac{\mu_1^4}{\lambda_1^2}}$$

Formeln, deren Anwendbarkeit durch die grössere Complication wohl in etwas beeinträchtigt wird.

Um die Brauchbarkeit der verschiedenen Formeln zu prüfen, kann man die mittelst derselben erlangten Resultate der Rechnung mit den Beobachtungen vergleichen. Wählt man hierzu die Beobachtungen des Werthes $\mu_\omega$ von Calcit (Rudberg Pogg. Ann. 14), so lassen sich aus je zwei Werthen die übrigen Werthe der Brechungsexponenten für die Fraunhofer'schen Linien berechnen. Baden-Powell hat diess (Pogg. Ann. 42, pag. 618), Christoffel (Pogg. Ann. 117) gethan.

| Beob. | Cauchy | Bad.-Pow. | Christ. | Form. (76) |
|---|---|---|---|---|
| $\omega_B$ | 1·65308 | 1·653065 | — | — |
| $\omega_C$ | 1·65452 | — | 1·6547 | 1·6545 |
| $\omega_D$ | 1·65850 | 1·658459 | 1·6584 | 1·6583 |
| $\omega_E$ | 1·66360 | 1·663557 | 1·6638 | 1·6632 |
| $\omega_F$ | 1·66802 | — | — | 1·6677 |
| $\omega_G$ | 1·67617 | 1·676249 | 1·6765 | — |
| $\omega_H$ | 1·68370 | 1·683013 | 1·6834 | 1·6836 |

Die Formeln stimmen wohl alle ziemlich genau mit der Beobachtung überein, doch ist diese Uebereinstimmung noch immer geringer als die Genauigkeit der Beobachtungen selbst. Wohl wäre es möglich, die Genauigkeit der Rechnung durch Anwendung der Methode der kleinsten Quadratsummen zu steigern, doch würde der Gewinn in keinem Verhältnisse zur angewandten Arbeit stehen.

Für die gewöhnlichen Untersuchungen genügen die Gleichungen (75) und (76) und werden auch zumeist angewendet.

Zur Prüfung der Genauigkeit gemessener Werthe von Brechungsexponenten hat sich eine indirecte Methode eingebürgert auf Grund der beiden vorgenannten Methoden.

Bildet man nämlich die Differenzen für die einzelnen Farben, so folgt aus der Cauchy'schen Formel

$$\mu_H - \mu_G : \mu_G - \mu_F \ldots = \frac{1}{\lambda_H^2} - \frac{1}{\lambda_G^2} : \frac{1}{\lambda_G^2} - \frac{1}{\lambda_F^2} \ldots \tag{79}$$

und aus der auch für die Molekulartheorie des Lichtes geltenden Gleichung (76)

$$\mu_H^2 - \mu_G^2 : \mu_G^2 - \mu_F^2 \ldots = \frac{1}{\lambda_H^2} - \frac{1}{\lambda_G^2} : \frac{1}{\lambda_G^2} - \frac{1}{\lambda_F^2} \ldots \tag{80}$$

Aus den gefundenen Zahlen für die Wellenlängen der Fraunhofer'schen Linien berechnet sich aber

| | $\lambda$ mm. | $\lambda^2$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ | $\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| *H'* | 0·000394·05 | 155275 | 644017 | | |
| | | | | 7·94 | 78·47 |
| *H* | 397·42 | 157943 | 633142 | | |
| | | | | 70·53 | |
| *G* | 431·70 | 186365 | 536582 | | |
| | | | | 83·80 | |
| *F* | 486·87 | 237043 | 421864 | | |
| | | | | 45·97 | |
| *E* | 527·83 | 278603 | 358932 | | |
| | | | | 52·49 | |
| *D* | 590·21 | 348350 | 287076 | | |
| | | | | 40·53 | |
| *C* | 657·11 | 431895 | 231594 | | |
| | | | | 15 00 | |
| *B* | 688·33 | 473801 | 211060 | | |

Prüft man nun die obigen Formeln durch Vergleich der Differenzen, so erhält man beispielsweise für die Werthe von Wasser nach den Bestimmungen von Willigen (Pogg. Ann. vol. 122, pag. 191.)

| | $\mu$ | $\mu - \mu$ | $\Delta\mu$ | $\mu^2$ | $\mu^2 - \mu^2$ | $\Delta\mu$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *B* | 1·33048 | | | 1·77017 | | |
| | | 18·0 | 3·0 | | 18·0 | 3·0 |
| *C* | 1·33122 | | | 1·77215 | | |
| | | 45·0 | 4·5 | | 44·8 | 4·3 |
| *D* | 1·33307 | | | 1·77708 | | |
| | | 53·5 | 1·1 | | 53·3 | 0·9 |
| *E* | 1·33527 | | | 1·78294 | | |
| | | 46·9 | 0·9 | | 46·9 | 0·0 |
| *F* | 1·33720 | | | 1·78810 | | |
| | | 83·4 | 0·4 | | 83·5 | 0·3 |
| *G* | 1·34063 | | | 1·79729 | | |
| | | 67·4 | 3·1 | | 70·0 | 0·5 |
| *H* | 1·34350 | | | 1·80499 | | |
| | | $S\Delta$ . | 13·3 | | $S\Delta$ . | 10·0 |

Die Uebereinstimmung sowohl von $\mu - \mu$ als $\mu^2 - \mu^2$ mit $\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}$ ist eine genügende, doch scheint sowohl diese Berechnung als auch vielfache andere für eine grössere Genauigkeit der obigen Formel (76) $\mu^2 = 1 + \mathfrak{R} + a_1^{-1} a_2 \lambda^{-2}$ zu sprechen.

**§. 39. Die Vertheilung der Strahlen verschiedener Brechbarkeit im Spectrum. Licht und Wärme.** Man kann diese letztere Formel (80) fernerhin dazu benützen, um über die graphische Ausdehnung der Wellenlängen auf dem Spectrum sich zu orientiren.

Da wir bereits die ultravioletten Wellenlängen für eine grosse Erstreckung des Spectrums kennen, so ist es vorerst nur nöthig, durch die obige Gleichung (80) zur Kenntniss der ultrarothen Wellenlängen zu gelangen.

Nimmt man die obigen Messungen von Calcit $\mu_\omega$ zu Hilfe und setzt weiters noch mehrere Zahlenwerthe im ausserroth an und rechnet die für sie geltende Deviation, so erhält man

| | | $\mu^2$ | $\mu^2 - \mu^2$ | $D^0$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mu C$ | 1·65452 | 2·73744 | | 50° 47′ 45″ |
| | | | 14·400 | |
| $\mu B$ | 1·65308 | 2·73267 | | 50 39 5 |
| | | | 30·702 | |
| $\mu A$ | 1·65000 | 2·72250 | | 50 20 35 |
| | | | 99·320 | |
| $\mu \varrho$ | 1·64000 | 2·68960 | | 49 21 25 |
| | | | 20·045 | |
| $\mu' \varrho$ | 1·63800 | 2·68304 | | 49 13 |
| | | | 3·345 | |
| $\mu'' \varrho$ | 1·63794 | 2·68285 | | 49 10 |

Durch den Vergleich dieser Werthe von $\mu^2 - \mu^2$ mit jenen von $\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}$, wobei die Differenz $\mu_C - \mu_B$ als bekannt vorausgesetzt ist, kann man die Werthe jener Wellenlängen berechnen, die für die Strahlen $\mu\varrho$ $\mu'\varrho$ $\mu''\varrho$ gelten müssen.

| | $\mu^2 - \mu^2$ | $\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ | $\lambda$ | $\lambda^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $C$ | | | 231594 | 657 | 4318 |
| | 14·400 | 20·534 | | | |
| $B$ | | | 211060 | 688 | 4738 |
| | 30·702 | 42·049 | | | |
| $A$ | | | 169011 | 769 | 5917 |
| | 99·320 | 136·030 | | | |
| $\mu\varrho$ | | | 32981 | 1741 | 3·0391 |
| | 20·045 | 27·454 | | | |
| $\mu'\varrho$ | | | 5527 | 4253 | 18·0930 |
| | 3 245 | 4·594 | | | |
| $\mu''\varrho$ | | | 936 | 10325 | 106·6100 |

Wir erhalten somit durch diese Erörterung die Werthe der ultrarothen Wellenlängen, ersehen aber zugleich, dass dieselbe für $\mu = 1·636 - 1·637$ bereits unendlich gross würden, und für $\mu$ kleiner als 1·636 würde aus dem Gange der Rechnung ein negativer Werth von $\frac{1}{\lambda^2}$ folgen, $\lambda$ selbst würde imaginär.

Man erkennt hieraus, dass die Wellenlängen in ultraroth sehr rasch bis zum Unendlichen wachsen und ihren grössten Werth in jenem Raume des Spectrums erhalten, der einer Ablenkung $\mu^2 = 1 + \mathfrak{R}$

entspräche, ein Punkt, der somit den wahren Endpunkt des Spectrums und die kleinstmögliche Brechung, welche der Substanz eigen, darstellt.

Nach dem Erwähnten ist es nun auch möglich den Gang der Wellenlänge und die Ausdehnung des Spectrums näher zu präcisiren.

Trägt man die gemessenen Deviationen der farbigen Strahlen — mit Grad oder Minute des Brechungswinkels als Einheit — auf die positive horizontale Axe $X$ auf und die denselben Winkeln entsprechenden $\lambda^2$ als Coordinaten parallel $Y$, so wird sich ein ultravioletter und ein ultrarother Ast bilden, denen sich — dem ersteren $X$, dem zweiten $Y$ — die beiden Axen als Assymptoten anschliessen. Der Punkt, in welchem die Assymptote $Y$ auf $X$ senkrecht steht, bedeutet den Endpunkt des positiven Spectrums, das kleinstmöglichste Minimum der Deviation.

Für postulirte Deviationen, kleiner als diess eben genannte Minimum, wären die Werthe von $\lambda^2$ negativ, und trägt man auch diese $\lambda^2$ wieder auf, so würden sich zwei mit den früheren congruente negative Aeste bilden. Der Mittelpunkt wird somit der Mittelpunkt der Axen der Curve sein, welche, obgleich höheren Grades, doch als einer Hyperbel analog betrachtet werden kann, deren Hauptaxe einen Winkel von 45° mit der positiven $X$ macht, und deren positiver Theil im Quadranten $+X+Y$, deren imaginärer im Quadranten $-X-Y$ liegt.

Die Assymptoten machen mit der Hauptaxe einen Winkel von 45°, daher die Curve analog der gleichseitigen Hyperbel sein muss. Werden die Coordinaten als Assymptoten betrachtet, so fällt die Coordinate des positiven Scheitelpunktes der krummen Linien in der Scala nahe an Fraunhofer's $A$, so dass den absteigenden Ast alle Wellenlängen darstellen, die von Roth bis ins Ultraviolett laufen, während der aufsteigende Ast nur die ultrarothen Strahlen und deren Wellenlänge in sich fasst.

Wir werden an einer späteren Stelle sehen, dass die ultrarothen Strahlen jene sind, welche allgemein als Wärmestrahlen bezeichnet werden. Es stellt somit der absteigende Ast der Wellenlängen Licht, der aufsteigende Ast Wärme dar.

§. 40. Entstehung der Fraunhofer'schen Linien. Haben wir im vorigen Paragraphe die Wellenlängen des Lichtes bestimmt und gesehen, dass dieselben gleichsam eine fortlaufende Reihe bilden, so ist wohl die Frage nahe liegend, wodurch es möglich gemacht wird, dass einigen Wellenlängen und gewissen Theilen des Spectrums nicht Licht, sondern Dunkelheit entspricht.

Steigert man nämlich die Zerlegung des Lichtes noch weiter, indem man den durch ein Prisma gebrochenen Strahl noch successive durch ein zweites, drittes, viertes Prisma dispergiren lässt, so vermehrt sich die Anzahl jener dunklen Stellen im Spectrum bedeutend, und wir erkennen

dann, dass die sogenannten Fraunhofer'schen Linien nur mehr durch ihre Intensität hervorragen und daher auch zuerst entdeckt werden konnten.

Um nun diesen Mangel an Licht an gewissen Stellen des Spectrums zu erklären, nahm man zuerst an, dass das farbige Licht aus einer Uebereinanderschichtung farbiger Bestandtheile bestehe, so dass, wo dieselben sich nicht vollständig decken, ein Mangel an Intensität ist und daher dunkle Streifen auftreten.

Man verliess jedoch diese Hypothese, sobald Brewster 1830 (Pogg. Ann. 28) die Entdeckung gemacht hatte, dass, wenn man homogenes Licht durch salpetrigsaures Gas leitet, eine Reihe von dunklen Streifen auftritt. Analog derselben Substanz üben nämlich auch viele andere gasförmige oder flüssige Medien eine Absorption auf das Licht aus, so dass gewisse Partien verdunkelt werden.

Nun hat aber bereits Euler (vergl. Angström Pogg. Ann. vol. 94 und 117), darauf aufmerksam gemacht, dass zwischen Absorption und Emission des Lichtes ein Causalnexus sein und jeder Körper einen ihm eigenthümlichen Schwingungszustand haben müsse. Auch hat Miller (vergl. Kirchhoff Pogg. 118) die Idee gehabt, dass die Absorptionslinien dem Stoffe eigenthümlich seien.

Weiter geht noch Angström[1]), welcher bereits auf die von Euler angegebenen Verhältnisse zwischen Absorption und Emission zurückgreift und die Umkehrung der hellen Linien des elektrischen Lichtes und dunklen des Sonnenspectrums voraussetzt.

Ist nun auch durch diese Forschungen bereits klar geworden, dass die dunklen Spectrallinien Functionen der Materie sind, so ward doch erst durch Kirchhoff[2]) die Entstehung der dunklen Linien theoretisch und praktisch erwiesen. Er fand, dass für jede Gattung von Licht- und Wärmestrahlen das Verhältniss zwischen Emissions- und Absorptionsvermögen für alle Körper bei derselben Temperatur der gleiche sei. Wendet man diesen Satz auf die Lichterscheinungen an, so sieht man, dass ein glühender Körper, welcher Wellen von bestimmter Brechbarkeit aussendet, hingegen die Wellen derselben Farbe absorbiren muss, wenn sie von einer anderen Lichtquelle kommend, durch ihn sich fortpflanzen sollen. Ist die Intensität der letzteren Lichtquelle bedeutend grösser als die der ersteren, so wird der erste Körper mehr fremdes Licht absorbiren als eigenes aussenden und dadurch einen dunklen Streifen erzeugen.

Nach diesen Grundzügen ist eine Erklärung der Entstehung der Fraunhofer'schen Linien möglich. Eine grössere Anzahl von Linien, namentlich im rothen Theile zwischen $A$ und $B$, ist terrestrischen Ur-

[1]) Angström. Pogg. Ann. 94, pag. 141, vol. 118, pag. 94.

[2]) Kirchhoff. Berlin. Acad. Denkschr. 1861, 1863. Pogg. Ann. vol. 118, pag. 94. vol. 109, pag 275. vol. 110, pag. 160.

sprunges und entsteht durch Absorption in der Erdatmosphäre, denn die Beobachtungen lehren, dass dieselben mit dem Zustande unserer Erdatmosphäre variiren. Der überbleibende Antheil muss in den Verhältnissen auf die Sonne ihren Ursprung haben, und lässt sich erklären, entstanden durch die Absorption, welche die glühende Sonnenatmosphäre auf die von dem leuchtenden Inneren der Sonne ausgesandten Strahlen ausübt[1]).

§. 41. Spectralanalyse. In dem vorhergehenden Paragraphe ward bereits hervorgehoben, dass jedem Stoffe das Emissionsvermögen bestimmten farbigen Lichtes zukomme. Es liegt daher auch nahe, den Rückschluss von letzterem auf die erzeugende Substanz zu machen und somit die hellen Streifen im durch das Prisma zerlegten Lichte irgend einer Lichtquelle als Anzeichen zu benützen von der Gegenwart der die Streifen emittirenden Stoffe in der Flamme.

Auf diese Grundsätze hat sich in neuerer Zeit ein vollständiges System der Spectralanalyse aufgebaut, welches hier zu erörtern wohl kaum der Platz wäre. Erwähnt muss jedoch werden, dass diese Spectralanalyse doch in ihrer Wesenheit mit der alten Methode der Mineralogen verwandt ist, welche aus der Färbung der Löthrohrflamme auf die in der Flamme befindliche Substanz schlossen.

Die Erfindung des Löthrohrs reicht wohl bis 1738 zurück, wo der Schwede Anton v. Swab dasselbe benützte. Cronstedt und Bergmann verbesserten die ursprüngliche Einrichtung, Berzelius und Plattner erweiterten die Anwendung desselben zur vollständigen Wissenschaft, und das Werk der letztgenannten wird auf lange hin für die Mineralogen von Wichtigkeit sein.

Bekanntlich besteht jede Flamme aus einem inneren gelben Kegel, wo die eigentliche Verbrennung stattfindet und daher die grösste Hitze ist, und zweitens aus einer äusseren blauen Flammenhülle, wo die Oxydation des Brennmaterials durch die umgebende Luft geschieht.

Der innere gelbe Flammenkegel wird nur zur Reduction benützt, die äussere blaue Flammenhülle — Oxydationsflamme genannt — wird angewendet, um an ihr die charakteristischen Färbungen, hervorgebracht durch die in ihr zum Glühen gebrachten Substanzen, zu erkennen. Bekanntlich färben die Oxydationsflammen

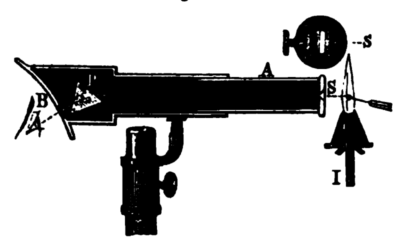
roth — Strontium, Lithium,
gelb — Natrium,
grün — Kupfer, Phosphor, Bor, Baryum,
blau — Arsen, Antimon, Chlor,
violett — Kali,

[1]) Alle Fixsternspectren zeigen die Linien des Na, Mg, Fe. Vergleiche die Untersuchungen von A. Secchi und W. Huggins 1863 . . . 1865, namentlich die Zusammenstellung der Resultate Secchi's in N. Archiv sc. natur. XXIII. 145.

während die Indicationen von zahlreichen anderen Stoffen weniger hervortreten, und mehr dem Charakter einer Mischfarbe entsprechen.

Für diese Vorgänge in der Löthrohrflamme gibt die Spectralanalyse die vollständige Erklärung, indem sie lehrt, dass nur solche Strahlen von den untersuchten, in der Flamme glühend und leuchtend gewordenen Körpern ausgesendet werden, deren Summe mit der Färbung der Oxydationsflamme übereinstimmt.

Fig. 14.




Da die Spectralanalysen zurückgeführt werden können auf die Messung der Deviation der farbigen Streifen — analog dem Brechungsexponenten — so ist selbst das einfache Spectroscop (Fig. 14), verglichen mit dem Löthrohr, das exacte Hilfsmittel der Forschung, und wahrlich, hierdurch gelang es auch bereits, durch Auffindung bisher unbekannter Spectrallinien die Existenz neuer Grundstoffe vorherzusagen und so zu entdecken.

Wohl sind durch die Untersuchungen von Plücker (Pogg. Ann. 90—117), ferner von Mitscherlich (Pogg. Ann. 121, pag. 459) und Huggins (Pogg. Ann. 124, pag. 275, 621) die Spectra fast aller Grundstoffe erforscht, doch ermöglichen meist nur die Metalle eine genauere Bestimmung, indem nur diese helle, scharf begrenzte Linien darbieten, während im Spectrum von S, P, J, Ch, Br und anderen Grundstoffen sich verschwommene Partien und lichte Streifen zeigen.

Jene Stoffe, welche chemisch möglichst einfach sind, zeigen die geringste Anzahl von Streifen, wie Ka, Na, Li, während alle jene Grundstoffe, von denen man vermuthet, dass sie möglicherweise mit noch unbekannten Elementen verbunden sind, zahlreiche Streifen aufweisen.

Es drängt sich nämlich der Gedanke auf, dass jeder Stoff nur Strahlen einer bestimmten Wellenlänge oder die mit derselben in einfachem Verhältnisse oder Function abhängigen Strahlen aussenden werde, welches Emissionsvermögen durch die Molekularconstitution bedingt sein müsse. Stoffe, welche nicht diesem Gesetze der Einfachheit genügen, werden vielleicht in Zukunft als chemische Verbindungen sich erweisen. Die bisherigen Erfahrungen sprechen hierfür.

# VIII. Kapitel.

## Doppelbrechung, Polarisation durch Brechung und Reflexion.

§. 43. Im vorhergehenden Kapitel wurde der Durchgang eines Lichtstrahls durch ein Prisma eines isophanen Körpers verfolgt und angegeben, dass er eine Ablenkung seiner Richtung, verbunden mit einer Zerstreuung der einzelnen Farben, erleidet. Im Gegensatze zu diesen isophanen Körpern ist bei den Krystallen — mit Ausnahme jener des tessularen Systems — die prismatische Zerlegung des Lichtes eine weit complicirtere. Der durch ein aus einem Krystalle geschnittenes Prisma gegangene Lichtstrahl erscheint nämlich bei dem Austritt aus demselben nicht als ein dispergirter Lichtstrahl, sondern vielmehr als 2 Lichtstrahlen, welche mehr oder minder deutlich — variabel mit der Substanz und Orientirung des Prisma — von einander getrennt erscheinen, wo jedoch beide den bekannten Gesetzen der Brechung und Dispersion gehorchen. Man pflegt diese Erscheinung mit dem Namen Doppelbrechung zu belegen, und die Krystalle, welche dieselbe zeigen, werden anisophan genannt.

Fig. 15.

Huyghens entdeckte 1676 am Kalkspathe diese Doppelbrechung und erkannte schon damals mit grosser Genauigkeit die hierfür geltenden Gesetze. Seither hat man vielfältige Versuche mit Krystallen gemacht und gefunden, dass mit Ausnahme der tesseral krystallisirenden Körper alle übrigen Krystalle Doppelbrechung besitzen.

Vergleichen wir mit dieser Thatsache die morphologischen Eigenschaften der entsprechenden Krystallsysteme, so erkennen wir, dass die Doppelbrechung eine Folge der axial ungleichen Krystallstructur der Körper sein müsse.

Dass letzteres der Fall sei, erkennt man auch durch directe Versuche, indem es möglich ist, die Phänomene der Doppelbrechung auch an isophanen Körpern zu erzeugen, wenn man durch äussere Einwirkungen (vergl. Kap. XVII) die Homogenität ihres atomistischen Gefüges stört und hierdurch erzielt, dass der durchgehende Lichtstrahl nach den Seiten verschieden gelagerte Moleküle vorfindet.

Will man die Verhältnisse der Doppelbrechung an einem Krystalle studiren, wird es nöthig, die Versuche mit den morphologischen Eigenschaften in Einklang zu bringen. Da nun bekanntlich der Krystall nach den drei Dimensionen des Raumes verschiedene Ausbildung zeigt, so sind auch aus dem Krystalle drei Prismen herzustellen, welchen diese drei axialen Dimensionen parallel laufen und somit in jedem Falle die specielle Einwirkung der Molekularlagerung darstellen.

Schneidet man sich aus einem Krystalle, z. B. Arragonit, Topas 3 Prismen, welche vollständig symmetrisch gegen die Krystallaxen geneigt sind, so werden die brechenden Kanten, ebenso auch die Halbirungslinien der brechenden Winkel je einer Krystallaxe parallel laufen müssen, während die Prismenflächen gleich geneigt gegen die Krystallaxen sind. Bekanntlich geht beim Minimum der Deviation jeder Lichtstrahl senkrecht zur Halbirungslinie des brechenden Winkels durch das Prisma, und wird daher in diesem unseren Falle in jedem der drei Prismen senkrecht gegen zwei Krystallaxen (die Prismenkante und die Halbirungslinie), und daher parallel der dritten Krystallaxen durch dasselbe gehen.

Bestimmt man die Brechungsexponenten der gebrochenen Strahlen, so erhält man, wenn parallel der Krystallaxe $b$ der Strahl das erste Prisma durchläuft, die Werthe von $\mu_a$, $\mu'_c$ — parallel $a$ im zweiten Prisma von $\mu_c$, $\mu'_b$ — parallel $c$ im dritten Prisma $\mu_b$, $\mu'_a$. Theoretisch ist wohl kein Grund vorhanden, welcher gegen die mögliche Verschiedenheit aller dieser 6 Exponenten spräche, doch hat Fresnel's Beobachtung zuerst gelehrt, dass bei obiger Anordnung der Prismen die Werthe von $\mu_a$, $\mu_b$, $\mu_c$ denjenigen von $\mu'_a$, $\mu'_b$, $\mu'_c$ gleich sind, so dass wir statt 6 Brechungsexponenten nur 3 wahrhaft verschiedene Werthe derselben zu unterscheiden vermögen. Es folgt hieraus vor Allem, dass, gleichwie die morphologische Ausbildung nach drei Dimensionen verschieden ist, auch die Fortpflanzung des Lichtes auf 3 Hauptwerthe, $\mu_a$, $\mu_b$, $\mu_c$ zurückgeführt werden kann.

Wendet man Substanzen verschiedener Krystallformen an, so erkennt man ferner, dass auch die Werthe von $\mu_a$, $\mu_b$, $\mu_c$ mit denselben wechseln. In den prismatischen Systemen ist $\mu_a \gtrless \mu_b \gtrless \mu_c$, in jenen Systemen, wo die Werthe der Axen $a$, $b$, $c$ bereits ein constantes Ver-

hältniss annehmen, tritt auch die Gleichheit der Brechungsexponenten ein. Im hexagonalen und pyramidalen Systeme, wo $\sqrt{3} : 1 : c$ oder $1 : 1 : c$, wird auch $\mu_a = \mu_b \gtrless \mu_c$, im tesseralen Systeme hingegen, wo die Axen gleich sind, sind auch die Brechungsexponenten $\mu_a = \mu_b = \mu_c$, und diese Krystalle sind den isotropen Körpern analog.

Im Allgemeinen erkennt man schon die Nothwendigkeit der nach den drei Dimensionen verschiedenen Brechungsexponenten aus den bisher erkannten Grundsätzen. In früheren Kapiteln ward nachgewiesen, dass Cohäsion, Elasticität und Dichte nach den drei Dimensionen variiren, zweitens ist nach Gleichung (76) $\mu$ eine Function der Dichte. Mit diesen Grundsätzen stimmen die optischen Beobachtungen.

In welcher Beziehung diese Hauptwerthe zu den Richtungen im Krystalle stehen, lässt sich durch einen weiteren Versuch mit drei Prismen erkennen. Aendert man nämlich durch Schleifen die Lage jener Prismenfläche gegen die Krystallaxen insoweit, dass wohl noch die Kante, aber nicht mehr die Halbirungslinie des brechenden Winkels mit einer Krystallaxe zusammenfällt, so werden bei erneuerter Messung der Brechungsexponenten successive die Werthe $\mu_a$, $\mu''_c$, — $\mu_c$, $\mu''_b$ — $\mu_b$, $\mu''_a$ erhalten, wo $\mu''_a$, $\mu''_b$, $\mu''_c$ von den obigen $\mu'_a$, $\mu'_b$, $\mu'_c$ und auch von $\mu_a$, $\mu_b$, $\mu_c$ verschieden sind.

Man ersieht hieraus, dass die Quantität der Lichtfortpflanzung auf das innigste von der Richtung des Strahles im Krystalle, hier im gegebenen Falle von der Lage der Kante und der Halbirungslinie des Prismenwinkels abhängt. Jede Variation der letztgenannten Richtung brachte eine Variation der Werthe für die halbe Anzahl der gebrochenen Strahlen hervor, während das Constantbleiben der ersteren Richtung auch die Constanz der ersteren drei Brechungsexponenten bewirkte. Es folgt hieraus als logische Folge, dass man die constant gebliebenen Brechungsexponenten als Functionen der constanten Richtungen auffassen muss, und dass somit analog der morphologischen Ausbildung auch für die optischen Eigenschaften nach den drei Dimensionen verschiedene Brechungsexponenten die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes anzunehmen sind. Die Krystalle heissen daher mit vollem Rechte a n i s o p h a n.

§. 44. B e s t i m m u n g   d e r   S c h w i n g u n g s-   u n d   P o l a r i s a t i o n s r i c h t u n g. Im vorhergehenden Paragraphe ward die Nothwendigkeit erörtert, für die Lichtfortpflanzung nach den drei axialen Dimensionen verschiedene Quantität anzunehmen; eine Fortsetzung der obigen Versuche lehrt aber auch die Qualität des Lichtes selbst erkennen.

Lässt man nämlich den doppelt gebrochenen Lichtstrahl unmittelbar nach dem Austritte aus dem ersten der im vorigen Paragraphe untersuchten Prismen auf ein zweites Prisma aus der Reihe derselben

fallen, so werden, wenn letzteres dem ersteren parallel gestellt ist, beim Austritte aus dem zweiten Prisma ebenfalls nur zwei Strahlen erscheinen. Diess zeigt, dass der Krystall nicht unter allen Umständen die Fähigkeit besitzen kann, jeden durchgehenden Strahl in zwei zu zerlegen, sondern dass dieses Phänomen auch durch die Qualität des einfallenden Lichtes bedingt ist.

Nur diess letztere nämlich erklärt die Möglichkeit des Phänomens, dass der primär einfallende Strahl durch das erste Prisma in zwei Strahlen zerlegt ward, während jeder der letzteren durch das zweite Prisma unzerlegt durchgingen. Man muss desshalb annehmen, dass dem einfallenden und gebrochenen Strahle bereits durch das erste Prisma eine qualitative Beziehung zur Lage aufgezwungen ward, in Folge derer das zweite Prisma keine weitere Zerlegung bewirkte, und nur mehr die Quantität der Fortpflanzungsgeschwindigkeit änderte.

Eine solche gesetzmässige Beziehung zur Lage lässt sich aber aus den allgemeinen Eigenschaften der Transversalvibrationen ableiten. Jeder gewöhnliche Lichtstrahl wird im Allgemeinen aus einer Aufeinanderfolge von nach den verschiedenen Dimensionen des Raumes willkürlich gerichteten Schwingungen bestehen. So lange der Raum, in welchem sich dieser Strahl fortpflanzt, homogen ist, werden auch die Erregungszustände jeder Art gleichmässig fortschreiten; anders hingegen im Krystalle, derselbe besitzt nach den drei Dimensionen verschiedene Molekularstructur; es werden somit die Excursionen der Moleküle je nach den drei Richtungen andere Verzögerungen erleiden, und mit anderer Schnelligkeit sich fortzupflanzen vermögen. — Es trennen sich somit im Krystalle zwei zur Richtung des Strahles senkrechte Vibrationen und werden bei der prismatischen Brechung in zwei Strahlen zerlegt, deren Schwingungsrichtungen sowohl senkrecht zu einander, als auch senkrecht auf den Lichtstrahl sind.

Mit Zugrundelegung dieser Anschauungsweise lassen sich die obigen Phänomene der Doppelbrechung vollkommen erklären. Vorerst ist es ersichtlich, dass in Folge einer nach den drei Axen verschiedenen Molekularstructur der durch ein Krystallprisma gebrochene Strahl für die verschiedenen Richtungen seiner Vibrationen eine andere Fortpflanzungsgeschwindigkeit erhält, dass der Strahl somit in zwei zerfällt; dass ferner die Geschwindigkeit in dieser letzteren von der relativen Lage gegen die Krystallaxen abhängt. Es erhellt weiterhin, wenn man auf das zweite Experiment des vorigen Paragraphes Rücksicht nimmt, dass in zwei Prismen derselben Substanz, deren Kanten bei sonstig willkürlicher Orientirung gegen *c* einer Krystallaxe *a* parallel laufen, von den vier gebrochenen Strahlen zwei gleiche $\mu_a$, $\mu_a$ und zwei ungleiche $\mu'_c$, $\mu''_c$

Werthe haben müssen. In beiden Prismen ist ja die Schwingungsrichtung des einen Strahles immer in gleicher Relation zur constant gebliebenen krystallographischen Richtung, und die Werthe des zweiten Strahles variiren mit dem gleichzeitigen Wechsel der zweiten krystallographischen Dimension, hier mit der die Halbirungslinie des Winkels bildenden Krystallaxe *c*. Die einfachsten Relationen zwischen den Schwingungsrichtungen und den Dimensionen des Prisma sind aber offenbar, wenn beim Minimum der Deviation, wo der Strahl senkrecht gegen die Halbirungslinie des Winkels ist, eine Schwingungsrichtung parallel der Kante des Prisma ist.

In den beiden obengenannten Prismen werden nach diesem die Schwingungsrichtungen des constant gebliebenen Strahles $\mu_a$ parallel der constant gebliebenen Richtung der Prismenkante *a* sein müssen. Die zweite Schwingungsrichtung des Strahles wird senkrecht dagegen und parallel der Halbirungslinie des Prismenwinkels sein.

Wir erhalten somit durch diese Deductionen, gestützt auf die wenigen Versuche des vorigen Paragraphes, nicht nur im Allgemeinen Gesetze der Doppelbrechung, sondern auch jene der Orientirung der Schwingungsrichtung. Namentlich erhält man auf diesem Wege unzweifelhaft die Richtung der Schwingungen eines Strahles, was nicht in gleichem Masse bei anderen Methoden der Fall ist.

Ist es möglich, einen solchen Strahl mit determinirter Schwingungsrichtung zu isoliren, so erhält man hierdurch das Mittel, auch die Schwingungsrichtungen aller übrigen optischen Erscheinungen durch Vergleichung zu bestimmen.

Wir pflegen jeden solchen Strahl mit bestimmter Schwingungsrichtung polarisirt zu nennen, und verstehen unter Polarisationsebene die Ebene, welche auf Strahl und Schwingung senkrecht steht.

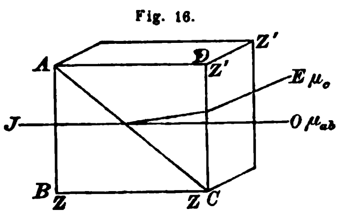
§. 45. Polarisirende Prismen. Um die durch Doppelbrechung entstandenen linearpolarisirten Strahlen von einander zu trennen, sind von Rochon, Nicol, Dove, Foucault, Senarmont und Bravais Combinationen ersonnen worden. Die von denselben zu Prismen angewendeten Minerale sind zumeist Calcit oder Quarz, also Krystalle, in welchen nach dem vorigen Paragraphe $\mu_a = \mu_b \gtrless \mu_c$ ist. Der Werth von $\mu_c$ bezieht sich nach dem Gesagten auf jene Schwingungen, welche der Krystallaxe *c* parallel laufen, die Werthe hingegen $\mu_a$ und $\mu_b$ beziehen sich auf die horizontalen Axen *a* und *b*.

Die Gleichheit dieser Werthe $\mu_a$, $\mu_b$ erkennt man, wenn man ein Prisma in solcher Weise (die Kante senkrecht zu *c*) aus einem dieser hexagonalen Medien schneidet, dass im Minimum der Deviation der Strahl parallel der Axe *c* durchgeht, also parallel den Krystallaxen *a* und *b* schwingt.

In einem solchen Prisma tritt dann trotz der Doppelbrechung nur ein einfacher Strahl aus, weil sich die Schwingungen parallel $a$ und $b$ mit gleicher Schnelligkeit fortpflanzen, und daher unter gleichem Brechungswinkel austreten.

Rochon's Prisma (Fig. 16) ist eine Combination von zwei Quarzprismen, welche gestatten, die beiden gebrochenen Strahlen so weit zu trennen, dass man mit jedem einzelnen Strahle operiren kann.

Fig. 16.




Es werden aus Quarz zwei Prismen mit rechtwinkeliger Basis geschnitten, deren ersteres $ABC$ eine solche krystallographische Lage hat, dass die Kante $ZZ$ der Hauptaxe $c$ parallel ist, im zweiten Prisma $ADC$ ist die Hauptaxe $c$ parallel der Kante $Z'Z'$. Fallt nun ein Strahl senkrecht auf $AB$ ein, so wird er parallel der Hauptaxe durchgehen und Schwingungen senkrecht zu $c$ und parallel zu den Axen $a$, $b$ machen. Da nun bei Quarz $\mu_a = \mu_b$, wird keine Trennung dieser beiden Strahlen eintreten und dieselben werden ungebrochen bis zur Trennungsfläche $AC$ gelangen. Im zweiten Prisma wird jedoch der Strahl senkrecht gegen die Hauptaxe $Z'Z'$ durch das Prisma gehen, und macht in Folge dessen Schwingungen parallel $c$ und annähernd parallel $a$ oder (nach dem Schnitte des Prisma) parallel $b$. Die Brechungsexponenten dieser gebrochenen Strahlen werden somit $\mu_c$ und $\mu_a$ sein. Aus anderwärtigen Versuchen weiss man, dass für Quarz $\mu_c = 1{\cdot}549$, $\mu_a = \mu_b = 1{\cdot}540$ ist, d. h. jener Strahl, welcher parallel der Hauptaxe schwingt, wird mehr als der darauf senkrecht vibrirende abgelenkt. Da also für den Strahl $O$ auch im zweiten Prisma derselbe Brechungsexponent gilt wie im ersten Prisma, so wird für diesen Strahl die Combination beider Prismen gleichsam als ein Parallepiped zu betrachten sein, und der Strahl $O$ wird den Gesetzen der senkrechten Incidenz folgend parallel mit dem einfallenden Strahle austreten. Anders hingegen für den zweiten Strahl $E$. Derselbe hat im ersten Prisma den Werth $\mu_{ab}$ und ändert denselben bei dem Eintritt in das zweite Prisma in $\mu_c$, er befolgt daher nicht das Gesetz der senkrechten Incidenz und wird nach $E$ gebrochen. Da durch diese Combination $O$ ungebrochen, $E$ hingegen gebrochen durchgeht, so ist die Trennung der beiden Strahlen vollkommener erreicht als durch ein einfaches Prisma, und das constante Gesichtsfeld wird durch den Strahl $O$ gebildet, um welchen sich bei Drehung des Prisma der Strahl $E$ im Kreise bewegt.

Die Schwingungsrichtung des Strahles $O$ ist, wie sich aus dem Gesagten mit Leichtigkeit ergibt, parallel $DC$.

Wir erhalten somit bereits durch diese Combination ein Hilfsmittel zur Herstellung eines Strahles von bestimmter Schwingungsrichtung.

Analog diesem Rochon'schen Prisma wirken auch achromatisirte Kalkspathprismen.

Ersetzt man nämlich in obiger Combination das Prisma $ABC$ durch ein Prisma aus isophanem Glas, hingegen $ADC$ durch ein Prisma aus Calcit, so hat ersteres den Brechungsexponenten $\mu = 1\cdot5$, letzteres hingegen $\mu_c = 1\cdot483$, $\mu_{ab} = 1\cdot653$. Es wird somit der Strahl $\mu_c$ ungebrochen durchgehen in Folge der senkrechten Incidenz und der gleichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit für Schwingungen seiner Art in Glas und Calcit. Der zweite Strahl $\mu_{ab}$ wird hingegen wie oben nach der Richtung $E$ abgelenkt.

Die Schwingungsrichtung des ungebrochenen Strahles wird bei dieser Combination von Calcit und Glas aber parallel der Kante $Z'Z'$ sein, wenn ein analoger krystallographischer Schnitt wie bei dem Rochon'schen Prisma durchgeführt wird.

Anstatt des Calcit hat Dove[1]) Arragonit als Polarisator angewendet. Ist die verticale Krystallaxe des Arragonit $c$ und verhalten sich die horizontalen Axen $a : b = 1\cdot73 : 1$, so ist der Brechungsexponent $\mu_c = 1\cdot52$, $\mu_a = 1\cdot68$, $\mu_b = 1\cdot67$. Dove schneidet aus der Säule des Arragonit Prismen von 45$^0$, deren Kanten der Axe $c$ parallel laufen. Die durch das Prisma gehenden Strahlen werden dann parallel $c$ und senkrecht zu $c$ (parallel $a$ oder $b$) schwingen, also die Brechungsexponenten 1·5 und 1·675 haben. Durch ein vorgelegtes Glasprisma kann einer der Strahlen achromatisirt und gleichzeitig zum parallelen Austritt gezwungen werden, während der andere unter einem noch grösseren Deviationswinkel als bei Calcit austritt.

Bei allen diesen polarisirenden Prismen ist das Gesichtsfeld für den parallel austretenden Strahl nur ein beschränktes, indem eben die Deviation des zweiten Strahles nicht so gross ist, dass derselbe vollständig ausserhalb des Gesichtsfeldes falle. Würde es möglich sein, diesen zweiten Strahl etwa durch Reflexion an der Trennungsfläche beider Prismen ausserhalb des Gesichtsfeldes zu bringen, so würde das wichtigste Moment, die Isolirung eines vollständig polarisirten Strahles erreicht sein.

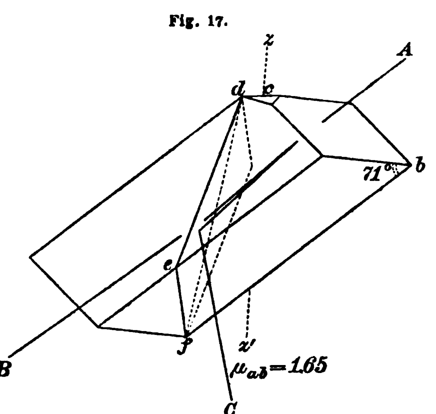
Diese letzte Bedingung wird am vollständigsten durch das Nikol'sche Prisma[2]) erzielt, welches aus einem rhomboedrischen Spaltungsstücke von Calcit geschnitten wird. Statt der natürlichen Rhomboederfläche, deren Diagonale mit der Richtung der längeren Kante $bf$

[1]) Dove. Pogg. Ann. vol. 114, pag. 169.

[2]) Nikol. Pogg. Ann. vol. 29, p. 182. Vergl. über dessen Theorie: Spaski. Pogg. Ann. vol. 44, p. 168

einen Winkel von 71° bildet, werden neue Flächen *cb* mit einem Neigungswinkel von nur 68° angeschliffen, welche dann die Austritts- und Eintrittsflächen bilden. Ausserdem wird noch der Krystall quer seiner Längsrichtung in zwei Theile zerschnitten durch eine Schnittfläche *def*, welche sowohl gegen den Querschnitt *dbf*, als auch zu der Schliffläche *db* senkrecht steht; die beiden Theile werden bei *def* mit Canadabalsam zusammengeklebt. Betrachtet man das Rhomboeder in seiner gewöhnlichen Lage, wo die Fläche *bc* (Fig. 17) parallel der Axe *Y* ist, so ersieht man, dass die Hauptaxe *Z* senkrecht auf *c* ist, und zwar wird dieselbe bei Calcit gegen die Diagonale *db* einen Winkel von 45°, mit der Seitenkante *bf* hingegen einen Winkel von 33° machen, die Lage der Hauptaxe wird somit in der Richtung *zz'* (Fig. 17) sein.

Fig. 17.




Lässt man nun einen Strahl parallel der Kante *bf* auf das obere Prisma *dbef* fallen, so wird er in zwei Strahlen zerlegt, welche senkrecht gegen *bf* schwingen, einer derselben wird senkrecht gegen den Querschnitt *dbf* und daher auch senkrecht zur Hauptaxe *Z*, sowie auch senkrecht zur kürzeren Rhomboederdiagonale *db* schwingen, sein Werth wird daher $\mu_{ab}$ sein. Der zweite Strahl wird im Hauptschnitte *dbf* und wenig geneigt zur Hauptaxe *c* schwingen mit einem Werthe nahe $\mu_c$.

Da nun für Calcit $\mu_{ab} = 1{\cdot}654$, $\mu_c = 1{\cdot}483$, hingegen der Brechungsexponent der dazwischen liegenden Schichte Canadabalsam 1·53 ist, so wird der Strahl $\mu_{ab}$ bei seinem Eintritte in den optisch dünneren Canadabalsam reflectirt werden können, wenn er einen Incidenzwinkel $i$ besitzt, der der Gleichung $v' \sin i > v$ von §. 36 des vorigen Kapitels genügt. Geht der Strahl parallel der Prismenaxe durch, so ist diese Bedingung mehr als erfüllt ($i = 70 - 75°$), und es wird somit $\mu_{ab}$ reflectirt nach *C*, und nur der Strahl $\mu_c$ wird die Canadabalsam-Schichte und das zweite Prisma durchdringen und bei *B* austreten.

Die Schwingungen dieses Strahles *B* sind parallel der kleineren Diagonale *bd* der Rhomboederfläche, und liefern ein Gesichtsfeld von nahe 27°.

Obgleich durch diese Construction ein vollständig polarisirter Strahl erreicht wird, so hat sie doch den Nachtheil, mit grossem Verluste an Material verbunden zu sein. Es wurden daher mehrfache Versuche

gemacht, das gleiche Ziel mit geringerem Verluste an Material zu erreichen.

Der Vorschlag von Foucault (Pogg. Ann. vol. 102, pag. 642) geht dahin, die Schichte von Canadabalsam durch Luft zu ersetzen und weiters die zwei Prismen durch einen Schnitt aus dem Rhomboeder zu erzeugen. Der von ihm angewendete Schnitt war 59° gegen die als Ein- oder Austrittsfläche benützte Rhomboederfläche geneigt, und verband die stumpfen Winkel.

Ein zweiter Vorschlag ging von Hasert (Pogg. Ann. vol. 113, pag. 188) aus, welcher den Schnittwinkel, der bei gewöhnlichen Nikolschen Prismen 90° ist, auf 81° reducirt, durch die Vertauschung des Canadabalsam mit einem anderen Bindemittel.

Aehnlich der Combination von Hasert ist das von Hartnak und Praznowski vorgeschlagene Prisma aus Calcit, welches einen Schnittwinkel von 73° und Leinöl ($\mu = 1 \cdot 485$) als Trennungsschichte hat. Das Gesichtsfeld erreicht, da der Werth des Brechungsexponenten von Leinöl jenem von $\mu_o$ des Calcit fast vollkommen gleich ist, hierbei 35° (vergl. Pogg. Ann. vol. 127, pag. 494).

§. 46. Polarisation durch Reflexion. Durch die vorhergehenden Polarisationsprismen ist das Mittel gewonnen, die Existenz und Schwingungsrichtung eines polarisirten Lichtstrahls zu erkennen, indem jeder linear polarisirte Lichtstrahl beim Durchgange durch das Nikol'sche Prisma ausgelöscht werden muss, wenn die Schwingungsrichtung des Strahles zu der Hauptschwingungsrichtung *bd* des Nikols senkrecht ist.

Untersucht man aber mit Hilfe des Nikols die Modificationen, welche der einfallende Strahl an der Grenze zweier Medien erleidet, so findet man nicht bloss den gebrochenen, sondern auch den reflectirten Strahl polarisirt. Die Modificationen des reflectirten Strahles führten Malus zur Entdeckung der Polarisation.

Die Untersuchung des von verschiedenen Körpern reflectirten Lichtes lehrt, dass fast alle Körper mehr oder minder die Eigenschaft besitzen, nur das in einem gewissen Sinne polarisirte Licht zu reflectiren, und daher polarisirt einfallendes Licht entweder ungeschwächt oder geschwächt reflectiren. Da wir durch die nothwendigen Beziehungen der Schwingungsrichtungen zu den Axen eines doppelbrechenden Prisma (§. 44) unzweideutig die Richtung der Schwingungen eines Strahles fixirt haben, so ist es auch möglich, die Schwingungen des reflectirten Lichtes mit Sicherheit zu bestimmen. Fällt ein unpolarisirter Lichtstrahl ein, und legen wir durch die Normale der Grenzschichte, den einfallenden und reflectirten Strahl eine Ebene, so stehen die Schwin-

gungen des reflectirten Strahles auf dieser Einfallsebene senkrecht. Man pflegt diese Einfallsebene auch Polarisationsebene zu nennen.

Bei einer solchen Annahme wird daher der Strahl senkrecht zur Polarisationsebene schwingen, und der Ausdruck, zu irgend einer Ebene polarisirt, wird die zu dieser Ebene senkrechten Schwingungen bedeuten.

In der mathematischen Theorie des Lichtes ist jedoch dieser Ausdruck nicht eindeutig gebraucht worden. Da die Benennung Polarisationsebene ursprünglich von den Versuchen: die Polarisation durch Reflexion zu erzeugen hergeleitet wurde, so war auch die Bedeutung desselben bezüglich der Molekularschwingungen eine zweifelhafte.

Es haben sich daher zwei Ansichten gebildet über das Verhältniss der Polarisationsebene zur Schwingungsrichtung, die erstere von Fresnel begründet und schliesslich von Cauchy angenommen, stimmt mit der oben gegebenen und gründet sich auf die Annahme von Dichtigkeitsvariationen bei gleichbleibender Elasticität. Im Gegensatze hierzu steht die Ansicht[1]), welche auf die Veränderungen der Elasticität gegründet ist und die Schwingungsrichtungen in die Polarisationsebene setzt. Will man daher Zweideutigkeiten vermeiden, so ist nur der eindeutige Ausdruck Schwingungsebene zu gebrauchen.

Allein nicht bloss der reflectirte Strahl erleidet eine besondere Anordnung seiner Schwingungsrichtung, sondern auch der gebrochene Strahl wird polarisirt. Die Schwingungsrichtung des gebrochenen Strahles ist in der Einfallsebene, und daher senkrecht auf die Schwingungen des reflectirten Strahles.

Da die Orientirung der Oscillationsrichtungen im einfallenden unpolarisirten Lichtstrahle an der Trennungsfläche der beiden Medien erfolgt, so ersieht man hieraus, dass durch eine mehrfache Wiederholung desselben Vorganges eine fast absolute Trennung der beiden Schwingungsrichtungen im reflectirten und gebrochenen Strahle möglich ist, selbst wenn etwa bei einmaligem Vorgange diess zu erreichen unmöglich wäre.

Wir besitzen somit ausser den Krystallen noch zwei Mittel, polarisirtes Licht zu erzeugen, und zwar erstens durch Reflexion, zweitens durch Lamellarpolarisation. Letztere entsteht beim Durchgange des Lichtstrahles durch aufeinander liegende Schichten von planplanen Platten, und bietet (vergl. spätere Kapitel) einen Erklärungsgrund für manche Erscheinungen an Krystallen.

---

[1]) Vergl. über die Principien, welche der Untersuchung über die Intensität des reflectirten und gebrochenen Lichtes (bis 1858) zu Grunde gelegt wurden, das umfassende Resumé sammt vollständigem Literaturnachweise von Grailich in Denkschriften der Wiener Academie 1858 vol. XI.

Die Reflexion vermag ebenfalls polarisirtes Licht zu liefern und daher die Krystallprismen zu ersetzen, doch wird nicht jede Stellung der reflectirenden Fläche vollkommen polarisirtes Licht liefern. Nur jener Einfallswinkel, den man Hauptincidenz- oder Polarisationswinkel nennt, erzeugt im reflectirten Strahle zur Einfallsebene vollkommen senkrecht schwingendes Licht. Dieser Polarisationswinkel ist eine Function der Substanz, wie diess durch Brewster 1815 (Philos. Transact.) erkannt worden war. Nach diesem sogenannten Brewster'schen Tangentengesetze ist, wenn $L$ der Incidenzwinkel für die totale Polarisation des reflectirten Strahles, ferner $\mu$ der Brechungsexponent des reflectirenden Mediums genannt wird,

$$\tan L = \mu. \tag{81}$$

Da nun $\mu = \frac{\sin J}{\sin R} = \frac{\sin L}{\sin R}$, so folgt aus obiger Relation, dass

$$L + R = 90^0$$

d. h. für den Fall der vollständigen Polarisation steht der reflectirte und gebrochene Strahl auf einander senkrecht.

Es ist durch diese Substitution möglich, den Polarisationswinkel als eine Function des Brechungsexponenten darzustellen. Einfach stellt sich diese Function an der Grenzfläche isotroper Medien dar, complicirter (vergl. Kap. XIV) wird hingegen dieselbe, wenn, wie in Krystallen die Fortpflanzung des Lichtes nach den drei Richtungen verschieden ist.

Für solche durchsichtige Medien, welche geradlinige Polarisation durch Reflexion bewirken, hat Fresnel[1]) die mathematischen Ausdrücke für die Intensität des gebrochenen oder reflectirten Strahles gefunden, mit Zugrundelegung des Princips der Erhaltung der Kräfte (die Summen der Intensitäten des reflectirten $L_s$ $L_p$ und des gebrochenen $R_s$ $R_p$ Strahles müssen der Intensität des einfallenden Strahles gleich sein). Hierzu tritt noch das Princip der Gleichheit der Bewegungen an der Grenzfläche[2]).

Mittelst dieser zwei Principien ist es leicht, die gegenseitigen Relationen zu finden, wenn man die Amplituden im Einfallspunkte in drei Componenten zerlegt, nach der Senkrechten auf der Einfallsebene, nach dem Einfallsloth und parallel der Durchschnittslinie von Einfallsebene und Trennungsfläche. Unterscheidet man die Schwingungen, je nachdem sie parallel oder senkrecht zur Einfallsebene vorgehen, durch $p$ und $s$;

---

[1]) Fresnel, Ueber reflectirtes Licht, gelesen 1823, unter Fourier's Papieren 1830 gefunden. Ann. d. chim. XLVI, 205. Pogg. Ann. XXII, 90.

[2]) Neumann. Abh. d. Berl. Acad. 1835. Cauchy. Mém. s. l. dispers. 51.

sei ferner die Amplitude des einfallenden Lichtes $J_p$, $J_s$, so erhält man nach Neumann[1])

$$\begin{aligned} J_s + L_s &= R_s \\ (J_p + L_p) \sin i &= R_p \sin r \\ (J_p + L_p) \cos i &= R_p \cos r \end{aligned} \tag{82}$$

ferner in Folge des Princips der Erhaltung der lebendigen Kraft, wenn statt der Masse das Product aus Sinus und Cosinus gesetzt wird, welches Product auch den Raum der Welle angeben kann

$$(J_s^2 + J_p^2 - L_s^2 - L_p^2) \sin i \cos i = (R_s^2 + R_p^2) \sin r \cos r$$

woraus sich die sogenannten Fresnel'schen Formeln ableiten lassen

1. für Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene

$$\begin{aligned} L_s &= J_s \frac{\sin (i - r)}{\sin (i + r)} \\ R_s &= J_s \left(1 - \frac{\sin (i - r)}{\sin (i + r)}\right) = J_s \frac{2 \cos i \sin r}{\sin (i + r)} \end{aligned} \tag{83}$$

2. für Schwingungen parallel der Einfallsebene

$$\begin{aligned} L_p &= J_p \frac{\operatorname{tang} (i - r)}{\operatorname{tang} (i + r)} \\ R_p &= J_p \frac{2 \cos i \sin r}{\sin i \cos i + \cos r \sin r} \end{aligned} \tag{84}$$

Ist hingegen die Schwingungsebene des einfallenden Strahles unter einem Winkel $p_i$ gegen die Einfallsebene geneigt, so lassen sich die Schwingungen in zwei Componenten, $J \cos p_i$, $J \sin p_i$ zerlegen, in Folge dessen sind daher die Gleichungen 84 mit $\cos p_i$, die Gleichungen 83 mit $\sin p_i$ zu multipliciren. Im reflectirten Strahle wird dann ebenfalls die Schwingungsrichtung einen Winkel $p_L$ mit der Einfallsebene bilden, der durch die Gleichung

$$\operatorname{cotang} p_L = \operatorname{cotang} p_i \frac{\cos (i + r)}{\cos (i - r)} \tag{85}$$

ausgedrückt werden kann.

Auch für die Schwingungsebene des gebrochenen Strahles gilt ein analoges, von Brewster[2]) aufgestelltes Gesetz

$$\operatorname{tang} p_r = \operatorname{tang} p_i \cos (i - r) \tag{86}$$

[1]) Vergl. die angekündigte Untersuchung von Cornu. Mém. de l'Institut Savant. étrang. 1867 und Compt. rend. 1867. I.

[2]) Brewster. Philosoph. Transact. 1830. Pars I. pag. 69, 133, Pogg. Ann. vol. XIX. 259, 281. Cornu C. r. 1864. Pogg. Ann. vol. 118. 492. vol, 124. pag. 466. Le Roux. Ann. d. chim. 1867. C. r. 1866.

hältniss annehmen, tritt auch die Gleichheit der Brechungsexponenten ein. Im hexagonalen und pyramidalen Systeme, wo $\sqrt{3} : 1 : c$ oder $1 : 1 : c$, wird auch $\mu_a = \mu_b \gtrless \mu_c$, im tesseralen Systeme hingegen, wo die Axen gleich sind, sind auch die Brechungsexponenten $\mu_a = \mu_b = \mu_c$, und diese Krystalle sind den isotropen Körpern analog.

Im Allgemeinen erkennt man schon die Nothwendigkeit der nach den drei Dimensionen verschiedenen Brechungsexponenten aus den bisher erkannten Grundsätzen. In früheren Kapiteln ward nachgewiesen, dass Cohäsion, Elasticität und Dichte nach den drei Dimensionen variiren, zweitens ist nach Gleichung (76) $\mu$ eine Function der Dichte. Mit diesen Grundsätzen stimmen die optischen Beobachtungen.

In welcher Beziehung diese Hauptwerthe zu den Richtungen im Krystalle stehen, lässt sich durch einen weiteren Versuch mit drei Prismen erkennen. Aendert man nämlich durch Schleifen die Lage jener Prismenfläche gegen die Krystallaxen insoweit, dass wohl noch die Kante, aber nicht mehr die Halbirungslinie des brechenden Winkels mit einer Krystallaxe zusammenfällt, so werden bei erneuerter Messung der Brechungsexponenten successive die Werthe $\mu_a$, $\mu''_c$, — $\mu_c$, $\mu''_b$ — $\mu_b$, $\mu''_a$ erhalten, wo $\mu''_a$, $\mu''_b$, $\mu''_c$ von den obigen $\mu'_a$, $\mu'_b$, $\mu'_c$ und auch von $\mu_a$, $\mu_b$, $\mu_c$ verschieden sind.

Man ersieht hieraus, dass die Quantität der Lichtfortpflanzung auf das innigste von der Richtung des Strahles im Krystalle, hier im gegebenen Falle von der Lage der Kante und der Halbirungslinie des Prismenwinkels abhängt. Jede Variation der letztgenannten Richtung brachte eine Variation der Werthe für die halbe Anzahl der gebrochenen Strahlen hervor, während das Constantbleiben der ersteren Richtung auch die Constanz der ersteren drei Brechungsexponenten bewirkte. Es folgt hieraus als logische Folge, dass man die constant gebliebenen Brechungsexponenten als Functionen der constanten Richtungen auffassen muss, und dass somit analog der morphologischen Ausbildung auch für die optischen Eigenschaften nach den drei Dimensionen verschiedene Brechungsexponenten die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes anzunehmen sind. Die Krystalle heissen daher mit vollem Rechte a n i s o p h a n.

§. 44. **Bestimmung der Schwingungs- und Polarisationsrichtung.** Im vorhergehenden Paragraphe ward die Nothwendigkeit erörtert, für die Lichtfortpflanzung nach den drei axialen Dimensionen verschiedene Quantität anzunehmen; eine Fortsetzung der obigen Versuche lehrt aber auch die Qualität des Lichtes selbst erkennen.

Lässt man nämlich den doppelt gebrochenen Lichtstrahl unmittelbar nach dem Austritte aus dem ersten der im vorigen Paragraphe untersuchten Prismen auf ein zweites Prisma aus der Reihe derselben

fallen, so werden, wenn letzteres dem ersteren parallel gestellt ist, beim Austritte aus dem zweiten Prisma ebenfalls nur zwei Strahlen erscheinen. Diess zeigt, dass der Krystall nicht unter allen Umständen die Fähigkeit besitzen kann, jeden durchgehenden Strahl in zwei zu zerlegen, sondern dass dieses Phänomen auch durch die Qualität des einfallenden Lichtes bedingt ist.

Nur diess letztere nämlich erklärt die Möglichkeit des Phänomens, dass der primär einfallende Strahl durch das erste Prisma in zwei Strahlen zerlegt ward, während jeder der letzteren durch das zweite Prisma unzerlegt durchgingen. Man muss desshalb annehmen, dass dem einfallenden und gebrochenen Strahle bereits durch das erste Prisma eine qualitative Beziehung zur Lage aufgezwungen ward, in Folge derer das zweite Prisma keine weitere Zerlegung bewirkte, und nur mehr die Quantität der Fortpflanzungsgeschwindigkeit änderte.

Eine solche gesetzmässige Beziehung zur Lage lässt sich aber aus den allgemeinen Eigenschaften der Transversalvibrationen ableiten. Jeder gewöhnliche Lichtstrahl wird im Allgemeinen aus einer Aufeinanderfolge von nach den verschiedenen Dimensionen des Raumes willkürlich gerichteten Schwingungen bestehen. So lange der Raum, in welchem sich dieser Strahl fortpflanzt, homogen ist, werden auch die Erregungszustände jeder Art gleichmässig fortschreiten; anders hingegen im Krystalle, derselbe besitzt nach den drei Dimensionen verschiedene Molekularstructur; es werden somit die Excursionen der Moleküle je nach den drei Richtungen andere Verzögerungen erleiden, und mit anderer Schnelligkeit sich fortzupflanzen vermögen. — Es trennen sich somit im Krystalle zwei zur Richtung des Strahles senkrechte Vibrationen und werden bei der prismatischen Brechung in zwei Strahlen zerlegt, deren Schwingungsrichtungen sowohl senkrecht zu einander, als auch senkrecht auf den Lichtstrahl sind.

Mit Zugrundelegung dieser Anschauungsweise lassen sich die obigen Phänomene der Doppelbrechung vollkommen erklären. Vorerst ist es ersichtlich, dass in Folge einer nach den drei Axen verschiedenen Molekularstructur der durch ein Krystallprisma gebrochene Strahl für die verschiedenen Richtungen seiner Vibrationen eine andere Fortpflanzungsgeschwindigkeit erhält, dass der Strahl somit in zwei zerfällt; dass ferner die Geschwindigkeit in dieser letzteren von der relativen Lage gegen die Krystallaxen abhängt. Es erhellt weiterhin, wenn man auf das zweite Experiment des vorigen Paragraphes Rücksicht nimmt, dass in zwei Prismen derselben Substanz, deren Kanten bei sonstig willkürlicher Orientirung gegen *c* einer Krystallaxe *a* parallel laufen, von den vier gebrochenen Strahlen zwei gleiche $\mu_a$, $\mu_a$ und zwei ungleiche $\mu'_c$, $\mu''_c$

Es lässt sich somit die kreisförmige und elliptische Bewegung theoretisch aus der Interferenz zweier Strahlen ableiten.

Aus der geometrischen Construction (Fig. 19) der elliptischen Schwingungen erhellt, dass dieselbe bei der Reflexion nur dadurch entstehen könne, dass eine der Componenten des reflectirten Strahles an der Trennungsfläche eine Phasenverschiebung um einen Bruchtheil einer Wellenlänge erleidet. Von der Grösse der Phasenverschiebung *ab* (Fig. 19) wird die Lage der Hauptaxen der Ellipse, und daher auch das Azimuth der wiederhergestellten Polarisation abhängen. Ist *ab* der *m*te Theil der Wellenlänge, so werden, wie leicht erhellt, noch $m - 1$ Reflexionen nöthig sein, um die Phasenverschiebung so zu vergrössern, dass die Differenz der beiden Strahlen eine ganze Wellenlänge ist, wodurch die Phasen der beiden Strahlen wieder homogen werden und lineare Polarisation eintritt.

§. 48. Beobachtungsmittel der elliptischen Polarisation. Aus dem bisher Gesagten folgt, dass die elliptische oder kreisförmige Polarisation nicht auf das Gebiet der Reflexion beschränkt ist, sondern dass es möglich sein wird, durch verschiedenartige Combination zweier differirender Strahlen dieselbe zu erzeugen. Diess ist bei krystallinischen Medien möglich, welche auch die Hilfsmittel zum weiteren Studium der elliptischen Polarisation darbieten.

Lässt man nämlich auf eine dünne planplane Platte eines doppelbrechenden Mediums einen Lichtstrahl auffallen, so wird er sich in zwei senkrecht zu einander schwingende Strahlen theilen. Ist die Platte dick, so werden die Strahlen weit auseinander gebrochen und treten einzeln aus. Anders hingegen, wenn $v$ und $v'$ nahe gleich, oder die Dicke des Blättchens sehr gering ist, in diesem Falle werden die Strahlen nicht getrennt, sondern miteinander in einem Bündel austreten. Der Durchgang des Lichtes durch die Platte wird jedoch von den beiden Strahlen in verschiedenen Zeiten proportional ihren Geschwindigkeiten geschehen, und in Folge dessen die gleichzeitig eingetretenen, mit gleichen Phasen behafteten Strahlen ungleichzeitig austreten, und nur Strahlen mit ungleichen Phasen werden gleichzeitig austreten. Ist dieser Zeitunterschied proportional der Dauer einer halben Oscillation oder einer halben Wellenlänge, so werden die beiden Strahlen sich zu einem geradlinig polarisirten Strahle zusammensetzen, ist der Unterschied ein multipler Theil einer $\frac{1}{4}$ Wellenlänge, folgt ein circular polarisirter Strahl; alle intermediären Wegunterschiede liefern einen elliptisch polarisirten Strahl.

Zur Herstellung des letztgenannten eignet sich wegen der leichten Spaltbarkeit namentlich Glimmer. Von beschränkter Verwendbarkeit ist Gyps. Die dünnen Spaltungsplatten des ersten Minerals liefern bei einer

Dicke von $^1/_9$ Millimeter für einen gelben Strahl den Wegunterschied von einer Wellenlänge, bei geringerer Dicke daher elliptische Schwingungen, und sind in Folge dessen zu gebrauchen, theils um elliptisch polarisirtes Licht herzustellen, theils um mit bereits vorhandenem elliptisch polarisirten Lichte combinirt einen linear polarisirten Strahl zu liefern. Eine weitere Anwendung kann zur Erkennung geringer Doppelbrechung überhaupt gemacht werden, wie wir später sehen werden.

Zur Herstellung eines circular polarisirten Strahles kann das sogenannte Fresnel'sche Prisma dienen (Fig. 21). Ist nämlich der Winkel des Prisma $54^1/_2{}^0$, der Brechungsexponent des angewendeten Glases 1·51, und die Polarisationsebene $45^0$ gegen die Einfallsebene geneigt, so hat Fresnel gezeigt, dass bei jeder Reflexion an $E$ und $F$ eine der beiden Componenten von der einfallenden Amplitude eine Verzögerung um $^1/_8\lambda$ erleidet. Der austretende Strahl $y$ besteht daher aus zwei Componenten, eine parallel, die zweite senkrecht zur Einfallsebene, die um $^1/_4\,\lambda$ in ihrer Phase verschieden sind und sich zu einem circular polarisirten Strahle zusammensetzen. Eine Combination zweier Parallelpipede (Fig. 22) hebt die circulare Polarisation wieder auf.

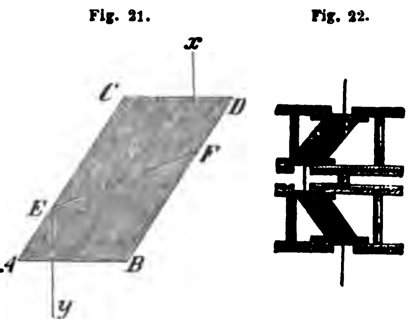


Fig. 21. Fig. 22.

Der für elliptische Polarisation nothwendige Gangunterschied von $\left(\frac{2m+1}{8}\,\lambda\right)$ kann aber auch durch eine künstliche Combination zweier Prismen erzeugt werden. Diese von Babinet[1]) angegebene Combination besteht aus zwei Quarzprismen von gleichen brechenden Winkeln und gleicher Dicke, nur ist bei einem Prisma die krystallographische Hauptaxe parallel der Kante des Prisma, bei dem zweiten Prisma hingegen senkrecht zur Kante $Z'Z'$ (Fig. 23). Aus dem vorigen Kapitel ist bekannt, dass der Quarz in der Weise doppelbrechend ist, , dass die auf die Hauptaxe $Z$ senkrechten Schwingungen gleiche Geschwindigkeit haben.

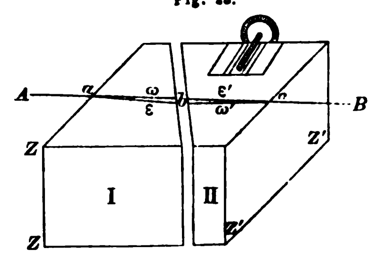


Fig. 23.

Durch das erste Prisma theilt sich der einfallende unpolarisirte Strahl in zwei zu einander senkrecht schwingende Strahlen, 1. den zur Axe $ZZ$ senkrecht schwingenden $\omega$ und den

[1]) Vergl. Jamin. Pogg. Ann. Ergänzungsband III. 240.

zu derselben parallelen $\varepsilon$. Fallen diese beiden Strahlen auf das zweite Prisma, so ist die Schwingung von $\omega$ hier der Axe $Z'Z'$ parallel und erhält die Geschwindigkeit $\varepsilon'$; andererseits sind die Schwingungen von $\varepsilon$ senkrecht zu $Z'Z'$ und haben daher die Gescnwindigkeit $\omega'$. Ist für den durchgehenden Strahl die Dicke $ab$ des ersten Prisma gleich dem des zweiten Prisma $bc$, so werden die Zeiten $\left(\frac{s}{v}=t\right)$ für den durchlaufenen Weg gleich, $\left(\frac{ab}{v_\omega}+\frac{bc}{v_{\varepsilon'}}\right)=\left(\frac{ab}{v_\varepsilon}+\frac{bc}{v_{\omega'}}\right)$, und daher treten die Strahlen gleichzeitig aus II aus. Diese geben einen linear polarisirten Strahl, denn es hebt sich die vom ersten Prisma herrührende Verzögerung durch die Beschleunigung des zweiten auf. Da für Quarz $\omega = 1{\cdot}54$, $\varepsilon = 1{\cdot}55$, $v_\omega > v_\varepsilon$, so ist der durch die Doppelbrechung hervorgerufene Gangunterschied $\varDelta$ proportional der Dicke der doppelbrechenden Schichte, multiplicirt mit $\varepsilon - \omega$ oder $v_\omega - v_\varepsilon$ daher $\varDelta = 0{\cdot}01\, D$.

Dieser durch das erste Prisma hervorgerufene Gangunterschied wird nur dann durch das zweite Prisma aufgehoben, wenn beide Prismen gleiche Dicke haben. Wäre das erste Prisma unveränderlich im Apparate festgemacht, hingegen das zweite verschiebbar und wirklich nach rechts oder links verschoben, so würden die Wegunterschiede nicht mehr aufgehoben werden, $\omega'$ oder $\varepsilon'$ würde voreilen um den Bruchtheil einer Phase, und wir erhielten aus der Combination beider Strahlen elliptisch polarisirtes Licht.

Um eine solche Verschiebung zu bewerkstelligen, ist an der fixen Fassung der beiden Prismen eine Mikrometerschraube, und zwar nach der Jamin'schen Verbesserung (l. c. pag. 242) mit getheiltem Knopfe angebracht, welche durch ihre Drehung das zweite Prisma horizontal nach vor- oder rückwärts schiebt. Im ersteren Falle wird $D_2$ grösser, im zweiten kleiner als $D_1$, und daher lässt sich sagen

$$D_2 > D_1;\ (v_\omega - v_\varepsilon = 0{\cdot}01\, D_1) < (v_{\omega'} - v_{\varepsilon'} = 0{\cdot}01\, D_2)$$
$$D_2 < D_1;\ (v_\omega - v_\varepsilon) > (v_{\omega'} \quad v_{\varepsilon'}).$$

das heisst, im ersten Falle wird der im ersten Prisma $\omega$ gewonnene Vorsprung im zweiten Prisma in eine Verzögerung verwandelt, im zweiten Falle bleibt der Vorsprung für den senkrecht zur Kante schwingenden Strahl $\omega = \varepsilon'$ auch nach dem Austritte aus dem zweiten Prisma vorhanden.

Der zusammengesetzte Strahl wird entweder rechts nach der Richtung des Uhrzeigers, oder entgegengesetzt links schwingen, je nachdem eine Phasenverschiebung $\varDelta$ eingetreten ist. Rechts gedrehtes Licht kommt zur Darstellung, wenn $\varDelta = {}^1/_8\,\lambda$ bis $\varDelta = {}^3/_8\,\lambda$, links gedrehtes bei $\varDelta = {}^5/_8\,\lambda$ bis ${}^7/_8\,\lambda$; ist $\varDelta$ eine Verzögerung bedeutend, also negativ, so ändert sich auch das Zeichen der Drehung in das entgegengesetzte.

Um den Apparat zum Studium der Reflexion zweckmässig verwenden zu können, bringt man in Mitte des Gesichtsfeldes zwei Fäden an, um jenen Theil genau zu bestimmen, für welchen $\Delta = 0$ ist. Lässt man linear polarisirtes Licht mit einem Schwingungsazimuth $p = 45^0$ einfallen, so wird bei normaler Stellung des Compensators das Licht linear bleiben und durch einen Ocular-Nikol ausgelöscht werden können. Der Raum zwischen den beiden Fäden im Gesichtsfelde wird dunkel, wenn man homogenes Licht anwendet. Würde das Prisma II nach rechts oder nach links gedreht, so würde allmälig $\Delta$ anwachsen bis $\Delta = \pm \frac{1}{2} \lambda$. Bei letzterer Grenze entsteht wieder linear polarisirtes Licht mit Azimuth — $45^0$, und für diesen Fall ist es möglich, durch Drehung des Ocular-Nikols um $90^0$ gegen das ursprüngliche Azimuth den Raum zwischen den beiden Fäden dunkel zu stellen. Hierdurch wird der Werth, ausgedrückt in $\frac{1}{2} \lambda$, der Schraubengänge des Mikrometers bekannt. Eine Combination des Babinet'schen Compensators mit 2 Nikolschen Prismen, welche im getheilten Kreise gefasst sind, wird somit gestatten, Gangunterschied und Azimuth zweier interferirenden Strahlen festzustellen.

§. 49. Metallreflexion. Durch den Babinet'schen Compensator ist es namentlich Jamin gelungen, die wichtigsten Aufschlüsse über die Reflexion an Substanzen von hohen Brechungsvermögen zu erhalten.

War es nämlich seit Brewster wohl bekannt, dass nur eine geringe Anzahl von Körpern das Licht bei der Reflexion geradlinig polarisirt, und hatte auch die Theorie der Reflexion bereits eine sehr grosse Ausdehnung gewonnen, so war es doch erst Jamin[1]) gelungen, die Cauchy'schen Formeln zu verificiren und zahlreiche praktische Relationen zu finden.

Das wichtigste Resultat der Untersuchungen Jamin's an zahlreichen Stoffen ist, dass die elliptische Polarisation beinahe an allen Körpern durch Reflexion eintritt, wenn der Incidenzwinkel sich innerhalb bestimmter Grenzen, dem sogenannten Ellipticitätsbogen bewegt. Für die Metalle ist dieser Ellipticitätsbogen $90^0$, für andere Körper hingegen kleiner. Null ist derselbe bei den Körpern mit dem Brechungsexponenten 1·46, welche immer geradlinig polarisirtes Licht reflectiren und von Jamin neutrale Körper genannt wurden.

Ist der Brechungsexponent des reflectirenden Körpers grösser als 1·46, so wird nach Jamin die Phase des senkrecht gegen die Einfallsebene schwingenden Strahls vorgerückt, ist hingegen $\mu < 1{\cdot}46$, so wird dieselbe verzögert. In beiden Fällen überwiegt der Antheil des mit normaler Schwingungsrichtung reflectirten Lichtes, und derselbe ist

[1]) Jamin. Pogg. Ann. Vol. 69, pag. 456. Vol. 74, pag. 528. Ergänzungsband II, 437. III, 234. Vergl. Senarmont. Pogg. Ann. Ergänzungsband II, 525.

bedeutend grösser als die hierzu verticale Componente. Substanzen mit einem Brechungsexponenten grösser als 1·46 nennt Jamin (Pogg. Ann. Erg. III. 256) positiv reflectirende, Substanzen mit $\mu < 1{\cdot}46$ negativ reflectirende Körper. Die elliptische Bewegung der Moleküle bei positiver oder negativer Reflexion erfolgt im entgegengesetzten Sinne, bei der einen in der Richtung des Uhrzeigers nach rechts, bei der anderen entgegengesetzt nach links.

Ist das Azimuth des einfallenden Strahles $p_i = 45$, so ändert sich dasselbe bei $i = 90^0$ nicht und die Differenz wird 0 oder $^4/_4\ \lambda$ sein. Bei einem dazwischen liegenden Incidenzwinkel entsteht je nach der Natur des Körpers eine rechts oder links gedrehte elliptische Schwingung, und beim Hauptincidenzwinkel ist die Differenz $^3/_4\ \lambda$, wobei sich die kleine Axe der Bahn der Einfallsebene möglichst nähert. Bei $i = 0$ wird die Schwingung wieder linear.

Die Erkenntniss der Lage der Ellipsenaxe, sowie die Verzögerung der Phase lässt sich mittelst des Babinet'schen Compensators leicht erkennen. Vorerst ist es nothwendig, dass man durch einen Versuch ermittelt, welcher Drehungswinkel der Mikrometerschraube $S$ (Fig. 23) genügt, um aus einem geradlinig polarisirt einfallenden Strahle einen elliptisch, circular oder wieder geradlinig schwingenden Strahl zu erzeugen, d. i. eine Verzögerung um $\frac{m}{8}\lambda$, $\frac{m}{4}\lambda$, $\frac{m}{2}\lambda$ hervorzubringen. Dadurch ist es möglich, mittelst des Drehungswinkels der Mikrometerschraube auch die Verschiebung der Phase des einfallenden elliptisch polarisirten Lichtes zu bestimmen. Fällt letzteres etwa mit der Phasenverschiebung $\frac{n}{8}\lambda$ ein, so wird durch eine Drehung der Schraube um einen Winkel, welcher eine weitere Verschiebung von $\frac{m}{8}\lambda$ bewirkt, in Folge dessen, wenn $\frac{m}{8}\lambda + \frac{n}{8}\lambda = {}^1/_2\,\lambda$, linear polarisirtes Licht entsteht. Aus der Kenntniss von diesem $m$ folgt ferner $n$, wodurch die Lage der Ellipse bestimmt ist.

Aus dem Azimuth des so entstandenen linear polarisirten Lichtes $p_L$ erkennt man aber auch die Amplituden des senkrecht und des parallel zur Einfallsebene schwingenden Lichtes $L_s$ $L_p$ (vide §. 46), indem

$$\frac{L_s}{L_p} = \frac{\sin p_L}{\cos p_L} = \text{tang}\ p_L \tag{88}$$

Wir erhalten somit alle Elemente, um die Bahn der Ellipse sicher zu stellen.

Für die Verzögerung $\Delta$ des Strahles $L_p$ gegen den normal reflectirten $L_s$ hat Fresnel[1]) eine Formel aufgestellt, welche von dem Brechungsexponenten $\mu$ abhängt.

[1]) Fresnel. Pogg. Ann. vol. XXII, pag. 116.

$$\cos \frac{\Delta}{\lambda} 2\pi = - \frac{1-(\mu^2+1)\sin^2 i + 2\mu^2 \sin^4 i}{1-(\mu^2+1)\sin^2 i} = - \frac{1 + \operatorname{tang}^2 r \operatorname{tang}^2 i}{1 - \operatorname{tang}^2 r \operatorname{tang}^2 i} \quad (89)$$

Letztere Gleichung, welche schon Neumann[1]) benützte, gibt das Verhältniss der relativen Schwächung der Amplituden des einfallenden Strahles durch die Reflexion.

Es ist mittelst dieser Gleichung nach dem Vorgange Brewster's auch möglich, das Verhältniss dieser beiden Amplituden auf einem anderen Wege, unabhängig vom Babinet'schen Compensator zu finden. Diess geschieht, wie im §. 47 erwähnt, durch so oftmalige Reflexionen, bis durch die vollkommene Schwächung einer Componente geradlinige Polarisation erreicht ist.

Man erkennt nämlich leicht, dass nach einer zweifachen, vierfachen, *n*fachen Reflexion der Winkel des Azimuth der Schwingungsebene für einen Strahl von wieder hergestellter linearer Polarisation

$$\operatorname{cotg} {''p_L} = \left(\frac{L_p}{L_s}\right)^2 \qquad \operatorname{cotg} {''''p_L} = \left(\frac{L_p}{L_s}\right)^4$$

und schwingt der einfallende Strahl selbst im Azimuth $p_i$, so wird

$$\operatorname{cotg} p_L = \left(\frac{L_p}{L_s}\right)^n \operatorname{cotg} p_i \quad (90)$$

Nennt man das Verhältniss $\frac{L_p}{L_s} = K = \operatorname{tang} E$ nach Jamin[2]) den Ellipticitätscoefficienten ($E$ das Azimuth der Polarisationsebene), so lässt sich derselbe aus der Beobachtung von $p_i$ und $p_L$ bei mehrmaliger Reflexion ermitteln.

Durch diese Methode ward es Jamin möglich, die von Cauchy für die elliptische Polarisation gegebenen Formeln sowohl an durchsichtigen Medien als auch an Metallen zu prüfen. Die mathematische Deduction dieser von Cauchy bloss angegebenen Gleichung hat Beer[3]) aus den allgemeinen Schwingungsgleichungen gelöst.

Für durchsichtige Medien[4]) gelten die Fresnel'schen Formeln annähernd, nur ist noch ein zweites Glied als Function des Ellipticitätscoefficienten $E$ anzuführen.

---

[1]) Neumann. Pogg. Ann. vol. 26, pag. 94.

[2]) Jamin. Pogg. Ann. vol. 74, pag. 528.

[3]) Beer. Pogg. Ann. vol. 91, pag. 115, 268, 467, 561. vol. 92, pag. 402, 522.

[4]) Cauchy. Compt. r. 1836, 1839. Pogg. Ann. vol. 39, pag. 53. Vergl. Ettingshausen. Pogg Ann. vol. 50, pag. 423. Beer. Pogg. Ann. vol. 91, pag. 477.

Es verwandeln sich daher die Formeln 83, 84 in nachstehende:

$$L_s = \frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)} J_s$$

(91) $$R_s = \frac{2\sin r \cos i}{\sin(i+r)} J_s$$

$$L^2_p = \frac{\tang(i-r)^2 + E^2 \sin^2 i \tang^2(i-r)\tang^2(i+r)}{\tang(i+r)^2 + E^2\sin^2 i \tang^2(i+r)\tang^2(i-r)} J^2_p$$

$$R^2_p = \frac{\sin^2 r \cos^2 i}{\sin^2(i+r)\cos^2(i-r) + E^2 \sin^2 i \sin^2(i+r)\sin^2(i-r)} J^2_p$$

(92) $$\frac{L^2_p}{L^2_s} = \frac{\cos(i+r)^2 + E^2 \sin^2 i \sin^2(i+r)}{\cos(i-r)^2 + E^2 \sin^2 i \sin^2(i-r)}$$

Für den Phasenunterschied $\varDelta$ folgt

(93) $$\frac{E \sin i\,[\tang(i+r) + \tang(i-r)]}{1 - E^2 \sin^2 i \tang(i+r)\tang(i-r)} = \begin{cases} \tang\varDelta - \pi : \left[i+r < \frac{\pi}{2}\right. \\ \tang\varDelta \quad : \left[i+r > \frac{\pi}{2}\right. \end{cases}$$

Da für Metalle und undurchsichtige Medien der Brechungswinkel nicht in Rechnung gezogen werden kann, so hat für dieselben Cauchy andere Formeln gegeben[1]).

Cauchy wählt zwei Constante $\Theta$ und $\varepsilon$ so, dass bei senkrechter Incidenz

(94)
$\Theta \cos\varepsilon$ den Brechungsexponenten
$\Theta \sin\varepsilon$ den Exstinctionscoefficienten

vorstelle.

Seien ferner $L_p$ und $L_s$ die Intensitäten des reflectiren Strahles, je nachdem der Strahl parallel oder senkrecht zur Einfallsebene schwingt, so hat man für den Fall der senkrechten Incidenz

(95)
$$L_p^2 = L_s^2 = \tang(\psi - \tfrac{1}{4}\pi)$$
$$\cotang\psi = \cos\varepsilon \sin(2 \operatorname{arc}\tang\omega)$$

für schiefwinklige Incidenz $i$

(95a)
$$L_p^2 = \tang(\varphi - \tfrac{1}{4}\pi) \qquad L_s^2 = \tang(\chi - \tfrac{1}{4}\pi)$$
$$\cotang\varphi = \cos(2\varepsilon - v)\sin\left(2 \operatorname{arctang}\frac{u}{\Theta^2\cos i}\right)$$
$$\cotang\chi = \cos v \sin\left(2 \operatorname{arc}\tang\frac{\cos i}{u}\right)$$
$$\cotang(2v - \varepsilon) = \cotang\varepsilon \cos\left(2 \operatorname{arc}\tang\frac{\sin i}{\Theta}\right)$$
$$u = \left(\frac{\sin 2\varepsilon}{\sin 2v}\right)^{1/2}\Theta.$$

1) Cauchy. Compt. rendu. XXV, 86. Pogg. Ann. vol. 74, pag. 543. Vergl. Beer. Pogg. Ann. vol. 91, pag. 561.

Der Unterschied der Phase an der Metallfläche wird

$$\begin{aligned} \tang \Delta &= \tang 2\,\omega \sin v \\ \tang \omega \sin i &= u \cotang i \end{aligned} \tag{93a}$$

Diese Formeln hat Jamin (Pogg. Ann. vol. 74, 528) verificirt durch Versuche mit mehrfacher Reflexion, bei welchen das Azimuth der einfallende Strahl 45⁰, dessen Intensität eins, $i$ die Incidenz der wieder hergestellten Polarisation war, wodurch sich ergab für die Intensität die Formel

$$L_p = \tang(\varphi - 45^0) \qquad \cotang \varphi = \cos 2 E \sin\left(2 \operatorname{arc} \tang \frac{1}{\sin i \tang i}\right) \tag{95b}$$

wo $E$ der auf voriger Seite bestimmte Ellipticitäts-Coefficient ist.

Diese Jamin'schen Versuche ergaben einige merkwürdige Relationen. Für die durchsichtigen Medien ist der Incidenzwinkel gleichmässig mit dem Brechungsexponenten von roth zu violett zunehmend, während sich bei den bisher beobachteten Metallen das entgegengesetzte Verhalten zeigt.

Das Azimuth nimmt jedoch von roth nach violett für einige Metalle zu, für andere ab. Da nach dem früheren aber die Intensität auch eine Function des Azimuth ist, so wird dieselbe ebenfalls entweder nach roth oder nach violett hin zunehmen.

Hieraus ist erklärlich, dass nach mehrfacher Reflexion entweder die Intensität der Farben von kleinerer oder von grösserer Wellenlänge geschwächt wird, daher die Metallplatte im ersten Falle nur mehr rothes, im letzteren blaues Licht reflectirt. Diese Versuche geben eine gegründete Erklärung für die schon von Brewster (vergl. Babinet. Compt. rend. XXV. 85) gefundene Thatsache, dass nach mehrfachen Reflexionen die Farben mehrerer Metalle in das Dunkelrothe übergehen. Ebenso hat auch Prevost (An. d. Chimie II. Ser. tom. IV. 192. 436) gefunden, dass die Metalle durch mehrfache Reflexionen die Farbe verändern. Silber wird nach 10facher Reflexion bronzeähnlich; Gold und Kupfer werden purpurfarbig, namentlich letzteres erhält eine absolut homogene Purpurfarbe. Ein Beispiel der Zunahme der Intensität der blauen oder violetten Strahlen ist nach Jamin Zink, welches nach mehrfachen Reflexionen blaues Licht zurückwirft.

Die obige Theorie der elliptischen Reflexion vermag für diese Farbenveränderung bei Metallen eine Aufklärung zu geben, und darf daher bei der Untersuchung der Metallfarben nicht vernachlässiget werden.

# IX. Kapitel.

## Absorption und Reflexion farbigen Lichtes. Farbe und Glanz. Phosphorescenz und Fluorescenz.

§. 50. Im vorhergehenden Kapitel ward die Richtung und Polarisationsebene des Strahles nach seinem Durchgang oder Reflex durch ein doppelbrechendes Mittel untersucht. Der einfallende Strahl erleidet überdies noch mehrere Veränderungen, welche obwohl Functionen der Materie und von Stoff zu Stoff wechselnd sich doch nicht der mathematischen Behandlung wie die vorhergehenden Grössen unterziehen lassen.

Die wichtigsten Veränderungen erleidet der einfallende Strahl sowohl in seinem gebrochenen als reflectirten Antheile an der Intensität, letztere wird durch das Quadrat der Amplitude, daher im einfallenden durch $J^2$, im reflectirten je nach der Schwingungsrichtung des einfallenden durch $L_s^2 L_p^2$, im gebrochenen durch $R_s^2 R_p^2$ ausgedrückt. Wird durch das Medium die Intensität nicht geändert, so müsste immer die Summe der Intensitäten des gebrochenen, reflectirten Strahles jener des einfallenden gleich sein, wodurch es möglich würde, die Intensität des gebrochenen Strahles für jedes Medium vorhinein zu berechnen. Hier hängt die Intensität wie in vorhergehender Fresnel'schen Formel bloss von $i$, $r$, $p$ ab; nur bei den Formeln für die Metallreflexion ward ein neuer Factor, die Absorption eingeführt. Letztere tritt aber nicht bloss bei den Metallen, sondern fast bei allen festen Körpern auf, wenn sie auch nur bei den ersteren in die Formeln durch Cauchy aufgenommen wurde.

Der durchgehende Lichtstrahl erleidet nämlich durch den Widerstand der Körpermoleküle eine Schwächung seiner Intensität, welche entweder sich nahezu gleichmässig auf die Strahlen aller Vibrationsgeschwindigkeiten oder nur vorwiegend auf einige der letztgenannten beziehen. Erstere Absorption wird nur einen Unterschied in der Inten-

sität, letztere hingegen auch noch überdies einen Unterschied der Farbe hervorrufen.

Je nach der verschiedenen Grösse des Absorptionscoefficienten für Intensität und Farbe kann man die Körper in verschiedene Klassen[1]) eintheilen: 1. Körper ohne jede Absorption; dieselben sind farblos und vollkommen durchsichtig. 2. Mit vollständiger Absorption für Intensität und Farbe; dieselben sind undurchsichtig. Da die Absorption mit der Länge des durchlaufenen Weges wächst, so ist es erklärlich, dass undurchsichtige Körper z. B. Metalle in dünnen Schichten für das Licht durchscheinend sind. So lässt Goldblatt, von $^1/_{200000}$ Zoll Dicke noch grünes Licht durch und nach Melsens sind Quecksilberblasen durchscheinend[2]). 3. Mit variabler Absorption für Intensität und Farbe. Dieselben können alle Zwischenstufen der Durchsichtigkeit sowie der Farbe besitzen. Die Absorption der Intensität nimmt, wie die Beobachtungen lehren, mit dem Brechungsexponenten zu. (Vergl. Satz 101, pag. 148.)

Als mineralogische Grade der Durchsichtigkeit unterscheiden wir: vollständig durchsichtig (wasserhell); halbdurchsichtig, durchscheinend, an den Kanten und in dünnen Splittern durchscheinend, schliesslich undurchsichtig.

Die Farben, welche der Körper in Folge der von ihm ausgeübten Absorption erhält, werden dadurch erzeugt, dass er von den gebrochenen und dispergirten Strahlen des auffallenden diffusen Lichtes immer einen bestimmten farbigen Antheil auslöscht, und dass somit nur die übrig bleibenden Theile des Spectrums sich zu einer Combinationsfarbe vereinen. Zu dieser letzten Combinationsfarbe mischt sich oftmals noch ein Procenttheil von Schwarz, d.i. der Ausdruck für die Undurchsichtigkeit, oder von Weiss für durchsichtige Körper bei, wodurch manche Farben entstehen können, welche scheinbar ausserhalb der Reihe der Spectralfarben liegen.

Der Beweis für die Entstehung der Körperfarben durch Absorption lässt sich dadurch geben, dass man einen farblosen Strahl durch den Körper gehen lässt, und nach seinem Austritt durch ein Prisma in seine farbigen Bestandtheile zerlegt. Es werden in diesem Spectrum nur jene Farben intensiv auftreten, aus deren Combination die Hauptkörperfarbe entstanden, die übrigen Farben werden mehr oder minder geschwächt erscheinen und durch ihr Hinzutreten zur Hauptkörperfarbe die weitere Nüance derselben bestimmen.

In Beziehung auf diese farbige Absorption kann man die Mineralien in zwei grosse Gruppen trennen, 1. in solche, deren kleinste Theilchen

[1]) Vergl. Dove Pogg. Ann. 110, pag. 279.
[2]) Vergl. Faraday. Phil. Trans. 1857. Dupasquier 1845. Compt. rend. vol. 21, pag. 64.

die Eigenschaft der Absorption haben, 2. in Körper, welchen die farbige Absorption nicht ursprünglich eigen, sondern nur durch eine stark absorbirende Beimengung aufgezwungen ward, deren kleinste Theilchen somit (da im feinvertheilten Zustand die Wirksamkeit der Beimengung sich vermindert) nicht die Farbe des compacten Körpers haben. Erstere Körper sind farbig, letztere gefärbt und man zählt zu ersteren vor Allem die Metalle, indem die nichtmetallischen Verbindungen meist ungefärbt oder durch eine Beimengung eines Metalles gefärbt erscheinen. Diesen Unterschied der Farbe erkennt man, wenn man das feine Pulver des Körpers vergleicht, wodurch die eigentliche Charakterfarbe der Verbindungen, unabhängig von den Beimengungen zu Tage tritt. Man pflegt hiezu das Mineral auf eine Bisquittafel zu streichen und der gefärbte oder ungefärbte Strich des Minerals ist ein seit lange gekanntes und geübtes Kennzeichen der Mineralogen.

§. 51. Pleochroismus. Während die Verhältnisse der Absorption sich bei einfach brechenden Medien nach allen Seiten hin gleichgestalten, so sind dieselben bei doppelt brechenden Körpern, analog der Fortpflanzungsgeschwindigkeit (§. 44) nach den drei Axen verschieden.

Wir können jedoch die drei Unterschiede der Absorptionsfähigkeit aufrechterhalten, denn es existiren ungefärbte, durchsichtige und gefärbte undurchsichtige doppeltbrechende Medien. Die Erörterung der dritten Art, d. i. der für Intensität und Farbe variablen Absorption, ist jedoch von Wichtigkeit.

Man kann bei dieser variablen Absorption zwei Fälle unterscheiden. 1. Der Absorptionscoefficient der Farbe ist für alle Strahlen nahezu constant, jener der Intensität ist hingegen sehr verschieden, oder 2. es variirt bei nahe gleicher Intensität die Absorption der Farbe.

Für die erstgenannte Absorption, variabel bezüglich der Intensität, sind gewisse Turmaline ein auffallendes Beispiel.

Die Farbe des Turmalin, welcher nur ein gefärbtes Mineral ist, variirt wohl in verschiedenen Handstücken durch fast alle Farben, allein die Farbe eines Krystalles bleibt in der Regel constant, in welcher Richtung man auch das Licht durchgehen lässt. Anders hingegen verhält es sich mit der Durchsichtigkeit: Während der Krystall in Richtungen senkrecht zu seiner hexagonalen Hauptaxe $c$ durchscheinend bis durchsichtig ist, wird er hingegen in Richtungen parallel zur Hauptaxe $c$, also senkrecht auf die Endfläche fast undurchsichtig. Die Intensität der Strahlen, welche senkrecht zur Hauptaxe schwingen, wird somit mehr geschwächt als jene der Schwingungen parallel derselben.

Da die Absorption in manchen grünen Varietäten von Turmalin ziemlich bedeutend ist, so dass nur durch eine dünne Platte parallel

den Prismenflächen jene Strahlen durchgehen, welche zur Prismenkante und Hauptaxe parallel sind, so kann Turmalin als ein Mittel zur Herstellung geradlinig polarisirten Lichtes dienen. Man hat auch vielfach solche parallel der Axe geschnittene Turmalinblättchen als polarisirende Medien gebraucht und in einem späteren Kapitel (XV) wird der auf diesem Princip construirten Turmalinzange Erwähnung geschehen.

Sind zweitens die Unterschiede in der Intensität des durchgehenden Lichtes geringer, hingegen die der Farbenabsorption grösser, so treten die Verhältnisse des Pleochroismus auf[1]). Dieselben stehen in innigster Beziehung zu dem Charakter der Doppelbrechung, so dass dieser letztere immer im Auge gehalten werden muss. Bekanntlich (§. 44) wird beim Durchgang durch ein doppeltbrechendes Medium jeder einfallende Strahl in zwei Strahlen von verschiedener Geschwindigkeit zerlegt, so dass den Schwingungen parallel den drei Hauptrichtungen der Krystalle drei bestimmte Hauptwerthe der Lichtgeschwindigkeit zukommen.

Analog hiemit ist auch die Farbenabsorption bei vielen Medien für jeden des doppeltgebrochenen Strahles eine verschiedene, so dass beispielsweise für den weniger gebrochenen das blaue, für den mehr gebrochenen Strahl das rothe Ende des Spectrums absorbirt wird. Die Gesammterscheinungen des Körpers werden sich jedoch dadurch erklären lassen, dass a) die Absorption für jede der Schwingungen parallel den drei Hauptrichtungen des Krystalls eine andere ist, wenn diesen Schwingungsrichtungen gleichzeitig eine unter sich verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeit angehört, dass b) dieselbe jedoch für jene Richtungen gleich wird, für welche auch die letztgenannte Geschwindigkeit gleich wird. Letzterer Fall tritt (§. 44) bei Schwingungen senkrecht gegen die Hauptaxe des pyramidalen und hexagonalen Systems ein.

Da wir im früheren Paragraph gesehen, dass die Oberflächenfarbe eine Function der Absorption ist, so wird auch die Farbe eines gefärbten doppeltbrechenden Mediums im diffusen auffallenden Lichte eine combinatorische Function der in ihm möglichen Absorption und daher eine Mischfarbe sein. Im durchgelassenen Lichte wird jedoch die Verschiedenheit der Absorption nach den drei Richtungen hervortreten und der Körper nach seinen drei Hauptrichtungen verschiedene Farben annehmen.

Ein wichtiges Beispiel hiefür ist das Mineral Dichroit, welches je nach dem Durchgang des Lichtes nach seinen 3 Hauptaxen die dem Beobachter zugewendete Seite dunkel, licht oder gelblich-blau erscheinen lässt. Analoge Verhältnisse, mehr oder minder in der Farbe unter-

---

[1]) Haidinger. Pogg. Ann. 1845. vol. 65, pag. 1. Vergl. Senarmont. Ueber künstliche Darstellung des Dichroismus. An. d. chim. 1856.

schieden, erhalten wir bei den meisten gefärbten Mineralien, wenn wir aus denselben parallel den Axen Parallepipede schneiden und das senkrecht durchgehende Licht beobachten. Diese Krystalle bieten somit drei verschiedene Körperfarben dar, jede derselben ist, wie man sich mittelst des Nicol'schen Prisma überzeugen kann, entstanden durch die Combination der beiden doppelt gebrochenen und gleichzeitig variabel absorbirten Strahlen, für welche die Schwingungsrichtungen in die Ebene der Austrittfläche fallen.

Man kann die Farbe, welche dem parallel einer krystallographischen Hauptrichtung schwingenden Strahle durch die Absorption einiger seiner Spectralfarben aufgezwungen wird, Axenfarbe nennen. Die drei verschiedenen Körperfarben sind Combinationen der drei Axenfarben, so dass die Farbe der Fläche $A$ aus den Farben der Schwingungen parallel den Axen $b$, $c$ zusammengesetzt ist.

Untersucht man solche Minerale, so erhält man beispielsweise für die Körperfarben der Flächen $A$, $B$, $C$ und die Axenfarben für die auf diese Flächen senkrechten Axen $a$, $b$, $c$

von Dichroit $A$ blau, $B$ blassblau, $C$ gelblichblau.
$a$ gelbgrau, $b$ blassblau, $c$ dunkelblau.
von Diaspor $A$ pflaumenblau, $B$ violblau, $C$ spargelgrün.
$a$ himmelblau, $b$ weingelb, $c$ violblau.

Für Krystalle des pyramidalen und hexagonalen Systems ist die farbige Absorption für Schwingungen senkrecht zur Axe $c$ gleich, daher die Färbung der Endfläche der Farbe der zur Axe senkrecht schwingenden Strahlen entspricht; während die Farbe der Prismen aus den Strahlen $c$ und $ab$ combinirt und für alle Prismen constant ist.

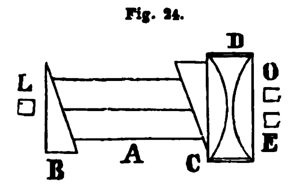
Beispielsweise ist die Axenfarbe $a = b$ für blassen Zirkon nelkenbraun, die Farbe der Schwingung parallel der Hauptaxe hingegen spargelgrün.

Da der Dichroismus nur in doppelbrechenden Körpern möglich ist, so dient derselbe als ein leichtes Erkennungsmittel, namentlich bei farbigen Edelsteinen, ob das zu untersuchende Mineral einfach oder doppelbrechend ist.

Obwohl die Untersuchung der dichroitischen Absorption mit jedem linear polarisirenden Prisma möglich ist, so werden solche Untersuchungen durch die von Haidinger angegebene dichroskopische Loupe sehr erleichtert, indem durch dieselbe beide gefärbten Strahlen neben einander zur Darstellung kommen, wodurch die etwaige Verschiedenheit der Farbennüance am leichtesten erkennbar wird.

Die dichroskopische Loupe besteht aus einem Kalkspathrhomboeder *A*, an welchem, um senkrechten Ein- und Austritt des Lichtstrahles ohne farbige Zerlegung zu ermöglichen, zwei Glasprismen *B* und *C* mit einem brechenden Winkel von 18° angekittet sind. Diese drei fix verbundenen Prismen befinden sich in einer Fassung, welche vor *B* eine viereckige Oeffnung zum Eintritte des Lichtstrahles *L* und bei *D* eine Linse zur Vergrösserung der zwei, durch die Doppelbrechung des Kalkspathes *A* entstandenen Bilder *O*, *E* trägt.

Fig. 24.




Will man den Dichroismus einer Substanz untersuchen, so bringt man dieselbe vor die Lichtöffnung *L* und analysirt das durchgehende Licht. Da die beiden Strahlen *O* und *E* neben einander zu liegen kommen, so werden selbst geringe Farbenunterschiede erkennbar. Die Schwingungsrichtungen der Strahlen *O* und *E* lassen sich in jedem Falle ohne weitere Untersuchung erkennen, wenn man das von einer glänzenden Fläche reflectirte Licht durch die Loupe betrachtet. Es wird nur jenes Bild von *O* und *E* hell erscheinen, dessen Schwingungen parallel der Reflexionsebene sind. Hiedurch ist es unnöthig, bestimmte Voraussetzungen über die optische Orientirung des angewendeten Kalkspathstückes zu machen.

§. 52. Glanz und Farbe des reflectirten Lichtes. Obwohl die Intensität des reflectirten Lichtes von der Natur des reflectirenden Mediums bedingt ist, so hat doch die Beschaffenheit der Trennungsfläche den grösstmöglichen Einfluss. Eine rauhe matte Oberfläche diffundirt das Licht und schwächt hiedurch die Intensität des reflectirten Strahles, während eine vollständig ebene Fläche den einfallenden Strahl fast vollständig zurückzuwerfen vermag.

Je nach der Natur der Oberfläche und der Intensität des reflectirten Lichtes unterscheiden wir daher die Körper in leuchtende, glänzende und spiegelnde[1]). Bei dem Vorgange des Leuchtens wird der Körper von seiner Oberfläche Licht von einer Intensität reflectiren, welche ermöglicht, dass der vom diffusen Licht erhellte Körper trotz des reflectirten Lichtes noch erkennbar ist; hingegen spiegelt der Körper, wenn die Intensität des reflectirten Lichtes eine relativ so grosse ist, dass der spiegelnde Gegenstand gegenüber dem Spiegelbild vollständig zurücktritt. Glanz wird in jenen Fällen entstehen, wenn wir Spiegelbild und Gegenstand gleichzeitig sehen.

Die Intensität von Bild und Gegenstand vermag nun eine verschiedene zu sein und in dieser Beziehung werden in der Mineralogie mehrere

[1]) Wundt. Pogg. Ann. 116, pag. 627.

Arten des Glanzes unterschieden. Von dem vollkommensten beginnend in absteigender Ordnung sind diess: Metallglanz, Diamantglanz, Glasglanz, Fettglanz, Perlmutterglanz.

Von diesen mineralogischen Arten des Glanzes sind für die Krystallphysik nur zwei, nämlich der Glas- und Metallglanz wichtig.

Auf Grund der Versuche von Wundt und Dove[1]) lässt sich die physiologische Wirkung des Glanzes immer auf den gleichzeitigen Eindruck zweier ungleicher Gegenstände auf das Auge zurückführen, es mögen diesen Eindruck nun nach Dove zwei neben einanderliegende verschiedene Farben im Stereoskop, oder nach Wundt Spiegelbild und Gegenstand (im Raume hinter einander liegend) hervorbringen.

Untersucht man mit Zugrundelegung solcher Ansichten die verschiedenen glänzenden Minerale, indem wir das von ihrer glänzenden Oberfläche reflectirte Licht mittelst eines Nikolschen Prisma oder einer dichroskopischer Loupe in seine polarisirten Componenten zerlegen, so erhalten wir zwei grosse Gruppen.

Bei der ersten dieser Gruppen, welche die glasglänzenden nichtmetallischen Minerale umfasst, ist das normalreflectirte Bild, d. i. der Strahl, dessen Schwingungen zur Einfallsebene senkrecht sind, farblos wie das einfallende Licht, und nur die zweite Componente, d. i. die Schwingungen parallel der Einfallsebene, liefert uns ein deutliches farbiges Bild des Gegenstandes. In der dichroskopischen Loupe erhalten wir ein weisses helles und ein gefärbtes Bild. Der Reflex von einer rothen Glasplatte liefert hierfür ein Beispiel.

Bei der zweiten Gruppe, welche Metallglanz hat, liefern jedoch beide reflectirten Componenten Bilder, welche mit der Farbe des Gegenstandes nahe übereinstimmen, und nur um geringes ist der normal reflectirte Strahl etwas ins Helle gezogen und der darauf senkrecht vibrirend mehr gefärbt, wie sich namentlich am Kupfer recht deutlich erkennen lässt.

Wir erhalten somit von den Körpern auf verschiedene Weise den Eindruck des Glanzes, indem im Auge zwei Erscheinungen sich combiniren, welche bei den glasglänzenden Körpern ungleich, hingegen bei den Metallen nahe gleich sind. Analog hiemit sind auch erstere meist gefärbte Körper und nur letztere farbige.

Je nach den Zwischenstufen zwischen Glas- und Metallglanz wird ein metall- oder glasähnlicher Demantglanz sich aufstellen lassen.

Fettglanz ist eine Art des Glasglanzes, welchen meist gelbliche Minerale mit fein muscheligem Bruch besitzen. Perlmutterglanz ent-

---

[1]) Dove. Pogg. Ann. vol. 83, pag. 169. Wundt l. c. — Haidinger. Sitzungsb. d. Wien. Acad. 1848. vol. I, 139. Örsted. Pogg. Ann. 1843. vol. 60, pag. 49.

darbieten, und die wir Farbenschiller nennen. Bekannt ist allgemein der Farbenschiller: buntfarbig am Labrador, kupferroth am Hypersthen, lichtblau an Adular, Chrysoberyll, die Farben des Opal.

Brewster wollte die Farben am Labrador und Opal[1]) durch interponirte Poren; Scherer suchte durch die Annahme eines interponirten fremden Minerals (Eisenglanz, nach Kenngott Göthit) den Schiller des Sonnenstein zu erklären.

Hessel[2]) hat den Farbenschiller auf Reflex von inneren zahlreichen Lamellen zurückgeführt, hingegen Nils Nordenskiöld[3]) denselben nur als eine Function der Oberfläche unabhängig von inneren Reflexen dargestellt. Nach den Untersuchungen von Reusch[4]) ist die erstere Ansicht die richtige. Der Farbenschiller entsteht durch zahllose Blätterdurchgänge, welche das eingefallene Licht reflectiren. Die Farbe des Schillers wird daher eine Interferenzfarbe aus den zahlreichen reflectirten Strahlen darbieten und daher im Allgemeinen als Farbe dünner Krystallblättchen (vide Kap. XV) bezeichnet werden, welche wie bekannt der Dicke der Blättchen, also hiermit der Nähe der Spaltungsrichtungen entspricht. Untersucht man den Farbenschiller mit der dichroskopischen Loupe, so scheint das den inneren Durchgängen parallel schwingende Bild das hellere; es werden somit die zu den Theilungsflächen senkrechten Strahlen am meisten gestört und geben die Schillerfarbe.

Obgleich also auch die Vibrationsrichtung des Farbenschillers orientirt ist, so erscheint es doch nicht möglich, den früher besprochenen orientirten Flächenschiller auf analoge Weise durch Spaltungslamellen zu erklären.

Auf der Theorie der dünnen Blättchen ist nur noch jene Farbenerscheinung basirt, welche Irisiren genannt wird, und die an Spaltungsstücken mit inneren Hohlräumen sichtbar ist. Auch hier hängt die Farbe wie beim Newton'schen Farbenglase von der Dicke der Schichte und der Interferenz der Strahlen ab.

§. 54. Fluorescenz und Phosphorescenz. Der reflectirte Lichtstrahl erleidet ausser den bisher erwähnten Phänomenen noch eine Aenderung der Oscillationsdauer durch den Einfluss der Materie. Dieses Phänomen, welches sich dadurch ausspricht, dass die Farbe des reflectirten Lichtes dem Roth näher liegt als das einfallende Licht, nennen wir Fluorescenz. Es tritt hier nicht, wie bei dem vorher betrachteten Metallschiller eine vom Incidenzwinkel abhängige Zerlegung des eingefallenen Lichtes in seine farbigen Componenten auf, sondern nur eine

---

[1]) Brewster Ueber Opalisiren wegen paralleler Höhlungen. Report British Association. XIV. 1844. pag. 9.

[2]) Hessel. Karstner's Archiv X, 273. 1827.

[3]) Nils Nordenskiöld. Karstner's Archiv XIX, 179. 1830.

[4]) Reusch. Pogg. Ann. vol. 116, 392. vol. 118, 256. vol. 120, 95.

Platincyanüre, von welchen namentlich das rothe pyramidale Magniumplatincyanür auf allen seinen Flächen bei $i = 45^0 - 50^0$ gleichmässig sich mit einem stahlblauen in der Einfallsebene schwingenden, sehr kräftigen Schiller überzieht.

Bei diesen und mehreren anderen Beispielen ist die Reflexionsfarbe die Complementärfarbe zu der Absorptionsfarbe, und man kann für solche Körper wohl annehmen, dass an der Trennungsfläche nicht bloss eine Trennung der Vibrationsrichtungen, sondern auch eine der Vibrationsgeschwindigkeiten und Grössen erfolge. Jener Antheil des gebrochenen Strahles, welchen der Körper vermöge seiner Molekularstructur und Distanz der Moleküle nicht [illegible] vermag, wird reflectirt, der Rest [illegible] wird sich im Körper [illegible] und die Absorptionsfarbe erzeugen.

Ausser diesem [illegible] Oberflächenschiller bestehen noch Arten des Schillers, welche unabhängig von der Einfallsebene, hingegen immer parallel einer krystallographischen Axe schwingen.

Da dieser sogenannte [illegible] Flächenschiller auch in Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene [illegible] im normal reflectirten Strahl aufzutreten vermag, so ist derselbe nicht wie der Oberflächenschiller [illegible], indem der aus dem Innern kommende Lichtstrahl ([illegible] senkrecht zur Reflexionsebene) an seiner Bildung wenig Antheil nimmt.

Man ist somit gezwungen anzunehmen, der orientirte Flächenschiller entsteht durch die Zerlegung des einfallenden Strahles bezüglich Richtung und Grösse seiner Vibrationen (Farbe) nach krystallographischen Richtungen, [illegible] der Körper nur einen bestimmten Antheil [illegible] lässt, den übrigen reflectirt. So lässt das oben erwähnte Magniumplatincyanür [illegible] Strahlen, deren Vibrationsrichtung mit der [illegible] parallel sind, nur den rothen Antheil [illegible] und reflectirt die grünen Strahlen. Analog bei dem [illegible], welches auf den Prismenflächen einen blauen [illegible] Flächenschiller zeigt.

[illegible] scheint somit auch die Complementärfarbe [illegible] zu sein, und wie Haidinger[*]) nachgewiesen [illegible] mit der Richtung des mehr [illegible] einen von diesem letztern [illegible] wird.

[illegible] Metallschiller sind [illegible] durch [illegible] bestimmten Richtungen

[illegible]

darbieten, und die wir Farbenschiller nennen. Bekannt ist allgemein der Farbenschiller: buntfarbig am Labrador, kupferroth am Hypersthen, lichtblau an Adular, Chrysoberyll, die Farben des Opal.

Brewster wollte die Farben am Labrador und Opal[1]) durch interponirte Poren; Scherer suchte durch die Annahme eines interponirten fremden Minerals (Eisenglanz, nach Kenngott Göthit) den Schiller des Sonnenstein zu erklären.

Hessel[2]) hat den Farbenschiller auf Reflex von inneren zahlreichen Lamellen zurückgeführt, hingegen Nils Nordenskiöld[3]) denselben nur als eine Function der Oberfläche unabhängig von inneren Reflexen dargestellt. Nach den Untersuchungen von Reusch[4]) ist die erstere Ansicht die richtige. Der Farbenschiller entsteht durch zahllose Blätterdurchgänge, welche das eingefallene Licht reflectiren. Die Farbe des Schillers wird daher eine Interferenzfarbe aus den zahlreichen reflectirten Strahlen darbieten und daher im Allgemeinen als Farbe dünner Krystallblättchen (vide Kap. XV) bezeichnet werden, welche wie bekannt der Dicke der Blättchen, also hiermit der Nähe der Spaltungsrichtungen entspricht. Untersucht man den Farbenschiller mit der dichroskopischen Loupe, so scheint das den inneren Durchgängen parallel schwingende Bild das hellere; es werden somit die zu den Theilungsflächen senkrechten Strahlen am meisten gestört und geben die Schillerfarbe.

Obgleich also auch die Vibrationsrichtung des Farbenschillers orientirt ist, so erscheint es doch nicht möglich, den früher besprochenen orientirten Flächenschiller auf analoge Weise durch Spaltungslamellen zu erklären.

Auf der Theorie der dünnen Blättchen ist nur noch jene Farbenerscheinung basirt, welche Irisiren genannt wird, und die an Spaltungsstücken mit inneren Hohlräumen sichtbar ist. Auch hier hängt die Farbe wie beim Newton'schen Farbenglase von der Dicke der Schichte und der Interferenz der Strahlen ab.

§. 54. Fluorescenz und Phosphorescenz. Der reflectirte Lichtstrahl erleidet ausser den bisher erwähnten Phänomenen noch eine Aenderung der Oscillationsdauer durch den Einfluss der Materie. Dieses Phänomen, welches sich dadurch ausspricht, dass die Farbe des reflectirten Lichtes dem Roth näher liegt als das einfallende Licht, nennen wir Fluorescenz. Es tritt hier nicht, wie bei dem vorher betrachteten Metallschiller eine vom Incidenzwinkel abhängige Zerlegung des eingefallenen Lichtes in seine farbigen Componenten auf, sondern nur eine

[1]) Brewster Ueber Opalisiren wegen paralleler Höhlungen. Report British Association. XIV. 1844. pag. 9.

[2]) Hessel. Karstner's Archiv X, 273. 1827.

[3]) Nils Nordenskiöld. Karstner's Archiv XIX, 179. 1830.

[4]) Reusch. Pogg. Ann. vol. 116, 392. vol. 118, 256. vol. 120, 95.

Platincyanüre, von welchen namentlich das rothe pyramidale Magniumplatincyanür auf allen seinen Flächen bei $i = 45^0 - 50^0$ gleichmässig sich mit einem stahlblauen in der Einfallsebene schwingenden, sehr kräftigen Schiller überzieht.

Bei diesen und mehreren anderen Beispielen ist die Reflexionsfarbe die Complementärfarbe zu der Absorptionsfarbe, und man kann für solche Körper wohl annehmen, dass an der Trennungsfläche nicht bloss eine Trennung der Vibrationsrichtungen, sondern auch eine der Vibrationsgeschwindigkeiten und Grössen erfolge. Jener Antheil des gebrochenen Strahles, welchen der Körper vermöge seiner Molekularstructur und Distanz der Moleküle nicht fortzupflanzen vermag, wird reflectirt, der Rest hievon wird sich im Körper fortpflanzen und die Absorptionsfarbe erzeugen.

Ausser diesem allgemeinen Oberflächenschiller bestehen noch Arten des Schillers, welche unabhängig von der Einfallsebene, hingegen immer parallel einer krystallographischen Axe schwingen.

Da dieser sogenannte orientirte Flächenschiller auch in Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene d. i. im normal reflectirten Strahl aufzutreten vermag, so ist derselbe nicht wie der Oberflächenschiller entstanden, indem der aus dem Innern kommende Lichtstrahl (Vibrationen senkrecht zur Reflexionsebene) an seiner Bildung wenig Antheil nehmen.

Man ist somit gezwungen anzunehmen, der orientirte Flächenschiller entsteht durch die Zerlegung des einfallenden Strahles bezüglich Richtung und Grösse seiner Vibrationen (Farbe) nach krystallographischen Richtungen, von welchen der Körper nur einen bestimmten Antheil durchgehen lässt, den übrigen reflectirt. So lässt das oben erwähnte Magniumplatincyanür von allen jenen Strahlen, deren Vibrationsrichtung mit der pyramidalen Hauptaxe parallel sind, nur den rothen Antheil durchgehen und reflectirt die grüngefärbten Strahlen. Analog bei dem gelben Calciumplatincyanür, welches auf den Prismenflächen einen blauen parallel der Prismenkante orientirten Flächenschiller zeigt.

Dieser orientirte Flächenschiller scheint somit auch die Complementärfarbe zu der Körperfarbe zu sein, und wie Haidinger [1]) nachgewiesen, stimmt seine Polarisationsrichtung mit der Richtung des mehr absorbirten Strahles, was nothwendig ist, indem eben von diesem letzteren ein Theil seines Spectrums reflectirt wird.

Theilweise verschieden von diesem einfärbigen Metallschiller sind jene buntfärbigen Reflexe oder bläulichen Lichtscheine entstanden durch innere Reflexe, welche manche Mineralien nach bestimmten Richtungen

[1]) Haidinger. Sitsb. d. Wien. Acad. 1848. I, 89

darbieten, und die wir Farbenschiller nennen. Bekannt ist allgemein der Farbenschiller: buntfarbig am Labrador, kupferroth am Hypersthen, lichtblau an Adular, Chrysoberyll, die Farben des Opal.

Brewster wollte die Farben am Labrador und Opal[1] durch interponirte Poren; Scherer suchte durch die Annahme eines interponirten fremden Minerals (Eisenglanz, nach Kenngott Göthit) den Schiller des Sonnenstein zu erklären.

Hessel[2] hat den Farbenschiller auf Reflex von inneren zahlreichen Lamellen zurückgeführt, hingegen Nils Nordenskiöld[3] denselben nur als eine Function der Oberfläche unabhängig von inneren Reflexen dargestellt. Nach den Untersuchungen von Reusch[4] ist die erstere Ansicht die richtige. Der Farbenschiller entsteht durch zahllose Blätterdurchgänge, welche das eingefallene Licht reflectiren. Die Farbe des Schillers wird daher eine Interferenzfarbe aus den zahlreichen reflectirten Strahlen darbieten und daher im Allgemeinen als Farbe dünner Krystallblättchen (vide Kap. XV) bezeichnet werden, welche wie bekannt der Dicke der Blättchen, also hiermit der Nähe der Spaltungsrichtungen entspricht. Untersucht man den Farbenschiller mit der dichroskopischen Loupe, so scheint das den inneren Durchgängen parallel schwingende Bild das hellere; es werden somit die zu den Theilungsflächen senkrechten Strahlen am meisten gestört und geben die Schillerfarbe.

Obgleich also auch die Vibrationsrichtung des Farbenschillers orientirt ist, so erscheint es doch nicht möglich, den früher besprochenen orientirten Flächenschiller auf analoge Weise durch Spaltungslamellen zu erklären.

Auf der Theorie der dünnen Blättchen ist nur noch jene Farbenerscheinung basirt, welche Irisiren genannt wird, und die an Spaltungsstücken mit inneren Hohlräumen sichtbar ist. Auch hier hängt die Farbe wie beim Newton'schen Farbenglase von der Dicke der Schichte und der Interferenz der Strahlen ab.

§. 54. Fluorescenz und Phosphorescenz. Der reflectirte Lichtstrahl erleidet ausser den bisher erwähnten Phänomenen noch eine Aenderung der Oscillationsdauer durch den Einfluss der Materie. Dieses Phänomen, welches sich dadurch ausspricht, dass die Farbe des reflectirten Lichtes dem Roth näher liegt als das einfallende Licht, nennen wir Fluorescenz. Es tritt hier nicht, wie bei dem vorher betrachteten Metallschiller eine vom Incidenzwinkel abhängige Zerlegung des eingefallenen Lichtes in seine farbigen Componenten auf, sondern nur eine

[1] Brewster Ueber Opalisiren wegen paralleler Höhlungen. Report British Association. XIV. 1844. pag. 9.

[2] Hessel. Karstner's Archiv X, 273. 1827.

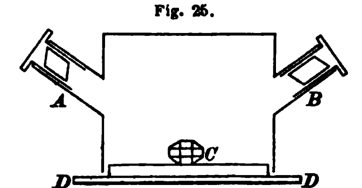
[3] Nils Nordenskiöld. Karstner's Archiv XIX, 179. 1830.

[4] Reusch. Pogg. Ann. vol. 116, 392. vol. 118, 256. vol. 120, 95.

durch die Substanz bewirkte Vergrösserung der einfallenden Wellenlänge. Der Beweis für die Abhängigkeit des Phänomens vom einfallenden Lichte lässt sich dadurch geben, dass es mittelst der Fluorescenz möglich wird, die unsichtbaren ultravioletten Strahlen in leuchtende violette bis grüne umzuwandeln. Ueberhaupt liegt die Fluorescenzfarbe, wenn sie auftritt, immer dem rothen näher als der einfallende Strahl, und um so näher, je mehr sich letzterer selbst dem Roth nähert. Die Ursache der Fluorescenz kann daher nur in einer Verzögerung der Vibrationsdauer $\tau$ des einfallenden Strahles durch die Körpermoleküle liegen, welche eine gleichmässige Vergrösserung der Wellenlänge zur natürlichen Folge hat. Untersucht man das Spectrum der Fluorescenzstrahlen mittelst eines Prisma, so erkennt man, dass nicht bloss eine Farbe in demselben vertreten ist, sondern vielmehr nahezu das ganze Spectrum. Es überwiegt jedoch in Folge der Aenderung der ultravioletten Strahlen, der Theil des Spectrums zwischen grün und violett an Intensität, daher auch die Fluorescenzfarben meist grün, blau oder violett sind.

Sieht man von der Fluorescenz der Lösungen (z. B. alkoholhältige Chlorophyll oder Sulfas Chinin), welche durch Stokes[1]) so vielfältig untersucht wurden, ab, so zeigt auch eine zahlreiche Reihe von Krystallen das Phänomen der Fluorescenz. Namentlich kräftig, selbst bei diffusem Tageslicht, tritt dieselbe bei Calciumplatincyanür[2]) auf, welches auf allen seinen Flächen, namentlich aber bei blauer oder violetter Beleuchtung, in hellem Smaragdgrün leuchtet. Ebenso bieten auch die übrigen Platincyanüre und viele andere Körper die Erscheinung, jedoch schwächer dar. Solche schwach fluorescirende Körper können dann nicht im diffusen Tageslichte, sondern nur in der Dunkelkammer untersucht werden. Grailich construirte, um diese zu vermeiden, eine dunkle Kapsel. Durch den Arm $A$ fällt Licht ein, welchem man entweder durch färbige Gläser oder ein vorgestecktes Prisma beliebige Farbe und durch ein Nikol'sches Prisma beliebige Polarisationsrichtung geben kann. Das Licht beleuchtet den auf dem beweglichen und drehbaren Boden aufgeklebten Krystall und dieser wird durch den Arm $B$ beobachtet, wo wieder ein Nikol angebracht werden kann.

Fig. 25.




Sucht man die Vibrationsebene der Fluorescenzstrahlen zu bestimmen, so ist dieselbe bei den einfach brechenden Körpern wohl meist parallel der Reflexionsebene, bei doppelbrechenden Körpern lehren die Versuche jedoch bestimmt (vergl. Calcium Platincyanür), dass, wie

[1]) Stokes. Pogg. Ann. Ergänzungsband IV. pag. 177.
[2]) Grailich. Kryst. opt. Untersuchungen. Preisschr. 1858.

der orientirte Flächenschiller auch die Fluorescenz unabhängig von der Einfallsebene und parallel einer Krystallaxe schwingt und überdiess die Schwingungen der Fluorescenz zu jenen des Flächenschiller senkrecht sind. Da die doppelbrechenden Körper nach den drei Dimensionen verschiedenes optisches Verhalten darbieten, so ist auch voraussichtlich die Fluorescenz nach den drei Krystallaxen eine verschiedene. Die Untersuchungen Grailich's (l. c.) zeigen hiermit übereinstimmend, dass die Intensität der Fluorescenzfarben für Vibrationen parallel verschiedenen Richtungen auch eine verschiedene ist.

Da wir hierdurch die Thatsache einer orientirten Fluorescenz kennen lernen, so tritt nochmals die Frage heran, ob die Fluorescenz und der Flächenschiller, da sie vieles Gemeinsame in der Erscheinung darbieten, nicht auf ähnliche Ursachen zurückzuführen sind. Diess ist kaum möglich, denn abgesehen von dem Auftreten der Fluorescenz im Ultraviolett sind die wichtigen trennenden Merkmale bei der Erscheinung: 1. die Abhängigkeit des Flächenschillers vom Haupt-Incidenzwinkel, während Fluorescenz im senkrecht auffallenden Lichte am hellsten auftritt; 2. die Farbe des Schiller ist eine metallische (Reflexions-) Farbe, und complementär zur Absorptionsfarbe, während jene der Fluorescenz die eines opaken leuchtenden Körpers ist, und meist grün und violett, ohne Beziehung zur Körperfarbe ist. Man muss daher, wie wir gethan, den Metallschiller auf die Zerlegung des einfallenden Strahles in seine farbigen Componenten, hingegen die Fluorescenz auf einen Beginn des Selbstleuchtens des Körpers zurückführen.

Fluorescenz und Flächenschiller dauern beide nur so lange, als die Dauer des einfallenden Lichtes; es wird jedoch noch eine dritte, der Fluorescenz analoge Erscheinung beobachtet, welche selbst nach dem Erlöschen des einfallenden Lichtes noch mehr oder minder lange Zeit fortzudauern vermag. Wir nennen dieselbe Phosphorescenz. Die Erscheinung, wie sie am calcinirten Baryt, an Flussspath, Diamant, Phosphorit so leicht beobachtet werden kann, besteht darin, dass diese Körper, längere Zeit dem Lichte ausgesetzt, in den einmal erregten Schwingungen (analog schlechten Wärmeleitern) längere Zeit beharren, und dann, in die Dunkelkammer gebracht, leuchten, d. h. selbstthätig Licht emittiren.

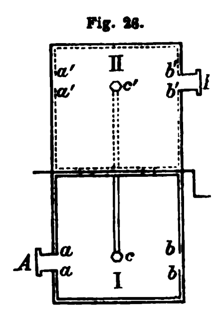
Da durch die Untersuchungen von Becquerel[1]) festgestellt wurde, dass das Phosphorescenzlicht grössere Wellenlänge, d. i. Vibrationsdauer, als das einfallende, also eine gegen roth hin verschobene Farbe besitzt, so ist der Vorgang der Phosphorescenz jenem der Fluorescenz analog, nur von längerer Dauer und noch nach dem Aufhören der Bestrahlung wirkend.

---

[1]) Becquerel E. Ann. d. chim. 1843. IX, 320. 1859. vol. 55, vol. 57.

Man wird daher unter Fluorescenz und Phosphoresenz das beginnende Selbstleuchten des Körpers unter Einwirkung des einfallenden Strahles verstehen können, wobei (analog der Wärmeemission) Vibrationen längerer Dauer oder bei gleicher Dauer geringerer Elongation und Intensität geweckt werden. Becquerel untersuchte die Farbe des von den phosphorescirenden Körpern emittirten Lichtes und fand dasselbe für Diamant gelbblau, für Corund, Spinell, Disthen, Topas (wegen des Gehaltes an Al) roth, für Calcit, Fluorit, Phosphorit (wegen Ca) gelbgrünlich. Die Intensität des Phosphorescenzlichtes war für Rubin 0·068, für Calcit 0·00099 von jenem des Einfallenden. Um die Dunkelkammer zu vermeiden, wendete Becquerel eine dunkle Kapsel an, welche rotirte (Fig. 26). Die Kapsel hat zwei Ausschnitte, *a*, *b*, in deren Verbindungslinie bei *c* der Krystall angebracht ward. Die Kapsel wird in das Innere eines fixen Cylinders gebracht, der bei *A* und *B* Oeffnungen hat. Ist die Kapsel in der Lage I, so fällt das Licht bei *A* ein, beleuchtet den Krystall, ohne dass der Beobachter durch *B* Licht wahrnimmt. In der Stellung II sieht hingegen das Auge *B* den fluorescirenden Krystall.

Fig. 26.




Bei schnellen Rotationen der Kapsel wird in *B* ein Lichtstrahl wahrgenommen werden, der durch ein Prisma auf seine farbigen Bestandtheile untersucht werden kann. Da nach Becquerel's Zeichnungen das Spectrum des Phosphorescenzlichtes je nach dem untersuchten Körper verschiedene helle und dunkle Streifen darbietet, so drängt sich die Vermuthung auf, dass auch die phosphorescirenden Körper ähnlich wie die glühenden (bei der Spectralanalyse) nur Wellen bestimmter Brechbarkeit und vielleicht dieselben wie die glühenden Körper emittiren.

Diese Phosphorescenzerscheinungen sind von grösserer Intensität, doch geringerer Dauer bei rothem einfallenden Lichte, während hingegen die Bestrahlung mit ultraviolettem Lichte längere Dauer der Phosphorescenz mit jedoch geringerer Intensität der Emission hervorruft.

Da aber die Phosphorescenz durch die Erregung von Schwingungen des Körpers erzeugt wird, so sind nebst Insolation auch Erwärmung, mechanische Erschütterung und der elektrische Funken Quellen derselben. Dass die Phosphorescenz durch diese mechanischen Mittel hervorgebracht werden kann, ist ein neuer Beweis zu Gunsten der Molekulartheorie des Lichtes.

# X. Kapitel.

## Licht und Materie. Molekulartheorie des Lichtes.

§. 55. In den vorhergehenden Kapiteln wurden die verschiedenen optischen Phänomene unter der Zugrundelegung einer vom leuchtenden Punkte ausgehenden Wellenbewegung des Lichtes erklärt. Es ward hierbei die Lichtwelle gleichsam als gegeben vorausgesetzt und nur die verschiedenen Modificationen derselben untersucht, welche sie durch die materiellen Körper erleidet. Für eine solche Betrachtungsweise ist es daher vorerst von nur nebensächlichem Werthe, ob man die Vibrationen durch die materiellen Theilchen oder nach der Aetherhypothese etwa durch einen imponderabilen Aether hervorgebracht denkt, indem die beiden Hypothesen zur Erklärung dieser Erscheinungen genügen. Ebenso mag auch die von Cauchy angewandte Methode der mathematischen Darstellung der Fortpflanzung einer entstehenden Schwingung, wobei auf die molekularen Zustände der Materie keine Rücksicht genommen wird, insoweit genügen, als sie die wichtigsten Phänomene der Wellenbewegung in einer für dieselbe genügenden, mathematischen Form darstellt.

Alle diese Vorstellungen genügen hingegen nicht, wenn man die Bedingungen berücksichtigt, welchen jede in der Materie sich fortpflanzende Bewegung unterworfen ist.

Die erste Frage, welche zur Beantwortung vorliegt, ist wohl die nach der Möglichkeit, dass eine in der Millionen Meilen weiten Ferne begonnene Bewegung bis zu uns vordringen kann, ohne dass sich dieselbe bei dem für die Wellenbewegung nothwendigen Uebergange von Theilchen zu Theilchen fast bis zur Unmerkbarkeit abschwäche.

Die gewöhnliche Hypothese der Fortpflanzung der Lichtvibrationen besteht im Wesentlichen darin, anzunehmen, dass durch das Heraustreten der ersten Theilchen aus der Gleichgewichtslage ein Zug oder eine Spannung erzeugt würde, welche hinreiche, auch das nächstfolgende

Molekül aus seiner Lage herauszuziehen. So würde sich analog wie bei einer gespannten Saite die Transversalvibration von Molekül zu Molekül fortpflanzen.

Bei einer solchen Hypothese ist es wohl schwierig einzusehen, wie sich ohne nahezu vollständige Schwächung der initialen Bewegung der primäre Impuls auf Millionen von Molekülen übertragen könne; überdiess beruht eine solche Hypothese aber auch auf der Vorstellung, dass die Moleküle (gleichgiltig, ob etwa von Aether oder Materie) in einer fixen dauernden Verbindung stehen, wie die Theilchen eines Fadens, eine Vorstellung, welche jedoch in der Natur theilweise unbegründet ist.

Nur bei den festen Körpern sind die Moleküle an ein stabiles Gleichgewichtssystem gebunden, innerhalb dessen sie ihre Bewegungen vollführen müssen, bei den flüssigen und noch mehr bei den gasförmigen Stoffen sind die Moleküle in ihren Bewegungen nahezu ungehemmt. Betrachten wir die Gase näher — namentlich als Stoffe, durch welche die Lichtfortpflanzung zumeist und am weitesten geschieht — so sehen wir, dass dieselben nur als Gemenge von frei beweglichen Molekülen aufzufassen sind, deren Wege nur durch den Zusammenstoss mit einem Nachbarmoleküle beschränkt werden. Man kann daher wohl bei festen und flüssigen Körpern eine Wellenbewegung in der Art annehmen, dass das bewegte Theilchen auch das nächstfolgende Molekül aus seiner Ruhelage zieht, allein diess kann für die frei beweglichen Gasmoleküle nicht angenommen werden.

Die Fortpflanzung des Lichtes muss ferner, um die relativ grosse Intensität nach Millionen Meilen des Weges in den Gasen zu zeigen, während eine geringe Schichte eines absolut durchsichtigen festen Mediums bedeutende Quantitäten Lichtes absorbirt, weniger eine Function des leuchtenden Körpers, als vielmehr eine Function der Natur des durchstrahlten Mediums sein.

Beide Bedingungen sind bei näherer Erwägung des Molekularzustandes der Gase erfüllbar.

Sind die Moleküle des Gases in freier, unbeschränkter Bewegung, so wird doch nur dann Gleichgewicht in denselben herrschen, wenn die Summe der Bewegung nach rechts jener nach links gleich kommt. Legt man somit durch irgend ein Molekül ein Coordinatensystem $XYZ$, so werden die Bewegungen nach $X$, $Y$, $Z$ jenen nach $-X$, $-Y$, $-Z$ gleich sein, wenn das Gas äusserlich in Ruhe sein soll.

Es entfällt somit auf jedes Molekül eine bestimmte Quantität Arbeit, welche theils in effectiver Bewegung, theils in Hinderung der übrigen bewegten Moleküle bestehen muss.

Man kann somit sagen, auf jedes Molekül entfällt eine gewisse Summe Arbeit, Druck, Spannung, die es theils auf die übrigen Moleküle ausüben muss oder von denselben erleidet.

Dieser Satz ermöglicht die Lichtfortpflanzung zu verstehen.

Wird nämlich durch die Lichterregung ein Molekül des Gases in eine demselben nicht eigenthümliche Bewegung versetzt, so wird es nicht mehr die ihm nothwendige positive oder negative Arbeit zu leisten im Stande sein; jedenfalls wird es dem (nach Früherem) auf ihn von allen Seiten einwirkenden Drucke keinen Widerstand leisten, genau so, als wenn der Platz des Moleküls plötzlich durch eine äussere Kraft leer geworden wäre. Die angrenzenden Moleküle sind somit nicht in ihrer Bewegung weiter gehindert und werden sich von allen Seiten radial nach diesem sogenannten leeren Raume bewegen. Dieser von den Molekülen nach innen ausgeübte Druck pflanzt sich als eine stehende Welle durch das ganze Medium ohne Schwächung fort, und bewirkt vom Ursprunge der Bewegung bis zur äussersten Grenze eine Verschiebung der einzelnen Moleküle aus ihrer ursprünglichen Bewegung.

Diese Bewegung pflanzt sich genau so wie die Wellen des Lichtes von einem Punkte radial aus, und die Schwingungen der Moleküle werden, wie sich leicht ergibt, $^2/_3$ transversal, $^1/_3$ longitudinal sein. Wir erhalten hierdurch nicht bloss die Transversalschwingungen des Lichtes, sondern auch den evanescirenden Strahl. Gleichzeitig erklärt sich hierdurch die geringe Absorption, welche die Intensität der Bewegung auf selbst grossen Wegstrecken in den Gasen erleidet.

Diese für die Lichtfortpflanzung in den Gasen entwickelten Grundsätze sind wohl auch auf die flüssigen und festen Körper anwendbar; hier jedoch tritt noch die Möglichkeit hinzu, den Impuls des Lichtes auch durch die gegenseitige Anziehung der Moleküle fortzupflanzen. Da bei den festen Körpern die freie Bewegung der Moleküle aufgehoben ist, so wird bei diesen die zuletzt erwähnte Fortpflanzungsart überwiegen, gleichzeitig aber auch die Absorption sich steigern.

Eine weitere Consequenz dieser Anschauungen wäre jedoch die, dass nur bei den festflüssigen Körpern die Geschwindigkeit der Lichtfortpflanzung von der Wellenlänge abhängig sein kann, während bei den Gasen die Molekularverschiebungen jeder Art sich mit fast gleicher Schnelligkeit, also nahezu unabhängig von der Wellenlänge, soweit eben die secundären Störungen nicht in Betracht kommen, fortpflanzen sollen.

Hiermit stimmt auch im Allgemeinen die Erfahrung, indem die Brechungsexponenten der Luft von roth bis violett von 1·000292 bis 1·000300, hingegen die eines festen Körpers von etwa 1·45 — 1·50 variiren. Im ersten Falle beträgt somit die Variation der Geschwindig-

keit des Lichtes für die verschiedenen Farben kaum $^3/_{10}$ Meilen, während die Verzögerung in den festen Körpern von roth zu violett etwa 2000 bis 8000 Meilen beträgt.

Doch zeigt eine einfache Betrachtung, dass auch in den Gasen die Fortpflanzung des Lichtes nicht vollkommen unabhängig von der Vibrationsdauer sein könne [1]).

Bekanntlich ist nach Früherem $\lambda = v\tau$, ebenso wird auch der Weg (Elongation) $s$ des Gasmoleküls sich als Function seiner Geschwindigkeit und der Zeit, also $s = c\tau$ darstellen lassen. Es verhalten ich somit

$$v_\rho : v_v = \frac{\lambda_\rho}{\tau_\rho} : \frac{\lambda_v}{\tau_v} = \frac{\lambda_\rho c_\rho}{s_\rho} : \frac{\lambda_v c_v}{s_v} \tag{97}$$

Die Wege $s$ der Moleküle sind im Gase unbeschränkt, ebenso sollen nach obigen auch $\lambda_\rho$ $\lambda_v$ gleichwerthig sein, man erhielte daher

$$v_\rho : v_v = c_\rho : c_v \tag{97a}$$

Somit würde die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für verschiedene Farben verschieden sein, unter der wohl richtigen Voraussetzung, dass auch die Schnelligkeit der Bewegungen der Moleküle für die einzelnen Farben eine variable sei.

Weiter folgt hieraus, da $\tau_\rho > \tau_v$, und $c_\rho > c_v$, dass auch $s_\rho > s_v$, d. i. die Amplituden für rothe Strahlen sind grösser als jene für violette. Es stimmt diess mit den Wirkungen, welche die transversale Molekularbewegung ausübt. Wie wir später bei der Theorie der Wärme sehen werden, ist dieselbe eine Function der ultrarothen Strahlen, d. i. jener der grössten Amplituden, und wird somit den äusseren Sinnen wahrnehmbar — die Amplituden von $\lambda_\rho$ und $\lambda_v$ sind dem Auge als Licht wahrnehmbar — während die kleinsten Amplituden nur mehr chemische Wirkungen erzeugen.

Es stimmen somit auch die physiologischen Erscheinungen mit diesem Versuche der Erklärung der Lichtfortpflanzung, und letztere mag daher in erster Annäherung, wenn man die Störungen vernachlässigt, als genügend anzusehen sein.

§. 56. Beziehungen zu den Molekularconstanten. Durch den vorhergehenden Paragraph ward die Möglichkeit der Fortpflanzung des Lichtes durch die Körpermoleküle angedeutet. Um eine durch Zahlen ausdrückbare Gleichung zu erhalten, welche die Einwirkung der Moleküle auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ihrer Schwingungen darstellt, kann ein indirecter Weg gewählt werden.

---

[1]) Analoge Verhältnisse scheinen auch auf dem Gebiete des Schalles aufzutreten. Für letzteren fand Schröder v. d. Kolk (Pogg. Ann. 124, pag. 453), dass dessen Geschwindigkeit eine Function der Intensität wäre, was keineswegs der Poisson'schen Theorie widerspricht, indem letztere eben den bestimmenden Factor, „die Vibrationsgeschwindigkeiten" vernachlässigt hat.

Die bei einer Schwingung auftretenden Grössen sind bekanntlich $\lambda$, $v$, $\tau$, $s$, und die Geschwindigkeit $C$ während der Vibrationsdauer. Bekanntlich wird letztere beim Maximum der Elongation Null, dann negativ, also nach (59) ausdrückbar durch

$$C = \frac{dy}{dx} = \frac{2s\pi}{\tau} \cos \frac{2\pi}{\tau} t = \frac{2s\pi}{\tau} - \frac{8\pi^3 s}{\tau^3} t^2 \qquad (98)$$

Nun haben wir aber bereits im früheren Paragraphe auf die Anwendung von Oscillationen als solche theilweise verzichtet, und es ergibt sich auch hier eine einfachere Relation, wenn man bloss den positiven Theil der Elongation für sich betrachtet und mit dem gleichzeitig zurückgelegten Weg des Lichtes $\frac{\lambda}{4}$ vergleicht. Führt man diess durch, so kann man ohne Rücksichtnahme auf die continuirliche Verzögerung den positiven Weg der Elongation $s$ hervorgebracht denken durch eine constante Geschwindigkeit $c$ (Molekular- oder Vibrationsgeschwindigkeit), welche während $\frac{\tau}{4}$ gewirkt hat.

Während nach den Annahmen der Lichttheorie die Oscillationsdauer von Medium zu Medium gleich bleibt, so wird sich hingegen $s$ und ihm auch $c$ continuirlich verändern, was auch erhellt, wenn man (98) nach $\tau$ entwickelt, die höheren Potenzen von $\tau$ aber vernachlässigt. Vernachlässigt man alle constanten Factoren, so kann man in Folge dieser Ausführungen sagen

$$s = c\tau \qquad \lambda = v\tau. \qquad (99)$$

Eine Kraft somit, welche ein Massentheilchen $m$ mit der Geschwindigkeit $c$ um die Elongation $s$ aus dem Gleichgewichte zu bringen versucht, wird ausdrückbar sein durch

$$x = mc^2 = \frac{ms^2v^2}{\lambda^2} \qquad (100)$$

Diese Kraft wird in den verschiedenen Körpern verschieden sein müssen, da eben der Widerstand in den einzelnen Stoffen ein anderer sein wird. Fasst man diese Kraft als den Unterschied der ursprünglich wirkenden und der verzögernden Kräfte auf, so kann man setzen

$$\left(\frac{1}{x_w - x_v}\right) = \frac{\lambda^2}{ms^2v^2}$$

Vergleicht man dieselbe Masseneinheit $m$ in mehreren Aggregatzuständen, z. B. als Gas und festen Körper, so werden die Molekular-

[1]) Vergl. Schrauf. Physikalische Studien. Kap. II.

veränderungen auch mit Veränderungen der Lichtgeschwindigkeit verbunden sein. Es wird somit

$$\left(\frac{1}{x'_w - x'_v}\right) - \left(\frac{1}{x_w - x_v}\right) = \frac{\lambda_1^2}{ms_1^2 v_1^2} - \frac{\lambda^2}{ms^2 v^2}$$

Postulirt man für $v$ einen solchen Aggregatzustand der identischen Materie, so dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $v$ mit der des sogenannten leeren Raumes coincidirt, so ist auch $s$ die Elongation und $\lambda$ die Wellenlänge bezüglich eben desselben.

Bekanntlich ist ferner, wenn $\mu$ den Brechungsexponenten darstellt, nach (48a)

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\mu}$$

Ebenso ist es auch möglich, $s'$ als eine Function von $s$ darzustellen, denn in Folge des Satzes 97

$$v_\rho : v_\nu = c_\rho : c_\nu$$

werden sich auch verhalten für gleiche $\tau$

$$s' : s = c : c' = v : v'$$

wodurch analog wie für $\lambda'$ auch für $s'$ in einem zweiten Mittel gesetzt werden kann $\frac{s}{\mu}$ d. h.

$$s' = \frac{s}{\mu} \tag{101}$$

ein für die **Absorption** wichtiger Satz (vergl. pag. 131).

Substituirt man also für $\lambda'$ und $s'$ ihre Werthe, bedenkt dass die wirkenden Kräfte $x_\omega$ und $x'_\omega$ gleich gesetzt werden können, dass weiter für den sogenannten leeren Raum, wo $\lim v = \infty$ auch $\lim x_\nu = o$ gelten müsse, so wird als Relation folgen

$$X_\nu = \frac{x'_\nu}{x_\omega\,(x_\omega - x'_\omega)} = \frac{\lambda^2}{ms^2 v_1^2} - \frac{\lambda^2}{ms^2 v^2}$$

wobei der Ausdruck für die verzögernden Kräfte gleich $X_\nu$ gesetzt ist, derselbe bewerthet sich zu

$$\frac{x'_\nu}{x_\omega\,(x_\omega - x'_\nu)} = \frac{1}{x_\omega}\,\Sigma_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{x'_\nu}{x_\omega}\right)^n = X_\nu \tag{102}$$

Führt man in obige Gleichung den Brechungsexponenten ein, so ergibt sich

$$ms^2 X_\nu \frac{v^2}{\lambda^2} = \frac{v^2}{v_1^2} - \frac{v^2}{v^2} = \mu^2 - 1 \tag{103}$$

Diese Gleichung constatirt eine Relation zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes und messbaren, theilweise der Materie angehörenden Grössen, da (wie wohl zu bedenken ist) $m$ in (100) nicht etwa ein Imponderabile nach Analogie der Aethertheorie, sondern die Masse des Körpers selbst bedeutet.

Substituirt man für die Masse des Körpers dessen Dichte $D$ und Volumen $V$, so erhält man

$$\mu^2 = 1 + VDX_v \frac{v^2 s^2}{\lambda^2} \tag{103a}$$

Für das Volumen des Körpers können nun zwei Ausdrücke gesetzt werden, welche gleiche Berechtigung haben.

Setzt man für das Volumen eine Function der atomistischen Anordnung der kleinsten Theile, so wird dasselbe ausgedrückt durch das Product aus Zahl und Grösse der Moleküle, also

$$V = ZG \tag{104}$$

wodurch wird

$$\mu^2 = 1 + DZGX_v \frac{v^2 s^2}{\lambda^2} \tag{105}$$

oder zweitens kann auch das Volumen nach dem im 2. Kapitel Gesagten als eine reciproke Function des Aequivalents $P$ des betreffenden Stoffes, also

$$V = \frac{C}{P} \tag{104a}$$

angesehen werden, wodurch

$$\mu^2 = 1 + D \frac{C}{P} X_v \frac{v^2 s^2}{\lambda^2} \tag{105a}$$

wird.

Die durch diese Deductionen gewonnene Formel zeigt in ihrem Baue und als Function der Dichte bereits grosse Analogie mit der auf Grund der allgemeinen Untersuchungen abgeleiteten Formel (68 und 69).

§. 57. Licht und Wärme. Variationen der Amplitude und Wellenlänge. Die in obiger Formel auftretenden Grössen $s$ $x_w$ $x_v$ stehen in einem Connex mit der Vibrationsdauer, welcher namentlich durch die Beobachtungen von Tyndall[1]) aufgehellt ward.

Wohl ist das Augenmerk des letzteren mehr auf die thermischen Wirkungen gerichtet, allein seine Messungen der Wärmeintensität gewinnen dadurch an Werth, dass sie erstens Quantitätsbestimmungen unabhängig von der Nerventhätigkeit unseres Auges sind und zweitens die Identität von Licht und Wärme beweisen.

---

[1]) Tyndall. Pogg. Ann. 1865, vol. 124, pag. 57.

Die bisherigen Quantitätsbestimmungen von Licht ergaben das Maximum der Helligkeit in dem Theile des Spectrums bei der Fraunhofer'schen Linie *E*, einem Theile, welcher gleichsam der Quart der grössten sichtbaren Wellenlänge entspricht; doch folgt aus den Versuchen weiter nichts, als dass der Sehnerv durch die an dieser Stelle auftretenden Vibrationen am meisten afficirt wird. Diess allein kann aber über die Intensität der Schwingung nicht entscheiden, da sowohl ultrarothe und ultraviolette Vibrationen existiren, welche unter Umständen selbst bei der grösstmöglichen Intensität keinen Eindruck auf den Sehnerv machen, sowie es andererseits Personen gibt, welche an anormalen Zuständen des Sehnervs leiden und im Vergleiche mit anderen Menschen das Spectrum mehr oder minder ausgedehnt sehen, oder für ganze Partien desselben, welche doch gewiss Intensität besitzen, unempfindlich und farbenblind sind.

Um Bestimmungen wahrer Intensität zu machen, ist es wohl vor Allem nöthig, dass das Messinstrument für jede Schwingung gleichmässig empfindlich sei und den Umsatz der Vibrationen in eine andere messbare Erscheinungsweise ohne Verlust bewerkstellige.

Die Untersuchungen von Tyndall geben bei der durch sie gleichzeitig bewiesenen Identität von Licht und Wärme an die Hand, für die Intensitätsmessungen der optischen Strahlen die der thermischen zu substituiren.

Tyndall fand das Maximum der Wärme ausserhalb roth entsprechend der relativen Zahl 12, an der Grenze des Roth sank es auf 4, um von da schnell bis zur Unmerklichkeit abzunehmen[1]).

Vergleicht man nun mit dieser Beobachtung den Gang der Wellenlängen, wie derselbe im §. 43 dargestellt ward, die rasche Zunahme derselben im rothen Ende, wo sich auf einem sehr beschränkten Raume alle Wellenlängen von roth bis $\infty$ zusammenhäufen, so kann man hieraus die Folgerung ziehen, dass die Intensität den Messungen Tyndall's zufolge eine ähnliche Curve wie die Quadrate der Wellenlänge beschreibe. Eine weitere Folgerung wird sein, dass die Wärme nur eine Function der Molekularbewegung mit grösster Amplitude sei, während Licht von Bewegungen mit kleinerer Elongation erzeugt wird, wodurch also für beide Agentien ihre qualitative Identität bewiesen ist.

Gehört auch letztere Folgerung auf das Gebiet der strahlenden Wärme, so genügt doch erstere, um über den Werth der Amplitude in der obigen Gleichung (105) zu entscheiden.

Da die von der Amplitude (zugleich Mass der Intensität) beschriebene Curve im Spectrum erhalten bleiben muss, wenn auch die

[1]) Wärmespectrum von Müller. Pogg. Ann. 105, pag. 340, etwas abweichend, aber ungenau.

die Intensität steigt, so wird man für die Amplitude eine Function substituiren können, welche aus einem von $\lambda^2$ abhängigen oder unabhängigen Gliede der allgemeinen Form besteht[1])

$$s^2 = A\,(a + b\lambda^2)$$

Ein zweiter Factor in der allgemeinen Gleichung (105) für $\mu^2$ ist die Function $X_v = \frac{x_v}{x_w\,(x_w - x_v)}$.

Die wirkende Kraft $x_w$ könnte wohl mit der Intensität oder $s^2$ in Relation gedacht werden, allein da hierüber keine bestimmte Beziehung aufgestellt werden kann, so muss dieselbe den Charakter einer willkürlichen Constanten beibehalten.

Für die verzögernde Kraft $x_v$ ergeben sich jedoch einige Folgerungen aus den Beobachtungen von Tyndall über die verzögernde Kraft eines Mittels für verschiedene Wellenlängen, d. i. Wärme und Licht. Er zeigte, dass die thermischen Wirkungen in bedeutend näherer Distanz aufhören, als die optischen. Mag diess auch theilweise in der grösseren Empfindlichkeit des Sehnerves begründet sein, so kann doch andererseits nicht geläugnet werden, dass, wie die Intensität mit der Vibrationsdauer steigt, auch andererseits die verzögernden Kräfte für solche Schwingungen grösser werden.

Man könnte vielleicht allgemein sagen, dass auch

$$\frac{x_v}{x_w\,(x_w - x_v)} = f\,(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\lambda + \ldots)$$

sei.

Hierdurch sind die in der Gleichung (105) auftretenden Variablen $s$, $x_v$ auf Functionen der einen independenten Variablen $\lambda$ und hierdurch zugleich auf $\tau$ zurückgeführt. Letzteres ist, da $\tau$ in allen Medien ident ist, wohl das richtigere; allein der Sprachgebrauch hat sich an die Einführung der Wellenlänge gewöhnt.

§. 58. Refractions- und Dispersionsvermögen. Substituirt man die im vorigen Paragraphe gewonnenen Resultate in Gleichung 96 so kann man sagen

$$\mu^2 = 1 + ZGD\left[M + C'\left(\frac{N}{\lambda}\right)^2\right] \tag{106}$$

in welcher Gleichung $M$ das Refractionsvermögen, und zwar wegen der Analogie mit der von Newton aufgestellten Function Newtonsches[2]), ferner $N$ das Dispersionsvermögen genannt wird.

---

[1]) Vergl. Schröder v. d. Kolk Pogg. 124.

[2]) Ueber die Biot'sche Formel $\mu = 1 + DC$ vergleiche Schrauf. Phys. Studien und Schrauf. Refractionsäquiv. der Grundstoffe, 1864. Sitzungsb. der Wiener Acad.

Setzt man für das Minimum der Deviation $\lambda^2$ unendlich, so ist $\mu = \sqrt{1 + DM}$ der Werth für die Grenze der möglichen Brechung.

Aus dieser Gleichung folgt $M$ und $N$ durch nachstehende Gleichungen:

$$(107) \qquad \mathfrak{R}^2 = 1 + CDM = \left( \frac{\mu_\rho^2 \frac{\lambda_\rho^2}{\lambda_v^2} - \mu_v^2}{\frac{\lambda_\rho^2}{\lambda_v^2} - 1} \right)$$

$$\mathfrak{D}^2 = C'DN^2 = \left( \frac{\mu_v^2 - \mu_\rho^2}{\frac{1}{\lambda_v^2} - \frac{1}{\lambda_\rho^2}} \right)$$

wo $\mathfrak{R}^2$ den Refractionscoefficienten, $\mathfrak{D}^2$ den Dispersionscoefficienten der Formel

$$(108) \qquad \mu^2 = \mathfrak{R}^2 + \frac{\mathfrak{D}^2}{\lambda^2}$$

bezeichnet. (Vergl. Formel 76, pag. 100).

Eine weitere Untersuchung der Werthe $M$ und $N$ lehrt deren Abhängigkeit von den materiellen Theilchen. Es folgt nämlich aus den Vergleichungen von 105 und 106 die Relation

$$(109) \qquad \frac{\mu^2 - 1}{D} = ZGX_v f\left(\frac{v^2 s^2}{\lambda^2}\right) = M$$

ein Ausdruck, der unter der Voraussetzung gleicher $v$, $s$, $\lambda$ nur mehr eine Function der verzögernden Kraft für einen und denselben Körper ist.

Ich habe nun in ausführlichen Untersuchungen [1]) die gesetzmässigen Beziehungen der Fortpflanzung des Lichtes zur Dichte erörtert und bewiesen, dass *das Brechungsvermögen einer Substanz für die verschiedenen Variationen der Dichte, ein constantes ist, dass somit die verzögernde Kraft einer Substanz bei gleicher innerer atomistischer Zusammensetzung constant bleibt.*

Dieselben Untersuchungen lehren ferner [2]), dass auch das Dispersionsvermögen

$$(110) \qquad N = \sqrt{\frac{\mathfrak{D}^2}{D}}$$

eine für den Körper in seinen verschiedenen Zuständen constante Grösse sei.

Bezüglich der durch krystallographische Symmetrieverhältnisse gebotenen Erweiterung dieser Formel vergleiche Kapitel XVII.

---

[1]) Schrauf. Physikalische Studien. Kap. IV.

[2]) Schrauf. l. c, 108, wo die Nothwendigkeit der Annahme von $N^2$ in Formel 110 bewiesen wird.

Die Constanz der Grössen $M$ und $N$ zeigt sich nicht bloss bei geringen, durch Druck, Temperaturerhöhung und ähnlichen Veränderungen der Dichte, sondern auch in jenen Fällen, wo die Veränderung der Dichte bei gleich bleibender atomistischer Gruppirung dennoch mit Aenderungen des Molekularzustandes verbunden ist. Als Beispiele [1] mögen gelten:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Wasser | flüssig | $D = 1{\cdot}0$ | $\mu_{\gamma\lambda} = 1{\cdot}3330$ | $M = 0{\cdot}0010048$ |
| „ | gefroren | $= 0{\cdot}9181$ | $= 1{\cdot}3089$ | $= 0{\cdot}0010046$ |
| Phosphor | fest | $D = 1{\cdot}8335$ | $\mathfrak{R} = 2{\cdot}02497$ | $\mathfrak{D}^2 = 0{\cdot}01953$ |
| „ | flüssig | $= 1{\cdot}755$ | $= 1{\cdot}96449$ | $= 0{\cdot}01735$ |
| „ | fest | $M = 0{\cdot}0021807$ | $N^2 = 0{\cdot}013907$ | |
| „ | flüssig | $= 0{\cdot}0021055$ | $= 0.013194$ | |

Die Constanz der Werthe von $M$ und $N$ spricht sich durch diese Zahlen genügend aus. Zur Berechnung wird die Luft als Einheit der Dichte zu Grunde gelegt, daher die beobachteten Dichten fester Körper mit 773·47 multiplicirt werden.

Aus der Gleichung (109) erhellt aber ferner, dass der Werth von $M$ auch eine Function von $ZG$, d. i. Zahl und Grösse der Atome ist, und daher nur so lange constant sein kann, als sich in dem betreffenden Körper nicht das atomistische Gefüge ändert. Würden sich jedoch die Atome im Moleküle selbst ändern, so müsste proportional hiermit auch das Brechungsvermögen sich ändern.

Letzteres tritt bei Vergleichung mehrerer Substanzen im festen und gasförmigen Zustande auf.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Schwefeldampf | $d_g = 6{\cdot}617$ | $\mu = 1{\cdot}001629$ | $M = 0{\cdot}000492$ |
| fest | $D_f = 2{\cdot}065$ | $\mu = 2{\cdot}053$ | $= 0{\cdot}002017$ |
| Phosphordampf | $d_g = 4{\cdot}355$ | $\mu = 1{\cdot}001364$ | $M = 0{\cdot}000626$ |
| fest | $D_f = 1{\cdot}823$ | $\mu = 2{\cdot}106$ | $= 0{\cdot}002437$ |

Die scheinbare Ungleichheit des Brechungsvermögens für die verschiedenen Molekularzustände klärt sich jedoch auf, wenn man das vierfache Multiplum von $M_g$ mit $M_f$ vergleicht, es ist

| | | | |
|---|---|---|---|
| Schwefel | $M_g = 492$ | $4M_g = 1968$ | $M_f = 2017$ |
| Phosphor | $M_g = 626$ | $4M_g = 2504$ | $M_f = 2437$ |

Man ersieht aus dieser Zusammenstellung, dass die Functionen in ihrem einfachen Multiplum so nahe übereinstimmen, dass man die Differenzen der Nichtidentität der beobachteten Farben zuschreiben kann.

[1] Schrauf. l. c. 70—72.

Will man, die Möglicheit wäre vorhanden, die beobachteten Dampfdichten nicht reduciren, so ergibt sich als Resultat und Verallgemeinerung der Constanz des Brechungsvermögens der Satz:

„Das Brechungsvermögen jedes Körpers ist constant oder ein Multiplum hiervon mit den einfachsten Factoren aus der Reihe der natürlichen Zahlen.“

$$\varrho \left( \frac{\mu^2 - 1}{D} \right) = M \tag{111}$$

Ein analoger Satz gilt für das Dispersionsvermögen, und mit den Buchstaben $\varrho$, $\delta$ werden die Coefficienten dieser Refractions- oder Dispersionscondensation bezeichnet.

Der Grund einer solchen Refractionscondensation ist bereits durch die Gleichung 105 angegeben, da in Folge derselben die Variation der Zahl und Grösse der Atome eines Körpers auch die Variationen des Refractionsvermögens hervorbringen muss.

Vergleicht man also die optischen Werthe eines Körpers in zwei seiner verschiedenen atomistischen Zuständen, z. B. Gas und Fest, so werden sich dieselben verhalten wie

$$M_a : M_b = ZG_a X_v^a : ZG_b X_b^v \tag{112}$$

Nun sind über die Variation der Grössen $ZGX_v$ mehrere Annahmen möglich. Die erste, die sich darbietet, ist, $X_v$ von den Eigenschaften der Stoffe abhängig zu machen; allein da bereits alle Grössen der Materie selbst in der Gleichung vertreten sind, so muss man annehmen, $X_v$ wäre nur noch von den chemischen Eigenschaften abhängig. Ohne nun hier schon diese letztere Hypothese, welche Gegenstand des nächsten Kapitels sein wird, zu untersuchen, so lässt sich schon hieraus entnehmen, dass für einen und denselben Körper auch in seinen verschiedenen Molekularzuständen $X_v$ gleich bleiben muss. Es verhalten sich somit nach obiger Gleichung für einen und denselben Körper

$$M_a : M_b = ZG_a : ZG_b$$

und wir sehen somit den Grund der Variation der Werthe von $M$ bei Schwefel, Phosphor in einer verschiedenen atomistischen Gliederung und können für dieselben sagen, dass

$$M_g : M_f = 1 : 4 = ZG_g : ZG_f = 1.2 : 8.1$$

Die constante Einheit der Masse ist hier sehr wohl durch 1 Molekül der Grösse 2 oder durch 8 Moleküle der Grösse 1 ausdrückbar, da das Volumen eines kugelförmigen Atoms durch die dritte Potenz des Radius gegeben ist. Die Refractionscondensation wird sodann die zweite Potenz des Divisors vom Radius der Moleküle sein. Dem Werthe von

$\varrho = 2$ entspräche sodann eine Veränderung der Atomgrösse um nahezu $^1/_5$ des Werthes.

§. 59. Refractions- und Dispersionsäquivalent. Wenn man die Formel (94) oder (98) des §. 55 untersucht, so erkennt man, dass für gleich bleibende Constanten $v, s, \lambda$, sowie für einen und denselben Körper auch $X_v$ die verzögernde Kraft als eine Function der materiellen Eigenschaften des Körpers betrachtet werden kann, und zwar als $\frac{\mu^2-1}{VD} = C'X_v$, oder da $V$ nach den Untersuchungen über das Atomvolumen als eine einfache Function des Aequivalents $P$ ist, auch unter der Form

$$P\,\frac{\mu^2-1}{D} = C''X_v = \mathfrak{M} \tag{113}$$

Die Grösse $\mathfrak{M}$ stellt somit die verzögernde Kraft des Mittels dar, und wird Newton'sches Refractionsäquivalent genannt.

Zu demselben Ausdrucke gelangt man auch auf anderem Wege. Die Gleichung (103a)

$$\frac{\mu^2-1}{D} = ZGX_v\,\frac{v^2s^2}{\lambda^2} = M$$

gibt das Brechungsvermögen als eine einfache Function der verzögernden Kraft der Materie, aber nur für die Masseneinheit bei beliebiger Dichte.

Sollen daher verschiedene Stoffe verglichen werden, so ist es nöthig, eine Summe von Masseneinheiten $\Sigma(m)$ einzuführen, welche den Complex des chemisch wirksamen und mit anderen Stoffen äquivalenten Körpers bilden; das Aequivalent $P$ bildet hierzu den nöthigen Factor. Die verzögernden Kräfte $X_v$ werden sich nämlich für die Masseneinheit zweier Körper verhalten wie

$$X_a^v : X_b^v = C_a M_a : C_b M_b$$

wo unter $C$ die constanten Factoren der obigen Gleichung inbegriffen sind; für die aequivalenten Massen $P_a$ und $P_b$ wird sich hingegen

$$X_a^v : X_b^v = P_a\,M_a : P_b\,M_b = \mathfrak{M}_a : \mathfrak{M}_b \tag{114}$$

verhalten. Wir erhalten somit wieder den Ausdruck des Refractionsäquivalentes $\mathfrak{M}$ für die verzögernden Kräfte in verschiedenen Medien.

Auf analoge Weise wird aus dem Dispersionsvermögen $N$ das Dispersionsäquivalent $\mathfrak{N}$ durch die Gleichung

$$PN = \mathfrak{N} \tag{115}$$

gebildet.

Wir erhalten somit in den beiden Functionen, Refractions- und Dispersionsäquivalent die Mittel, die verzögernde oder dispergirende

Kraft zweier chemisch äquivalenten Medien zu vergleichen. Es ist daher nicht bei der Berechnung von $M$ oder $N$ abzubrechen, sondern immer bis zur Kenntniss von $\mathfrak{M}$ oder $\mathfrak{N}$ vorzuschreiten.

Allein nicht bloss die Kenntniss der relativen Einwirkung der Materie auf das Licht lehren uns die beiden Werthe von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$, sondern dieselben ermöglichen auch aus der Kenntniss der Werthe derselben für die Grundstoffe die optischen Werthe der Verbindungen abzuleiten.

Die auf das Licht wirkende Kraft einer Verbindung wird, wie leicht erklärlich, eine Summe der den einzelnen Bestandtheilen zukommenden Kräfte sein. Wir haben daher

$$\text{(116)} \quad \begin{aligned} \mathfrak{M}\,(a+b+c) &= \mathfrak{M}(a) + \mathfrak{M}(b) + \mathfrak{M}(c) \\ \mathfrak{N}\,(a+b+c) &= \mathfrak{N}(a) + \mathfrak{N}(b) + \mathfrak{N}(c) \end{aligned}$$

als allgemeine Gleichung. Ein Verfahren, welches dem bei der Ermittlung der Atomvolumina angewendeten ident ist. Allein sowie damals, so muss auch hier bemerkt werden, dass den einzelnen Bestandtheilen, welche in einer Verbindung vorkommen, die Möglichkeit vorbehalten werden muss, mit verschiedenen atomistischen Modificationen (gegenüber ihren freien Zuständen) einzutreten. Es wird somit Zahl und Grösse der Atome wechseln, und hierdurch ist auch die Variation des Brechungsvermögens und Aequivalentes bedingt. Es werden somit in den obigen Gleichungen 110 die unbestimmten, von der Variation von Zahl und Grösse der Atome abhängigen Factoren $\varrho$, $\delta$ der Refractions- und Dispersionscondensation einzuführen sein.

Um diese Factoren $\varrho$, $\delta$ von den Indices der Aequivalente zu unterscheiden, können dieselben analog wie beim Atomvolumen als Exponente geschrieben werden.

Die Formeln 116 werden hierdurch

$$\text{(116a)} \quad \begin{aligned} \mathfrak{M}\,(a_m + b_n \ldots) &= \varrho\mathfrak{M}(a_m) + \varrho'\mathfrak{M}(b_n) \,.\,. = (a_m)^{\varrho} + (b_n)^{\varrho'} \,.\,. \\ \mathfrak{N}\,(a_m + b_n \ldots) &= \delta\mathfrak{N}\,(a_m) + \delta'\mathfrak{N}\,(b_n) \,.\,. = (a_m)^{\delta} + (b_n)^{\delta'} \,.\,. \end{aligned}$$

und gestatten die Ableitung der optischen Werthe der Verbindungen aus den Grundstoffen. Die Werthe von $\varrho$ und $\delta$ sind meist der Einheit gleich; Abweichungen treten hiervon meist in der Weise ein, dass, wenn ein Grundstoff in seinen verschiedenen Molekularzuständen verschiedene optische Condensation besitzt, er auch mit der dem Molekularzustande der Verbindung entsprechenden Condensation eintritt.

§. 60. W e r t h e  d e r  o p t i s c h e n  C o n s t a n t e n. Mehrfache Untersuchungen lehrten die optischen Werthe einer grossen Anzahl von Grundstoffen in deren gas- oder dampfförmigem ($g$), im festen oder

flüssigen ($f$), und in deren metallischem ($m$) Zustande kennen [1]). Die nachbenannten Werthe sind mit Zugrundelegung der Luft als Einheit der Dichte berechnet, man kann dieselben wie die chemischen Aequivalente ebenfalls auf 𝔐 Wasserstoff als Einheit beziehen, wodurch alle Zahlen durch 0·004050 zu dividiren sind. Die Werthe von

$$\frac{\mathfrak{M}}{0\cdot004050} = [\mathfrak{M}] \qquad (117)$$

können mit dem Ausdrucke reducirte Refractionsäquivalente bezeichnet werden und geben die relative Einwirkung auf das Licht unter der Voraussetzung, dass $[\mathfrak{M}]\ (H) = 1\cdot00$.

Die Zahlen sind für

| | *P* | | | 𝔐 | [𝔐] | 𝔑 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Aluminium | Al | = 27·4 | *f* | 0·0234 | 5·79 | |
| Antimon | Sb | = 122 | *m* | 0·3054 | 75·59 | |
| Arsen | As | = 75 | *g* | 0·0163 | 4·05 | |
| „ | | | *f* | 0·0481 | 12·02 | 12·0 |
| Baryum | Ba | = 137 | *f* | 0·0460 | 11·40 | |
| Beryllium | Be | = 9·4 | *f* | 0·0158 | 3·85 | |
| Blei | Pb | = 208 | *f* | 0·1091 | 27·02 | |
| „ | | | *m* | 0·3580 | 88·60 | |
| Bor | Bo | = 11 | ²/₃ | 0·0080 | 2·30 | 1·7 |
| „ | | | *f* | 0·0140 | 3·45 | |
| Brom | Br | = 80 | *f* | 0·0365 | 9·00 | 7·0 |
| Cadmium | Cd | = 112 | *f* | 0·0469 | 11·61 | |
| Calcium | Ca | = 40 | *f* | 0·0265 | 6·50 | |
| Chlor | Cl | = 35·5 | *g* | 0·0222 | 5·51 | 3·0 |
| Eisen | Fe | = 56 | *m* | 0·1355 | 33·50 | |
| Fluor | Fl | = 19 | *f* 1 ? | 0·0060 | 1·50 | |
| „ | | | *f* ³/₂ ? | 0·0080 | 2·00 | |
| Jod | J | = 127 | *f* | 0·0755 | 18·85 | 16·8 |
| Kalium | K | = 39·2 | *f* | 0.0191 | 4·73 | |
| Kohlenstoff | C | = 12 | *g* | 0·0102 | 2·50 | 1·2 |
| „ | | | *f* 1 | 0·0205 | 5·01 | 2·2 |
| „ | | | ³/₂ | 0·0307 | 7·51 | 9·0 |
| Kupfer | Cu | = 63·4 | *f* | 0·0387 | 9·60 | |
| „ | | | *m* | 0·0721 | 17·83 | |

[1]) Schrauf. Refractionsäquivalente der Grundstoffe. Sitzungsber. der Wien. Acad. 1865 und Physikalische Studien. Kap. XV.

| | P | | 𝔐 | [𝔐] | 𝔑 |
|---|---|---|---|---|---|
| Lithium | Li = 7 | *f* | 0·0116 | 2·88 | |
| Magnesium | Mg = 24 | *f* | 0·0321 | 7·74 | |
| Mangan | Mn = 55 | *f* | 0·0500 | 12·50 | |
| Molybdän | Mo = 96 | *f* | 0·1969 | 48·73 | |
| Natrium | Na = 22 | *f* | 0·0141 | 3·68 | |
| Phosphor | P = 31 | *g* | 0·0194 | 4·81 | |
| „ | | *f* | 0·0755 | 18·70 | 11·5 |
| Quecksilber | Hg = 200 | *g* | 0·0318 | 7·87 | |
| „ | | *f* | 0·0749 | 18·81 | 22·8 |
| „ | | *m* | 0·3974 | 98·38 | |
| Sauerstoff | O = 16 | *g* | 0·0078 | 1·95 | 1·25 |
| Schwefel | S = 32 | *g* | 0·0157 | 3·94 | |
| „ | | *f* | 0·0650 | 16·13 | 9·6 |
| Selen | Se = 79·5 | *m* | 0·1204 | 29·81 | |
| Silber | Ag = 108 | *f* | 0·0365 | 9·00 | |
| „ | | *m* | 0·1360 | 33·75 | |
| Silicium | Si = 28 | *f* | 0·0352 | 8·73 | 5·2 |
| „ | | *m* | 0·1309 | 32·45 | |
| Stickstoff | N = 14 | *g* | 0·0084 | 2·09 | 1·8 |
| Strontium | Sr = 87·6 | *f* | 0·0360 | 8·93 | |
| Thallium | Tl = 204 | *f* | 0·0660 | 16·50 | 14·2 |
| Titan | Ti = 50 | *f* | 0·1265 | 31·50 | |
| Wasserstoff | H = 1 | *g* | 0·0040 | 1·00 | 0·125 |
| Wismuth | Bi = 200 | *f* | 0·1088 | 26·90 | |
| „ | | *m* | 0·3264 | 80·82 | |
| Wolfram | W = 184 | *f* | 0·1076 | 26·66 | |
| Zink | Zn = 65·2 | *f* | 0·0280 | 7·00 | |
| „ | | *m* | 0·0850 | 21·20 | |
| Zinn | Sn = 118 | *f* | 0·0776 | 19·35 | 15·9 |
| Zirkon | Zn = 89·6 | *f* | 0·0767 | 19·00 | |

Die in dieser Tabelle zusammengestellten Werthe für die Grundstoffe genügen, um für eine grosse Reihe von Verbindungen deren Werthe im Vorhinein zu berechnen, wenn für eine Verbindung aus einer solchen Reihe ähnlicher Körper die etwa auftretenden Werthe der Condensation durch Vergleich mit der Beobachtung bekannt sind.

Ist das Refractions- oder Dispersionsäquivalent der Verbindung bekannt, so lassen nach den im früheren Paragraphe entwickelten Formeln successive das Refractions- und Dispersionsvermögen $M$ und $N$, und aus diesen mittelst der bekannten Dichte der Brechungsexponent berechnen.

Die hierfür nöthigen Formeln sind erstens

$$M = \frac{\mathfrak{M}}{P} \qquad N = \frac{\mathfrak{N}}{P} \tag{118}$$

dann

$$\mathfrak{R}^2 + 1 = 773{\cdot}45\, DM; \qquad \mathfrak{D}^2 = 773{\cdot}45\, DN^2$$

$$\mu^2 = 1 + DM + D\,\frac{N^2}{\lambda^2} = \mathfrak{R}^2 + \frac{\mathfrak{D}^2}{\lambda^2} \tag{119}$$

Die Molekulartheorie des Lichtes gewährt somit die Möglichkeit, nicht bloss die Einwirkung der Materie auf das Licht, sondern auch überdiess die Werthe der Verbindungen aus jenen der Grundstoffe zu erkennen. Dass letzteres wahr und dass die aus den Grundstoffen im Vorhinein abgeleiteten optischen Werthe der Verbindungen mit den Beobachtungen vollkommen übereinstimmen, habe ich in mehreren Untersuchungen nachgewiesen. In dieser Beziehung ist namentlich den homologen organischen Reihen ein grosser Theil meiner „Physikalischen Studien“ (l. c.) gewidmet.

# XI. Kapitel.

## Die optischen Atomzahlen. Die Ableitung der Krystallform von Verbindungen aus den Atomen der Grundstoffe.

§. 61. Im vorhergehenden Kapitel gelang es, die Fortpflanzung des Lichtes als eine Function der Masse, d. i. des Volumens und der Dichte hinzustellen. Die nach diesem für den Brechungsexponenten geltende Formel

$$(120) \qquad \frac{\mathfrak{N}^2 - 1}{D} = M = VX,$$

ermöglicht jedoch weiterhin, auch die molekularen Zustände der Materie selbst zu erkennen.

Die erste Betrachtung der obigen Formel ergibt, dass sich das Brechungsvermögen $M$ proportional dem Volumen der Masseneinheit verhalten soll. Es sollte somit $M$ des gasförmigen Zustandes grösser als jenes der festen Körper sein, da der allgemeinen Vorstellungsweise gemäss auch das Volumen der Masseneinheit des Gases grösser als jenes der festen Körper ist. Hiermit stimmen jedoch die Erfahrungen bezüglich des Brechungsvermögens (vide Kap. X, pag. 153) nicht überein. Der Begriff des Volumens wird daher nicht in dieser einfachen Form zu substituiren sein. Würde nämlich für Volumen absolut nur $\frac{1}{D}$ zu setzen sein, so wäre nothwendig (wegen $M_g < M_f$) auch anzunehmen, dass das Volumen der Masseneinheit des Gases kleiner ist als jenes der festen Körper; ein Satz, der gegen die gewöhnliche Vorstellungsweise ebenso verstösst, wie der analoge Ausspruch Cauchy's, dass der Aether in den Gasen millionenmal dichter ist als in den festen Körpern.

Wäre jedoch das Volumen nur in dem beschränkten Sinne von Atomen verstanden, so ist eine bessere Uebereinstimmung möglich,

indem man dann die Gase aus einer kleinen Anzahl grosser Moleküle mit grossen Zwischenräumen, die festen Körper durch zahlreichere kleinere eng aneinander liegende Atome gebildet denkt. Da überdiess die Körpertheilchen nie in absoluter Ruhe verharren, so stehen diese Annahmen nicht im Widerspruche mit der, gewöhnlich adoptirten, Constitution der Materie. Dass es überdiess möglich ist, die Masseneinheit aus einer variablen Anzahl von variabel grossen Moleküle zusammenzusetzen, ward ebenfalls im vorhergehenden Kapitel erwähnt.

Setzt man in obiger Gleichung somit statt $V$ das Product aus Zahl und Grösse der Atome

$$V = ZG$$

wobei $ZG$ optische Atomzahl genannt werden wird, so wird es möglich, durch Vergleich der Brechungsvermögen auch einen Einblick in die relativen Grössen der optischen Atome zu erhalten.

Will man mehrere Refractionsvermögen $M$ vergleichen, so ist es nöthig, dass dieselben wegen ihrer Abhängigkeit von $v$, $s$, $\lambda$ für Lichtstrahlen gleicher Art, d. i. gleicher Farbe gelten. Es ward daher bereits in obiger Formel (120) $\lambda$ eliminirt, und statt $\mu$ der Refractionscoefficient $\mathfrak{R}$ substituirt.

Unter dieser Voraussetzung folgt für einen und denselben Körper, in seinen verschiedenen Molekularzuständen, da durch letztere sein Aequivalent nicht geändert wird

$$\mathfrak{M}_a : \mathfrak{M}_b = PM_a : PM_b = ZG_a X_a : ZG_b X_b \tag{121}$$

Bedenkt man, dass $X_v$ bereits in der Entwicklung als Function von Masse, Dichte und Volumen gesetzt ward, so wird nothwendig, $X_v$ nur mehr als Function der chemischen Eigenschaft des Körpers betrachtet werden können. Für die Modificationen eines Körpers werden daher $X_a^v = X_b^v$ sein und daher auch

$$ZG_a : ZG_b = M_a : M_b = \mathfrak{M}_a : \mathfrak{M}_b$$

Vergleicht man hingegen die Refractionsvermögen zweier verschiedenen Stoffe, so werden die Gleichungen sein

$$M_a : M_b = \frac{\mathfrak{M}_a}{P_a} : \frac{\mathfrak{M}_b}{P_b} = ZG_a X_a : ZG_b X_b \tag{122}$$

Für die verzögernden Kräfte bietet sich wieder die Annahme dar, dieselben von den chemischen Eigenschaften abhängig zu machen.

Näher eingehend ersieht man jedoch, dass kein physikalischer Grund vorhanden sein kann, warum beispielsweise die Massentheilchen von $\Theta$ anders als jene von H auf das Licht wirken sollen, da doch chemische Affinitäten nicht einen Schwingungszustand beeinflussen können.

Hierdurch wird man zu der Hypothese geführt, die verzögernden Kräfte für alle Körper gleich zu setzen, eine Hypothese, welche durch die mittelst derselben gefundenen Resultate mehr als wahrscheinlich gemacht wird.

Aus obiger Gleichung folgt nämlich auch

$$\mathfrak{M}_a : \mathfrak{M}_b = P_a Z G_a X : P_b Z G_b X = P_a V_a X_a : P_b V_b X_b \tag{123}$$

Sind die verzögernden Kräfte $X_a$ $X_b$ für alle Materien gleich, so werden sich auch die Refractionsäquivalente wie die Atomvolumina verhalten.

Einen Beweis hierfür liefern die organischen niederen Reihen, welche eine analoge Bildungsweise haben. Vergleicht man die in nachfolgender Tabelle gegenüberstehenden Zahlen der Columne $\mathfrak{M}$ und Spec. $V$, so ist die Uebereinstimmung dieser Werthe eine vollkommene und fast überraschende[1]).

| | | $\mathfrak{M}$ | Sp. $V$ |
|---|---|---|---|
| Propionsäure | $Ꞓ_3 H_6 Θ_2$ | 0·0855 | 85·4 |
| Valeriansäure | $Ꞓ_5 H_{10} Θ_2$ | 0·1333 | 131·2 |
| Oenanthylsäure | $Ꞓ_7 H_{12} Θ_2$ | 0·1810 | 173·6 |
| Aldehyd | $Ꞓ_2 H_4 Θ$ | 0·0545 | 56·0 |
| Buttersäure | $Ꞓ_4 H_8 Θ$ | 0·1093 | 107·8 |
| Aceton | $Ꞓ_3 H_6 Θ$ | 0·0774 | 77·3 |
| Capronsäure | $Ꞓ_6 H_{12} Θ$ | 0·1568 | 148·7 |
| Valeral | $Ꞓ_5 H_{10} Θ$ | 0·1248 | 120·3 |
| Valeriansaures Amyl | $Ꞓ_{10} H_{20} Θ_2$ | 0·2494 | 244·1 |
| Essigsaures Aethyl | $Ꞓ_4 H_8 Θ_2$ | 0·1077 | 107·5 |
| Kohlensaures Aethyl | $Ꞓ_4 H_{10} Θ_3$ | 0·1382 | 138·8 |
| Anhydre Essigsäure | $Ꞓ_4 H_6 Θ_3$ | 0·1101 | 110·1 |
| Methylalkohol | $Ꞓ H_4 Θ$ | 0·0387 | 40·8 |
| Aethylalkohol | $Ꞓ_2 H_6 Θ$ | 0·0617 | 61·8 |
| Amylalkohol | $Ꞓ_5 H_{12} Θ$ | 0·1307 | 128·8 |

Wie in dem citirten Werke nachgewiesen ist, haben die aufgezählten Stoffe eine analoge Molekularstructur, und wir sehen durch solche daher die Constanz des Verhältnisses zwischen Refractionsäquivalent und Atomvolumen bestätigt.

---

[1]) Vergleiche Schrauf. Ueber die gesetzmässigen Beziehungen der Atomvolumina und Refractionsäquivalente. Sitzungsber. der Wiener Academie 1866, sowie Physikal. Studien pag. 119.

Diese Constanz lehrt weiter, dass die verzögernde Kraft $X_v$ nur durch die Quantität und nicht durch die Qualität der Materie bedingt wird. Wir können diese Function somit in der obigen Gleichung (123) vernachlässigen und erhalten durch dieselbe dann das Verhältniss der optischen Atome zweier Körper.

§. 62. Die optischen Atomzahlen. Die durch den vorhergehenden Paragraph begründete Gleichung

$$\frac{\mathfrak{M}_a}{P_a} : \frac{\mathfrak{M}_b}{P_b} = ZG_a : ZG_b \tag{123a}$$

ermöglicht weiterhin, aus den optischen Beobachtungen die atomistische Structur der verschiedenen Grundstoffe zu erkennen.

Da es sich hierbei nur um relative Zahlen handelt, kann man wieder den Werth von $ZG(H)$ als Einheit, im Nachfolgenden mit 100 bezeichnet, annehmen. Aus der Beobachtung für $\mathfrak{M}(H) = 0{\cdot}004$ würde sich aber auch $ZG(H) = 0{\cdot}004$ ergeben, daher denn alle in nachfolgender Tabelle zusammengestellten, aus den reducirten Refractionsäquivalenten $\mathfrak{M}$ (Formel 118) gerechneten Atomzahlen mit $^4/_{100000}$ zu multipliciren wären, wenn man dieselben auf die absoluten Werthe bringen wollte. Letztere Zahlen sind jedoch unnöthig, indem ja doch nur immer relative Verhältnisszahlen nöthig sind.

In nachfolgender Tabelle sind die Werthe von den optischen Atomzahlen angeführt mit gleichzeitiger Angabe der reducirten Refractionsäquivalente $[\mathfrak{M}]$, woraus dieselben berechnet werden.

| | | | | $[\mathfrak{M}]$ | $ZG$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Aluminium | Al | = 27·4 | *f* | 5·79 | 21·15 |
| Antimon | Sb | = 122 | *m* | 75·29 | 62·99 |
| Arsen | As | = 75 | *g* | 4·05 | 5·40 |
| „ | | „ | *f* | 12 02 | 16·01 |
| Baryum | Ba | = 137 | *f* | 11·40 | 8·30 |
| Beryllium | Be | = 9·4 | *f* | 3·85 | 41·00 |
| Blei | Pb | = 208 | *f* | 27·02 | 12·99 |
| „ | | „ | *m* | 88·60 | 42·60 |
| Bor | Bo | = 11 | *f* | 3·45 | 31·35 |
| Brom | Br | = 80 | *f* | 9·00 | 11·25 |
| Calcium | Ca | = 40 | *f* | 6·50 | 16·62 |
| Cadmium | Cd | = 112 | *f* | 11·61 | 10·38 |
| Chlor | Cl | = 35·5 | *g* | 5·51 | 15·53 |
| Eisen | Fe | = 56 | *m* | 33·50 | 59·80 |
| Fluor | Fl | = 19 | *f* $^3/_2$ | 2·00 | 10·50 |
| Jod | J | = 127 | *f* | 18·85 | 14·85 |

| | | | | [𝔐] | ZG |
|---|---|---|---|---|---|
| Kalium | Ka | = 39·2 | f | 4·73 | 12·06 |
| Kohlenstoff | C | = 12 | f 3/4 | 3·82 | 31·75 |
| » | | » | f | 5·01 | 41·75 |
| Kupfer | Cu | = 63·4 | f | 9·60 | 15·15 |
| » | | » | m | 17·83 | 27·05 |
| Lithium | Li | = 7 | f | 2·88 | 41·14 |
| Magnesium | Mg | = 24 | f | 7·74 | 32·25 |
| Mangan | Mn | = 55 | f | 12·50 | 23·00 |
| Molybdän | Mo | = 96 | f | 48·73 | 50·76 |
| Natrium | Na | = 22 | f | 3·68 | 16·75 |
| Phosphor | P | = 31 | g | 4·81 | 15·51 |
| » | | » | f | 18·70 | 60·31 |
| Quecksilber | Hg | = 200 | g | 7·87 | 3·83 |
| » | | » | f | 18·81 | 9·40 |
| » | | » | m | 98·38 | 49·19 |
| Sauerstoff | O | = 16 | g | 1·95 | 12·25 |
| Schwefel | S | = 32 | g | 3·94 | 12·25 |
| » | | » | f | 16·13 | 50·41 |
| Selen | Se | = 79·5 | m | 29·81 | 37·25 |
| Silber | Ag | = 108 | f | 9·00 | 8·33 |
| » | | » | m | 33·75 | 31·25 |
| Silicium | Si | = 28 | f | 8·73 | 31·17 |
| » | | » | m | 32·45 | 115·00 |
| Stickstoff | N | = 14 | g | 2·09 | 14·95 |
| Strontium | Sr | = 87·6 | f | 8·93 | 10·20 |
| Thallium | Tl | = 204 | f | 16·50 | 8·09 |
| Titan | Ti | = 50 | f | 31·50 | 63·00 |
| Wasserstoff | H | = 1 | g | 1·00 | 100·00 |
| Wismuth | Bi | = 210 | f | 26·90 | 12·80 |
| » | | » | m | 80·82 | 38·49 |
| Wolfram | W | = 184 | f | 26·66 | 14·49 |
| Zink | Zn | = 65·2 | f | 7·00 | 10·75 |
| » | | » | m | 21·20 | 32·85 |
| Zinn | Sn | = 118 | f | 19·35 | 16·30 |
| Zirkon | Zr | = 89·6 | f | 19·00 | 21·35 |

§. 63. **Die analogen Reihen der Atomzahlen.** Die im vorhergehenden Paragraphe in der Columne *ZG* zusammengestellten Atomzahlen repräsentiren die relative Molekularconstitution der einzelnen Grundstoffe für äquivalente Massen.

Soll diess der Wahrheit entsprechen, so müssen vor Allem die ähnlichen Stoffe auch eine ähnliche Bildungsweise oder einen gesetzmässigen Gang ihrer Atomzahlen haben. Und diesen Verhältnissen entsprechend zeigen auch die vorstehenden optischen Atomzahlen bei näherer Vergleichung die sehr wichtige Thatsache, dass dieselbe für ähnliche chemische Grundstoffe entweder gleiche oder multiple Reihen bilden. Es tritt hier derselbe Fall ein, wie bei den Forschungen der theoretischen Chemie über relative Raumerfüllung oder über specifische Wärme.

Es spricht sich wohl bereits in obiger Zusammenstellung die Analogie und der gesetzmässige Gang der Atomzahlen aus, berücksichtigt man aber, nicht wie Kremers bloss die Differenz der Atomgewichte, sondern auch die Verhältnisse, welche in der Isomorphie zur Geltung gelangen, so könnte man nachfolgende Reihen, deren Glieder in ihrem chemischen und physikalischen Charakter sich nahe stehen, aufstellen.

Ein Blick auf die nachstehenden Atomzahlen wird genügen, um die früheren Behauptungen bezüglich der atomistischen Gruppirung zu bekräftigen. Die beigefügten Factoren machen die Bildung der Reihen als Factoriellen ersichtlich.

| I. | | | II. | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Fl | 10·50 | (10.1) | Θ | 12·25 | (12,25.1) |
| H | 100·00 | (10.10) | $S_g$ | 12·25 | (12,25.1) |
| | | | Se | 37·25 | (12,25.3) |
| | | | $S_f$ | 50·41 | (12,25.4) |

| III. | | | IV. | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Fl | 10·50 | (3,75.3) | $As_g$ | 5·40 | (5.1) |
| Br | 11·25 | (3,75.3) | N | 14·95 | (5.3) |
| J | 14·85 | (3,75.4) | $P_g$ | 15·50 | (5.3) |
| Cl | 15·53 | (3,75.4) | $As_g$ | 16·01 | (5.3) |
| | | | $P_t$ | 60·31 | (5.12) |

| V. | | | VI. | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $Ꞓ_{3/4}$ | 31·55 | (10,5.3) | $Al_f$ | 21·15 | (7.3) |
| Bo | 31·35 | (10,5.3) | $Zr_f$ | 21·35 | (7.3) |
| $Ꞓ_f$ | 41·75 | (10,5.4) | $Be_f$ | 41·00 | (7.6) |

| VII. | | | VIII. | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $Sn_f$ | 16·30 | (8.2) | $W_t$ | 14·49 | (7.2) |
| $Si_f$ | 31·17 | (8.4) | Ꞓu | 15·15 | (7.2) |
| $Ti_t$ | 63·00 | (8.8) | $Ꞓu_m$ | 27·05 | (7.4) |
| $Si_m$ | 115·00 | (8.14) | $Fe_m$ | 59·80 | (7.8) |

| IX. | | |
|---|---|---|
| $Tl_f$ | 8·09 | (4.2) |
| $Ka_f$ | 12·06 | (4.3) |
| $Na_f$ | 16·75 | (4.4) |
| $Li_f$ | 41·14 | (4.10) |

| X. | | |
|---|---|---|
| $Ag_f$ | 8·33 | (8.1) |
| $Tl_f$ | 8·08 | (8.1) |
| $Ag_m$ | 31·25 | (8.4) |

| XI. | | |
|---|---|---|
| $Ba_f$ | 8·30 | (2.4) |
| $Sr_f$ | 10·20 | (2.5) |
| $Pb_f$ | 12·99 | (2.6) |
| $Ca_f$ | 16·62 | (2.8) |
| $Mg_f$ | 32·25 | (2.16) |
| $Pb_f$ | 42·60 | (2.21) |

| XII. | | |
|---|---|---|
| $Hg_f$ | 9·40 | (10.1) |
| $Cd_f$ | 10·38 | (10.1) |
| $Zn_f$ | 10·75 | (10.1) |
| Mn | 23·00 | (10.2) |
| $Zn_m$ | 32·83 | (10.3) |
| $Hg_m$ | 49·19 | (10.5) |
| $Mo_f$ | 50·76 | (10.5) |

Die Uebereinstimmung dieser Zahlen in ihrem multiplen Verhältnisse ist eine so auffallende, dass man berechtigt ist anzunehmen:

die Moleküle von ähnlichen Elementen werden entweder aus gleicher Anzahl der physikalischen Atome bei — im einfach multiplen Verhältnisse — variabler Grösse derselben, oder aus gleich grossen Atomen, aber in multipler Anzahl gebildet.

Dieser Satz genügt, um die Qualität der Materie zu erklären.

Die Quantität, welche sich in den Aequivalenten ausspricht, zeigt nach den Forschungen von Dumas[1]) ähnliche Relationen, und letztere führen, um die Quantität zu erklären, zur Annahme, dass den Molekülen der verschiedenen Elemente eine Verdichtung proportional den Aequivalenten zukomme. Beide Erwägungen führen zur Einheit der Materie.

**§. 64. Krystallogenesis und Homöomorphismus.** Die nach den Aehnlichkeiten erfolgte Gruppirung der Grundstoffe ergibt das überraschende Resultat, dass deren Atomzahlen Reihen mit aufsteigenden Factoren aus der Reihe der natürlichen Zahlen bilden.

Da ferner die in Gruppen vereinten Stoffe zumeist isomorph krystallisiren, so ist hierdurch eine Thatsache zur Erklärung des Homöomorphismus gewonnen.

Homöomorphismus und analoge Molekulargruppirung wird nämlich in jenen Fällen eintreten können, in welchen die optischen Atome der vicariirenden Bestandtheile im einfachen multiplen Verhältnisse stehen.

---

[1]) Die Einwendungen von Stass können vielleicht dadurch entkräftet werden, dass man die bisher als Grundstoffe betrachteten Stoffe nicht als vollkommen homogen, sondern vielmehr verunreinigt durch bisher unbekannte Elemente annimmt. Die Spectralanalyse hat bereits mehrere solche Beimengungen dargethan.

Die krystallographischen Beobachtungen geben nämlich nur die relativen Dimensionen des Krystalls, d. i. eines höheren Complexes (analog Haüy und Huyghens) aus den bestimmenden, von den Elementen gebildeten Grundmolekülen. Wenn nun letztere für isomorphe Körper nicht absolut gleiche, sondern nur multiple axiale Dimensionen haben, so kann der höhere Molekularcomplex in beiden Fällen der gleiche sein.

Hierdurch ist die Möglichkeit homöomorpher Krystallformen erwiesen.

Allein die Kenntniss der optischen Atomzahlen ermöglicht noch weiters die Bildung des Krystallmoleküls einer Verbindung aus den Atomen der auftretenden Elemente zu erklären.

Analog dem oben Gesagten wird nämlich das Grundmolekül des Krystalls Dimensionen nach den drei Axenrichtungen besitzen müssen, welche zu den axialen Dimensionen des Krystalls in möglichst einfachem Verhältnisse, für wichtige Fälle im Verhältnisse 1 : 1 oder 1 : 2 stehen und gleichzeitig aus den Atomen der im Krystalle auftretenden Grundstoffe gebildet sein sollen.

Nun zeigen, wie bekannt, die optischen Atomzahlen die Zahl und Grösse der im Elemente auftretenden Atome an, ferner kann, um jede Zweideutigkeit zu vermeiden, die Lagerung der Atome im Moleküle nur nach den drei vertikalen Axen angenommen werden; aus beiden Bedingungen folgt, dass das Verhältniss der Atomzahlen der auftretenden und axial gruppirten Elemente jenem der Krystallaxen entspricht.

Als Probe hierfür bieten sich am einfachsten die binären oder ternären Verbindungen dar, indem bei diesen die Austheilung der Grundstoffe meist in der Weise erfolgen kann, dass jede axiale Richtung von einem anderen Grundstoffe eingenommen wird. Höhere Verbindungen werden, wie leicht ersichtlich, nicht mehr diese einfache Austheilung der Elemente befolgen können, sondern es werden sich selbst für die einzelnen Axen binäre Gruppen bilden müssen, wodurch für die Erkenntniss der Lagerung neue Hindernisse hinzutreten.

Tesserale Krystalle werden nach allen Richtungen aus gleichen Atomen gebildet sein, die Grundstoffe, welche nicht tesseral krystallisiren, werden aus sich selbst höhere Atomcomplexe bilden; in den übrigen Fällen werden die drei Axenrichtungen verschiedenwerthig sein.

Wir haben wie früher im krystallographischen Theile die Axe $c$ vertikal und $a$ und $b$ horizontal gesetzt; für orthohexagonal ist ferner $a = \sqrt{3}$ und $b = 1$. Für letztgenanntes System kann uberdiess die Rhomboederfläche (201) wie ein Doma (101) behandelt werden, wodurch in der Rechnung $c$ gegen die Beobachtung verdoppelt wird.

§. 65. **Ableitung der Krystallform von Verbindungen aus den Atomzahlen der in der Verbindung auftretenden Grundstoffe.** Zur Erklärung der hierfür anzuwendenden Methoden können einige einfache Beispiele dienen.

Fig. 27.

Anatas, Ŧi$\Theta_2$, pyramidal.

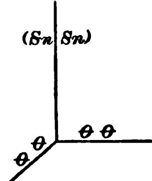
(Auf die Axe $c$ entfällt Ŧi, auf jede der Axen $a$ und $b$ ein Atom Sauerstoff, die Axe $c$ ist in der Beobachtung halb so gross wie die Axe Ŧi).

Als Schema erhält man daher:

$$c = \tfrac{1}{2}(\text{Ŧi}) = 31{\cdot}5 \qquad a = b = \Theta = 12{\cdot}25$$

$$\begin{aligned} a : a : c &= 12{\cdot}25 : 12{\cdot}25 : 31{\cdot}5 \\ &= 1 : 1 : 2{\cdot}5738 \\ \text{beobachtet} &= 1 : 1 : 2{\cdot}5129 \end{aligned}$$

$$\text{tang}\left(\frac{c}{a}\right) = 68^0\,46'; \text{ beobachtet } (001)\,(111) = 68^0\,18'$$


Fig. 28.

Zinnstein $Sn_2\Theta_4$, pyramidal.

$$c = \tfrac{1}{2}(Sn_2) = 16{\cdot}3 \qquad a = b = \Theta_2 = 24{\cdot}4$$

$$\begin{aligned} a : a : c &= 24{\cdot}4 : 24{\cdot}4 : 16{\cdot}3 \\ &= 1 : 1 : 0{\cdot}6667 \\ \text{beobachtet} &= 1 : 1 : 0{\cdot}6725 \end{aligned}$$

$$\text{tang}\left(\frac{c}{a}\right) = 33^0\,42'; \text{ beob. } (001)\,(101) = 33^0\,55'$$

Corund, $Al_2\Theta_3$, hexagonal.

$$c = Al\Theta = 33{\cdot}39 \qquad a = Al = 21{\cdot}14 \qquad b = \tfrac{1}{2}(\Theta_2) = 12{\cdot}25$$

$$\begin{aligned} a : b : c &= 21{\cdot}14 : 12{\cdot}25 : 33{\cdot}39 \\ &= 1{\cdot}722 : 1 : 2{\cdot}7360 \\ \text{beobachtet} &= 1{\cdot}732 : 1 : 2{\cdot}7260 \end{aligned}$$

$$\text{tang}\left(\frac{c}{a}\right) = 57^0\,40'; \text{ beobachtet } (001)\,(201) = 57^0\,34'$$

$$\text{tang}\left(\frac{a}{b}\right) = 59^0\,54'; \text{ beobachtet } (100)\,(110) = 60^0$$

Valentinit, $Sb_2\Theta_3$, prismatisch. (Analoge Molekularlagerung wie bei Corund.)

$$c = Sb + \Theta = 43{\cdot}7 \qquad a = Sb = 31{\cdot}5 \qquad b = \tfrac{1}{2}(\Theta_2) = 12{\cdot}25$$

$$\begin{aligned} a : b : c &= 31{\cdot}5 : 12{\cdot}25 : 43{\cdot}7 \\ &= 2{\cdot}5715 : 1 : 3{\cdot}5645 \\ \text{beobachtet} &= 2{\cdot}5365 : 1 : 3{\cdot}5855 \end{aligned}$$

$\operatorname{tang}\left(\frac{a}{b}\right) = 68^0\ 45'$; beobachtet (100) (110) = $68^0\ 29'$

$\operatorname{tang}\left(\frac{c}{a}\right) = 54^0\ 13'$; beobachtet (001) (101) = $54^0\ 44'$

$\operatorname{tang}\left(\frac{b}{c}\right) = 15^0\ 40'$; beobachtet (010) (011) = $15^0\ 35'$

**Quarz**, $Si_3\,\Theta_6$, hexagonal.

$a = \Theta_4 = 49 \qquad b = \frac{1}{2}(SiO_2) = 27{\cdot}83 \qquad c = Si_2 = 62{\cdot}34$

$a : b : c = 49 : 27{\cdot}83 : 62{\cdot}34$
$= 1{\cdot}7607 : 1 : 2{\cdot}2038$
beobachtet $= 1{\cdot}732 : 1 : 2{\cdot}200$

$\operatorname{tang}\left(\frac{c}{a}\right) = 51^0\ 50'$; beobachtet (001) (201) = $51^0\ 47'$

$\operatorname{tang}\left(\frac{a}{b}\right) = 60^0\ 24'$; beobachtet (100) (110) = $60^0\ 0'$

**Calomel**, Hg Cl, pyramidal.

$\frac{1}{2}c = (Hg) = 18{\cdot}81 \qquad a = b = Cl = 15{\cdot}5$

$a : b : c = 15{\cdot}5 : 15{\cdot}5 : 37{\cdot}6$
$= 1 : 1 . 2{\cdot}425$
beobachtet $= 1 : 1 : 2{\cdot}465$

$\operatorname{tang}\left(\frac{c}{a}\right) = 67^0\ 36'$; beobachtet (001) (111) = $67^0\ 55'$

**Cotunnit** $Pb\,Cl_2$, prismatisch.

$c = \frac{1}{2}(Cl) = 7{\cdot}76 \qquad a = Cl \quad b = Pb = 12{\cdot}99$

$a : b : c = 15{\cdot}5 : 12{\cdot}99 : 7{\cdot}76$
$= 1{\cdot}1921 : 1 : 0{\cdot}5961$
beobachtet $= 1{\cdot}1890 : 1 : 0{\cdot}5951$

$\operatorname{tang}\left(\frac{a}{b}\right) = 50^0\ 4'$; beobachtet (100) (110) = $49^0\ 53'$

$\operatorname{tang}\left(\frac{b}{c}\right) = 59^0\ 8'$; beobachtet (010) (101) = $59^0\ 14'$

$\operatorname{tang}\left(\frac{a}{c}\right) = 63^0\ 26'$; beobachtet (100) (101) = $63^0\ 22'$

Diese als Beispiele angeführten binären Verbindungen sind wohl genügend, um die Abhängigkeit der Krystallform von der axialen Lagerung der Elemente im Grundmoleküle zu beweisen.

Ebenso ersieht man auch aus der Vergleichung von Corund und Valentinit, dass das Krystallsystem von Verbindungen analoger chemischer Formeln bei ganz gleicher atomistischer Lagerung nur eine Function von der Zahl und Grösse der auf die verschiedenen Axen entfallenden Grundstoffe ist.

Ist durch die Untersuchung binärer Verbindungen der Grundsatz der Krystallbildung aus den Elementen gewonnen, so ist es successive möglich, zu höheren Verbindungen aufzusteigen.

Hierbei ist zu bedenken, dass die Austheilung der Elemente auf die verschiedenen Axen eine complicirte, etwa selbst zu binären oder ternären Gruppen sein wird, wodurch es den Ueberblick in etwas verhindert, ja selbst eine mehrfache Combination [1]) möglich sein wird.

Als Beispiele solcher höheren Complexe will ich erwähnen:

Zirkon $ZrO_2\ 2SiO_2$, pyramidal.

$$a = b = SiO_3 = 67{\cdot}8 \quad c = 2(Zr) = 42{\cdot}7$$

$$a : b : c = 1 : 1 : 0{\cdot}6345$$

$$\text{beobachtet} = 1 : 1 : 0{\cdot}6404$$

$$\text{tang}\left(\frac{c}{a}\right) = 32^0\ 23'; \text{ beobachtet } (001)\ (101) = 32^0\ 38'$$

Chrysoberyll $BeO\ Al_2O_3$, prismatisch.

$$a = Al_2 = 42{\cdot}2 \quad b = \tfrac{1}{2}\,(\Theta_4) = 24{\cdot}45 \quad c = Be = 41{\cdot}00$$

$$a : b : c = 1{\cdot}7258 : 1 : 1{\cdot}6470$$

$$\text{beobachtet} = 1{\cdot}7250 : 1 : 1{\cdot}6205$$

$$\text{tang}\left(\frac{a}{b}\right) = 59^0\ 54'; \text{ beob. Miller } ai = (100)\,(101) = 59^0\ 53'$$

$$\text{tang}\left(\frac{a}{c}\right) = 43^0\ 13'; \text{ beob. } 43^0\ 25'$$

$$\text{tang}\left(\frac{b}{c}\right) = 39^0\ 13'; \text{ beob. Miller} (bx) = (010)\,(011) = 39^0\ 1'$$

Zeigen nun diese beiden Beispiele, dass auch bei höherem Complexe durch einfache Gruppirung der Atome die Grundgestalt sich erklären lasse, so war die Frage nur noch nach den allotropen Modificationen übrig. Dieselben können, wie schon beim Atomvolumen (§. 10, pag. 31) erörtert, nur zweierlei Zustände darbieten, entweder gleiche

[1]) Ich halte die Möglichkeit, eine Krystallgestalt mittelst mehrfacher Combinationen (analog den Volumsrechnungen) der Atome zu berechnen, für keinen Gegenbeweis, sondern vielmehr für eine weitere Bestätigung für die Existenz der Beziehungen von der Krystallgestalt zu den optischen Atomen.

atomistische Anordnung der Grundstoffe selbst, aber letztere im multiplen Verhältnisse, oder zweitens bereits verschiedene Atome der Grundstoffe; wir haben letzteren Fall als Allomerie bezeichnet.

Analog hiermit wird auch die Krystallbildung sich erklären lassen. Für den ersteren Fall, wo gleiche Atome der Grundstoffe auftreten, wird die Gruppirung der Atome im Grundmoleküle in den beiden allotropen Zuständen verschieden sein müssen, oder es kann die Lagerung vielleicht gleich geblieben sein, allein in das Molekül wird die $m$fache Anzahl Atome eintreten.

So kann auch im Gegensatze zu Anatas abgeleitet werden die Krystallform des pyramidalen Rutil aus

a) $\text{Ŧi}O_2 = (\text{Ŧi}_2 + \Theta_4)$.

$$a = b = 4\,(\Theta) = 48{\cdot}8 \quad c = \tfrac{1}{2}\,(\text{Ŧi}) = 31{\cdot}5$$

$$a : b : c = 1 : 1 : 0{\cdot}6434$$

$$\text{beobachtet} = 1 : 1 : 0{\cdot}6444$$

$$\text{tang}\left(\frac{c}{a}\right) = 32^0\ 45'; \ \text{beobachtet}\ (001)\ (101) = 32^0\ 48'$$

Für Rutil wäre noch eine zweite Ableitungsmethode möglich, welche wohl nicht wie frühere mit der Combination des Zinnsteins übereinstimmt, jedoch noch viel auffallender die Beziehungen von Atomzahlen und Krystallaxen erkennen lässt.

b) $\text{Ŧi}O_2 = (\text{Ŧi}_3 + O_6)$

$$\tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}b = (\text{Ŧi} + \Theta_3) = 63 + 36{\cdot}7 \quad c = \text{Ti} = 63$$

$$a : b : c = 0{\cdot}997 : 0{\cdot}997 : 0{\cdot}63$$

$$\text{beobachtet} = 1 \quad : 1 \quad : 0{\cdot}64$$

Die hier eintretende Abweichung ist ebenfalls unter Einem Percent.

Auch die klinischen Krystallsysteme werden sich von nahe orthogonalen Grundmolekülen ableiten lassen, unter der Voraussetzung, dass das Verhältniss der Axen nicht ein Doma, sondern die geneigten Endflächen selbst betrifft. Ebenso werden sich auch die Hemimorphien erklären lassen durch die im Grundmoleküle bereits nach oben und unten verschiedene Atomgruppiruug. Vielleicht deutet sogar die bei Quarz in der Horizontalen auftretende Abweichung der Beobachtung von der Rechnung (vergl. pag. 169) auf eine circulare Drehung und Combination der verticalen Molekularschichten sein, welche letztere sowohl mit der chemischen Formel als auch mit dem Winkel übereinstimmen.

Ja es wird schliesslich möglich werden, auch die physikalischen Eigenschaften von der Lagerung der Elemente im Atome, mit Rücksichtnahme auf die Verbindung der Grundmoleküle zum Krystalle ab-

hängig zu machen. In einem der nachfolgenden Kapitel wird der Beweis für die Möglichkeit einer solchen Ableitung gegeben werden. Eine weitere Ausdehnung dieser Theorie wird jedoch nur dann möglich sein, wenn auch von den bisher optisch unzugänglichen Elementen ihre Atomistik bekannt geworden sein wird. Hier mag es genügen, den Weg angedeutet zu haben.

Es findet hierdurch auch gleichzeitig das Kapitel „Krystallogenesis" des I. Theiles vorliegenden Werkes seine durch die optischen Lehren möglich gewordene Ergänzung und durch Zahlen begründeten Abschluss. Alle bisherigen Untersuchungen begnügten sich mit der Erörterung von Symmetrieverhältnissen, und selbst die am weitesten vorgeschrittenen vermochten keinen haltbaren Grund anzugeben, warum dieser oder jener chemischen Verbindung dieses oder jenes Krystallsystem eigen sei, noch viel weniger aber die Winkelverhältnisse abzuleiten. Auf Grund der von mir aufgestellten Molekulartheorie des Lichtes gelingt hingegen ganz einfach und genau die Lösung der wichtigsten Probleme der Krystallphysik, „die Ableitung der Krystallformen der Verbindungen aus den Werthen der Grundstoffe." Und man wird diese Methode benützen können, um in Folge aus den bekannten Krystallformen die unbekannten optischen Eigenschaften von Grundstoffen oder umgekehrt durch letztere die ersteren zu ermitteln oder richtig zu stellen.

# III. Abtheilung.

## Die optischen Eigenschaften doppelbrechender Medien.



# XII. Kapitel.

## Die Wellenfläche doppelbrechender Medien.

§. 66. Um die Erscheinungen, welche doppelbrechende Krystalle beim Durchgange des Lichtes darbieten, der Rechnung unterwerfen zu können, ist es nothwendig, dieselben bezüglich ihrer quantitativen Werthe und deren symmetrischer Anordnung einer Erörterung zu unterziehen.

Bereits in einem früheren Kapitel ward hervorgehoben, dass molekulare Veränderungen, hervorgebracht durch Druck und Temperaturunterschiede oder durch Vibriren des Körpers, genügen, Doppelbrechung hervorzurufen. Es müssen daher auch in den Krystallen analoge Bedingungen vorhanden sein, welche diese Erscheinung verursachen.

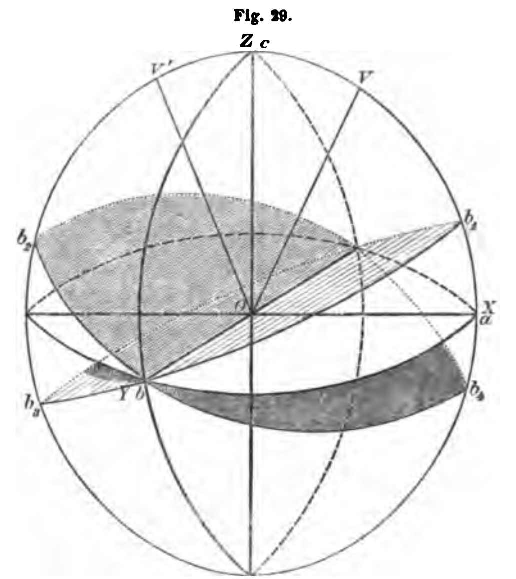
Die Molekulartheorie liefert hierfür eine Erklärung, durch die Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Dichte, welche letztere wieder in den Krystallen axial variirt.

Ist aber durch eine solche Annahme bereits von vornherein die Abhängigkeit der Werthe der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes von der symmetrischen Gestaltung des Krystalls bestimmt, so haben die experimentalen Untersuchungen (vergl. Kap. VIII) zu der genaueren Kenntniss derselben geführt.

Wie bereits in diesem erwähnten Kapitel angeführt, besteht zwischen den in einem Krystalle möglichen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten die einfache Relation, dass dieselben für Schwingungen, welche nach derselben axialen Richtung erfolgen, soweit die Beobachtungen lehren, ident sind. Hierdurch reduciren sich die sechs Werthe, welche dem Durchgange des Lichtes nach den drei axialen Dimensionen entsprechen, auf drei, welche die Geschwindigkeit des Lichtes für Vibrationen parallel den Krystallaxen darstellen. Vernachlässigt man vorerst die

Fälle von geneigten Krystallaxen, so lässt sich bereits durch diese Kenntniss die Beziehung des Brechungsexponenten zur Krystallform auf empirischem Wege ableiten[1]).

Fig. 29.




Es lassen sich nämlich die Grössen der Geschwindigkeiten für die drei auf einander senkrechten Schwingungen dadurch graphisch angeben, dass man von den drei Coordinatenaxen Theile abschneidet, welche bei willkürlicher Einheit der Dimension den relativen Werthen der Brechungsexponenten proportional sind. Vergleicht man Fig. 29, so stellen die Grössen *Oa*, *Ob*, *Oc* die relativen Werthe der Lichtfortpflanzungsgeschwindigkeiten *a*, *b*, *c* für Vibrationen parallel eben diesen Richtungen dar. Da die Vibrationen immer senkrecht auf der Fortpflanzungsrichtung des Lichtstrahls stehen, so entspricht dem eventuellen Durchgange des Lichtes jedesmal eine Zerlegung in die zwei darauf senkrechten Vibrationen mit den durch Fig. 29 bestimmten Geschwindigkeiten, so dass angehören dem

| Strahl | die Vibrationen | die Geschwindigkeiten |
|---|---|---|
| parallel *OX* | parallel *OY*, *OZ* | entsprechend *ob*, *oc* |
| *OY* | *OX*, *OZ* | *oa*, *oc* |
| *OZ* | *OX*, *OY* | *oa*, *ob* |

Für jeden intermediären Gang des Lichtstrahls werden ebenfalls zwei Vibrationen in Rechnung zu setzen sein, welche sich als Functionen der drei Hauptbrechungsexponenten ergeben müssen. Da die Werthe *oa*, *ob*, *oc* nicht einander gleich sind, so werden die Curven, welche die Punkte *a*, *b*, *c* verbinden, nicht Kreise, sondern krumme Linien im Allgemeinen sein können. Der Gang dieser Curven wäre unbestimmt, wenn nicht die Untersuchungen lehrten, dass die Werthe der Brechungsexponenten für intermediäre Richtungen einem gesetzmässigen conti-

[1]) Fresnel. Theorie der Doppelbrechung. Pogg. Ann. XXIII. 372, 494.

nuirlich steigenden oder fallenden Verlaufe der Curve entsprechen. Der einfachste Fall dieser letztgenannten ist die Ellipse. Durch diese Erwägungen ist es sichergestellt, dass man die optischen Verhältnisse im Allgemeinen durch ein Ellipsoid darstellen kann. Man kann jedoch zwei Wege wählen, um die Grössen der Hauptaxen des Ellipsoides zu bestimmen. Man kann dieselben direct der Geschwindigkeit des Lichtes nach diesen Richtungen gleichsetzen, wodurch wir zum Ellipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (124)$$

gelangen; oder hingegen die Axen des Ellipsoides als die graphische Darstellung der im Krystalle variirenden Dichte und daher des Brechungsexponenten benützen. Nur Letzteres stimmt sowohl mit der Molekulartheorie, als auch mit den thatsächlichen Aenderungen im Inneren der Krystalle überein; und wird der Figur 23 diese Annahme zu Grunde gelegt, so stellt sich die ganze Figur als die graphische Darstellung[1]) des Ellipsoides

$$1 = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} \qquad (125)$$

dar. Da $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ oder $\mu_\alpha$, $\mu_\beta$, $\mu_\gamma$ die Brechungsexponenten bezeichnen, so ist es bereits hier nothwendig zu erinnern, dass man in Beziehung der relativen Grössen folgende Annahmen macht

$$\mathfrak{a} > \mathfrak{b} > \mathfrak{c}: \qquad \mu_\alpha > \mu_\beta > \mu_\gamma \qquad (126)$$

daher die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, wenn die der Luft $= 1$ gesetzt wird, nach den drei Axen des Krystalls ist

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{\mu_\gamma} \qquad \mathfrak{b} = \frac{1}{\mu_\beta} \qquad \mathfrak{c} = \frac{1}{\mu_\alpha} \qquad (126\,a)$$

Man pflegt diese Werthe der Elasticitätsaxen nach ihrer Grösse zu benennen und gibt der Axe $\mathfrak{b}$ den Ausdruck mittlere Elasticitätsaxe.

Die Ebene zweier Elasticitätsaxen wird oft mit dem Ausdrucke optischer Hauptschnitt bezeichnet.

1) Da nach (126) $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ die extremen Werthe und durch eine Ellipse mit einander verbunden sind, so ist es von selbst verständlich, dass man im Verlaufe dieser Curve alle Werthe der Durchmesser dieser Ellipse von $\mathfrak{a}$ bis $\mathfrak{c}$, und daher auch an einem Punkte den Werth von $\mathfrak{b}$ erhalten muss. Es muss sich diess in jedem Quadranten wiederholen, und wir haben dann in Fig. 29 hierdurch die Punkte $b^1, b^2, b^3, b^4$ bestimmt. Diese Punkte sind dadurch ausgezeichnet, dass die Vibrationen parallel

[1]) Die auf das Elasticitätsellipsoid Bezug habenden Formeln folgen in einem späteren Paragraphe.

den Durchmessern $Ob^1, Ob^2, Ob^3, Ob^4$ dieselben Geschwindigkeiten haben wie parallel der Elasticitätsaxe $b$; und verbinden wir die Punkte $b^1, b^2, b^3, b^4$ mit $b$, so erhalten wir Kreisschnitte, in welchen alle Vibrationen einerlei Geschwindigkeit liegen.

Die Folge hiervon ist, dass eine Welle, welche parallel zu einem solchen Kreisschnitte in dem Krystalle ist, nicht in Wellen zweierlei Geschwindigkeiten zerlegt wird, sondern sich im Krystalle einfach gebrochen fortpflanzt.

2) Die auf die erwähnten Kreisschnitte senkrechten Richtungen $V, V'$ (Fig. 29) der im Inneren des Mediums einfach gebrochenen Welle werden mit dem Namen **primäre optische Axen für Wellen** bezeichnet.

Da diese Normalen, sowie die Diameter $Ob'$.. in die Axenebene $XZ$ ($ac$) fallen, so ist es möglich, aus der Kenntniss der Grössen von $abc$ auch die Winkel von $V$ oder $Ob'$ zu einer der Axen $X$ oder $Z$ auf einfache Weise zu bestimmen.

Bekanntlich ist nämlich die Gleichung ($\Delta$) eines Durchmessers der Ellipse $a^2d^2 = a^2c^2 + (a^2 - c^2)x^2$. Würde der Durchmesser $d$ in der Richtung $Ob'$ gewählt, so kann für denselben $d = b$ und $\sphericalangle\, b'OX = (90 - \mathrm{X})$ gesetzt werden. Dadurch wird

$$x = d \cos b'OX = d \cos (90 - \mathrm{X})$$

Substituirt man diess in die obige Gleichung ($\Delta$) und bedenkt, dass X der Winkel der Normale $V$ des Kreisschnittes $Ob'$ zur Coordinatenaxe $X$, sowie Z den Winkel zur Coordinate $Z$ bedeutet, so erhält man für diese letzteren die Werthe

$$(127) \quad \begin{aligned} \cos^2 \mathrm{X} &= \frac{\gamma^2}{\beta^2}\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - \gamma^2}\right) = \cos^2 \frac{V \c{V}'}{2} \\ \cos^2 \mathrm{Z} &= \frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(\frac{\beta^2 - \gamma^2}{\alpha^2 - \gamma^2}\right) = \cos^2 \frac{V \underline{\mathrm{a}} V'}{2} \end{aligned}$$

welche die Lage und den Winkel der optischen Axen $V, V'$ als Function der Brechungsexponenten darstellt. Sind diese letzteren $\alpha, \beta, \gamma$ von einander verschieden, so sind auch die Winkel X, Z reell; es existiren zwei optische Axen. Ist $\alpha = \beta$ oder $\beta = \gamma$, so wird entweder $\sphericalangle$ Z oder $\sphericalangle\,\mathrm{X} = 0$ und die zwei Axen $V, V'$ fallen in eine einzige[1]) (negative oder

[1]) Ich glaube hier bemerken zu müssen, dass, so wenig in krystallographischer Beziehung zwischen dem pyramidalen, hexagonalen und prismatischen Systeme ein Unterschied sich behaupten lässt, diess ebenso wenig in optischer Hinsicht eine Trennung dieser Systeme gerechtfertigt ist. Es sind in einander greifende Glieder einer Reihe, vom Allgemeinen durch Specialisirung zum Isophanen herabsteigend. Da somit eine Trennung von ein- und zweiaxigen Medien theoretisch nicht zu billigen ist, so unterblieb dieselbe hier. Die im Nachfolgenden entwickelten Formeln sind die allgemein giltigen, welche sich durch die Annahmen $\mathrm{X} = 0$ $\mathrm{Z} = 1$ $\alpha = \beta$ oder $\mathrm{X} = 1$ $\mathrm{Z} = 0$ $\beta = \gamma$ leicht in die speciellen Formeln verwandeln lassen.

positive) optische Axe zusammen. Diess wird als Charakteristikon des pyramidalen und rhomboedrischen Systems aufgefasst, und des weiteren im §. 68 erörtert. In diesen einaxigen Krystallen werden, je nachdem $\beta = \gamma$ oder $\alpha = \beta$ diese beiden Werthe der Brechungsexponenten immer mit $\omega$ bezeichnet, während der Brechungsexponent jenes Strahles, dessen Vibrationen parallel der optischen Hauptaxe vor sich gehen, mit $\varepsilon$ bezeichnet wird.

§. 67. Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener Wellen. Da das Constructionsellipsoid (Fig. 29) die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Vibrationen angibt, so lässt sich mittelst desselben für jede beliebige Richtung derselben auch die dazu gehörige Geschwindigkeit ermitteln. Sei diese letztere für einen beliebigen Radius $\varrho$ des Ellipsoides zu bestimmen, dessen Neigungen zu den Coordinatenaxen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ sind, so ist in Folge des bekannten

$$x = \varrho \cos \mathfrak{x} \qquad \cos^2 \mathfrak{x} = 1 - \cos^2 \mathfrak{y} - \cos^2 \mathfrak{z}$$

$$\frac{1}{\varrho^2} = \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}\right) \cos^2 \mathfrak{x} + \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\beta^2}\right) \cos^2 \mathfrak{z} + \frac{1}{\beta^2} \tag{128}$$

Man kann auf Grund dieser Gleichung aber den Werth von $\varrho^2$ als auch als Function der Neigung $\varphi\varphi'$ des Radius zu den beiden optischen Axen $V$, $V'$ darstellen. Haben also die Winkel X, Z, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$ ihre frühere Bedeutung, und ist (Fig. 30) $\cos \mathfrak{z} = \sin \mathfrak{x} \cos V'X'r$, so wird

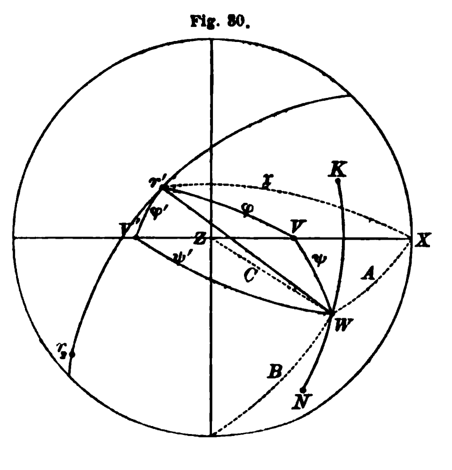
$$\cos\varphi = \cos\mathfrak{x}\cos X + \cos\mathfrak{z}\cos Z \qquad \cos\varphi' = -\cos\mathfrak{x}\cos X + \cos\mathfrak{z}\cos Z \tag{129}$$

wodurch sich (128) transformirt in

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{\beta^2} - \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right) \cos \varphi \cos \varphi' \tag{128a}$$

1) Mittelst dieser Gleichung und mehrerer Hilfssätze ist es möglich, die Geschwindigkeit zu ermitteln von jenen zwei Wellenzügen, welche aus dem einfallenden Strahl durch Doppelbrechung entstanden, senkrecht zu einander polarisirt sind, und welche den Krystall parallel einer beliebigen Ebene durchdringen. Die Cosinusse der Wellennormale $W$ (Fig. 30) zu den Coordinatenaxen werden $A, B, C$ genannt werden.

Fig. 30.



Geht also eine Welle in der Richtung ihrer Normale $W$ (Fig. 30) durch den Krystall, so wird diese Wellenebene

$$Ax + By + Cz = 0$$

das Constructionsellipsoid (125) jedenfalls in einer ebenen Ellipse ($E'$) schneiden, in welche Ebene dann auch die Vibrationsrichtungen der beiden entgegengesetzt polarisirenden Strahlen fallen müssen.

Ohne die directe Auswerthung der Radien durchzuführen (vide §. 68), lassen sich doch bereits einige einfache Relationen ableiten.

a) Da die Schwingungen in die Ebene der Ellipse $E'$ fallen, so müssen sie, um nicht unbestimmt im Raume zu sein, jene Richtungen haben, welche dem Maximum oder Minimum des für $E'$ möglichen Radius entsprechen, d. i. die Vibrationen parallel der grossen und kleinen Axe $a$, $c$ der Ellipse $E'$.

b) Von den Kreisschnitten $b_1$, $b_3$ und $b_2$, $b_4$ des Constructionsellipsoides (Fig. 29) muss die Ellipse $E'$ in vier homolog liegenden Punkten $p_1$, $p_2$, $p_3$, $p_4$ geschnitten werden, so dass jeder diesen Durchschnittspunkten entsprechende Durchmesser $d_1$, $d_2$, $d_3$, $d_4$ von $E'$ den mittleren Werth $b$ besitzen muss.

c) Da die den Vibrationsrichtungen entsprechenden Axen der Ellipse $E'$ die grössten und kleinsten Werthe darstellen, so müssen die Durchschnittspunkte $p_1$, $p_2$ von den Endpunkten der Axen $a$ oder $c$ gleich weit entfernt sein, oder die Winkel, welche die Durchmesser $d_1$, $d_2$ bilden, werden von den Axen $a$ oder $c$ halbirt.

d) Setzt man anstatt dieser Ebenen deren Normalen, so folgt aus Letztgesagtem, dass auch der Körperwinkel, welchen die Wellennormale $W$ mit den beiden optischen Axen $V$, $V'$ bildet, durch jene Ebene halbirt wird, welche durch die Normale $W$ und die auf ihr senkrechte Vibrationsrichtung $\mathfrak{r}_1$ gelegt werden kann.

2) In Folge dieses letzten wichtigen Satzes ist in Figur 30

$$\sphericalangle W\mathfrak{r}_1 = 90^0 \qquad \sphericalangle \mathfrak{r}_1 WV = \mathfrak{r}_1 WV' = {}^1/_2\, VWV'$$

und hierdurch wird es möglich, die in (128) dargestellte Relation so zu transformiren, dass dieselbe die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der beiden in der Ellipse $E'$ liegenden, auf $W$ senkrechten Vibrationen $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ darstellt, und nur mehr von den Winkeln $\psi$, $\psi'$ der Wellennormale $W$ zu den beiden optischen Axen $V$, $V'$ abhängt.

Ist nämlich die Neigung der Durchmesser $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ zu den Axen mit $\varphi_1$, $\varphi'_1$; $\varphi_2$, $\varphi'_2$ bezeichnet, sowie $VV' = 2X$, so ist, wie leicht ersichtlich

$$\cos \varphi_1 = + \cos {}^1/_2\, VWV' \cos \psi$$
$$\cos \varphi'_1 = + \cos {}^1/_2\, VWV' \cos \psi'$$
$$\cos \varphi_2 = - \sin {}^1/_2\, VWV' \cos \psi$$

worin $\cos VWV' = \dfrac{\cos AB - \cos \psi \cos \psi'}{\sin \psi \sin \psi'}$

Führt man alle angezeigten Reductionen aus und substituirt die erhaltenen Werthe für die Radien $\mathfrak{r}_1$ oder $\mathfrak{r}_2$ in die Gleichung (128), so folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varrho_1^2} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right) \cos(\psi + \psi') \\ \frac{1}{\varrho_2^2} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right) \cos(\psi - \psi') \end{aligned} \qquad (130)$$

welche Gleichung die Geschwindigkeit der zwei zu einander senkrecht schwingenden Wellen $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ angibt, welche sich in Einer Richtung fortpflanzen, die durch die Neigung $\psi$, $\psi'$ der Wellennormale zu den optischen Axen bestimmt ist.

Aus Gleichung (130) folgt schliesslich für den Unterschied der Geschwindigkeit zweier Wellen einerlei Richtung

$$\frac{1}{\varrho_2^2} - \frac{1}{\varrho_1^2} = \pm \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right) \sin \psi \sin \psi' \qquad (131)$$

eine für die Interferenz zweier Wellen wichtige Gleichung.

Die Werthe von $\psi$, $\psi'$ ergeben sich analog (129) aus

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \phantom{-}A \cos X + C \cos Z \\ \cos \psi' &= -A \cos X + C \cos Z \end{aligned} \qquad (129a)$$

Ferner ist zu bemerken, dass $\psi$ $\psi'$ auf jene optischen Axen bezogen wurden, welche auf beiden Seiten der Elasticitätsaxe $\mathfrak{a}$ liegen. (130) gilt daher gleichsam für einen negativen Krystall. Für einen positiven ($\mathfrak{c}$), Krystall, oder wenn man $\psi$, $\psi'$ auf die optischen Axen um die Elasticitätsaxe $\mathfrak{c}$ beziehen wollte, müsste $180 - \psi$ statt $\psi$ gesetzt werden, wodurch die Vorzeichen der Glieder der Gleichung (131) statt positiv negativ würden. In Folge dessen hat (131) doppelte Zeichen.

3) Die hier aufgestellten Gleichungen (130), (131), welche den Werth ler Brechungsexponenten von der Lage der optischen Axen abhängig machte, vereinfachen sich naturgemäss, wenn, wie am Schlusse des vorigen Paragraphes erörtert, bei den sogenannten einaxigen, pyramilalen oder hexagonalen Krystallen die beiden optischen Axen in eine usammenfallen, daher wird

$$\psi = \psi_1$$

Wir erhalten dann aus (130)

$$\frac{1}{\varrho_2^2} = \frac{1}{\alpha^2}$$

(132) $$\frac{1}{\varrho_1^2} = \left[ \tfrac{1}{2} \left( \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right) + \tfrac{1}{2} \left( \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right) \cos 2\psi \right] =$$

$$= \left[ \frac{1}{\gamma^2} - \left( \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \cos^2\psi \right] = \frac{1}{\gamma^2} \sin^2\psi + \frac{1}{\alpha^2} \cos^2\psi$$

welche letztere Gleichung für einaxige Krystalle am häufigsten angewendet wird. Bezüglich circularpolarisirender Medien vergl. pag. 209. Will man in diese Gleichungen die gewöhnlichen Buchstaben für die Brechungsexponenten einaxiger Krystalle einführen, so ist zu setzen $\omega$ statt $\alpha$ und $\varepsilon$ statt $\gamma$ (vergl. pag. 179). Aus (131) folgt für einaxige Krystalle

(133) $$\frac{1}{\varrho_2^2} - \frac{1}{\varrho_1^2} = \pm \tfrac{1}{2} \left( \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right) \sin^2\psi$$

als Gleichung für die Differenz zweier Brechungsexponenten.

§. 68. Fresnel's Elasticitätsfläche. Gestalt der Wellenfläche. Die im vorhergehenden Paragraphe abgeleiteten Gleichungen genügen, um die Geschwindigkeit der Wellen abzuleiten, welche einer unter bekannter Neigung den Krystall durchlaufenden Welle angehören. Sie entsprechen gleichzeitig jenen Formeln, welche Fresnel mit Zugrundelegung der Elasticitätsfläche aufgestellt hatte.

1) Die Relation zwischen der Fresnel'schen Elasticitätsfläche und dem Constructionsellipsoide 125 besteht darin, dass die reciproken Werthe der Radien der ersteren den Werthen der Radien der zweiten Fläche gleich sind.

Während somit die Axen des Constructionsellipsoides die Brechungsexponenten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sind, sind die Axen der Fresnel'schen Elasticitätsfläche $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$ oder $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, d. h. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit selbst[1]).

---

[1]) Mit der Fresnel'schen Elasticitätsfläche 135 hat auch das nachfolgende Ellipsoid

(134) $$\frac{x^2}{\mathfrak{a}^2} + \frac{y^2}{\mathfrak{b}^2} + \frac{z^2}{\mathfrak{c}^2} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; (S)$$

gleiche Grösse der Coordinatenaxen, allein die intermediären Radien sind verschieden von jenen von (137). Das Ellipsoid ($S$) stellt die Geschwindigkeit der Strahlen, abhängig von der Richtung derselben dar, und kann daher Ellipsoid für Strahlen genannt werden. Das Ellipsoid ($S$ 134) besitzt wie die Elasticitätsfläche ebenfalls Kreisschnitte, deren Normalen dieselbe Rolle für Strahlen spielen, wie die Axen der Elasticitätsflächen $V$, $V'$ für Wellen. Die ersteren Normalen, welche (weil die zum Strahle senkrechten Vibrationen in den Kreisschnitt fallen) andeuten, dass zu ihnen parallel Strahlen mit Einer Geschwindigkeit den Krystall durchlaufen, werden secundäre Axen für Strahlen genannt, und deren Winkel berechnen sich nach (127), wenn $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ statt $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gesetzt wird. Auf ähnliche Weise werden sich auch die Gleichungen für den Werth intermediärer Strahlen ergeben, wenn man in die für dieselben geltenden Formeln (128—133) statt $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Werthe $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$ oder $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ einführt. Die Form der Gleichungen bleibt unverändert

Führt man daher in das Constructionsellipsoid statt der Coordinaten $x$, $y$, $z$ die Werthe $\varrho \cos \mathfrak{x}$, $\varrho \cos \mathfrak{y}$, $\varrho \cos \mathfrak{z}$ ein, so verwandelt sich die Gleichung (125) in

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\cos^2 \mathfrak{x}}{\alpha^2} + \frac{\cos^2 \mathfrak{y}}{\beta^2} + \frac{\cos^2 \mathfrak{z}}{\gamma^2} \tag{135}$$

oder wenn man statt der Brechungsexponenten die ihnen reciproken Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes annimmt, in

$$\mathfrak{r}^2 = \mathfrak{a}^2 \cos^2 \mathfrak{x} + \mathfrak{b}^2 \cos^2 \mathfrak{y} + \mathfrak{c}^2 \cos^2 \mathfrak{z} \tag{136}$$

Setzt man die Gleichung in Coordinaten um, so folgt, wenn man mit $\mathfrak{r}^2 (\cos^2 \mathfrak{x} + \cos^2 \mathfrak{y} + \cos^2 \mathfrak{z}) = \mathfrak{r}^2$ multiplicirt und dem Charakter der neuen Fläche entsprechend $\mathfrak{r} \cos \mathfrak{x} \ldots x, y, z$ setzt

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = \mathfrak{a}^2 x^2 + \mathfrak{b}^2 y^2 + \mathfrak{c}^2 z^2 = \mathfrak{r}^4 \tag{137}$$

Die Gleichungen (136) und (137) sind die Gleichungen der Fresnel'schen Elasticitätsfläche. Diese letztere Gleichung entspricht nun der Relation, welche zwischen dem Fresnel'schen Constructionsellipsoid und der Elasticitätsfläche oben angenommen ward.

Die auf Grund derselben für die optischen Axen und für die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in der Richtung eines Radius sich ergebenden Formeln sind mit denjenigen des vorhergehenden Paragraphes ident.

2) Für diese letztgenannten Formeln lässt sich jedoch mittelst (136) bereits eine directe Ableitung geben.

Wird nämlich die Elasticitätsfläche 136 durch irgend eine Fläche $(F): Ax + By + Cz = D$ geschnitten, so entsteht ein elliptischer Durchschnitt, dessen Hauptaxen, d. i. Maximum und Minimum des Radius, die Grösse und Richtung der Vibrationen angibt.

$A$, $B$, $C$ sind die Cosinusse der Winkel, welche die Normale auf der Fläche $(F)$ mit den Krystallaxen $X, Y, Z$ bildet; ferner werden auch die Hauptaxen des elliptischen Durchschnittes, da sie gleichzeitig Radien des Ellipsoides 136 sind, bezüglich $\cos \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ der Gleichung (136) entsprechen müssen.

Führt man schliesslich für $(F)$ statt $x, y, z \ldots\ldots \mathfrak{r} \cos \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ ein, so hat man die Relationen

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}^2 &= \mathfrak{a}^2 \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{b}^2 \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{c}^2 \mathfrak{z}^2 \quad (E) \\ 0 &= A\mathfrak{x} + B\mathfrak{y} + C\mathfrak{z} \quad (F) \\ 1 &= \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 \end{aligned} \tag{138}$$

wobei hier und später in leicht erkennbaren Fällen statt $\cos \mathfrak{x}$, $\cos \mathfrak{y}$, $\cos \mathfrak{z}$ abgekürzt $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ gesetzt wird.

Da das Maximum und Minimum des Radius der Schnittfläche gesucht wird, so muss derselbe somit der Gleichung $(E)$ und $(F)$, sowie der Bedingung $d\mathfrak{r} = 0$ entsprechen. Um $\mathfrak{r}$ zu finden, bildet man die totalen Differenziale der drei Gleichungen, setzt $d\mathfrak{r} = 0$, und bestimmt aus diesen drei Gleichungen $\xi, \eta, \zeta$, wobei man, um eine allgemeine Lösung zu ermöglichen, $d(E) = 0$ mit der Constanten $\Phi$, die Gleichung $d(F) = 0$ mit der Constanten $\Psi$ multiplicirt.

Führt man diese Operationen aus, so bestimmt sich, wenn

$$\Phi\mathfrak{r}^2 + 1 = 0$$
$$\Psi\mathfrak{r}^2 = A\mathfrak{x}\mathfrak{a}^2 + B\mathfrak{y}\mathfrak{b}^2 + C\mathfrak{z}\mathfrak{c}^2$$

gesetzt wird, die Werthe der Cosinusse der Winkel zu

$$(139)\quad \cos\mathfrak{x} = -\frac{\Psi A}{\Phi\mathfrak{a}^2 + 1};\quad \cos\mathfrak{y} = -\frac{\Psi B}{\Phi\mathfrak{b}^2 + 1};\quad \cos\mathfrak{z} = -\frac{\Psi C}{\Phi\mathfrak{c}^2 + 1}$$

oder wenn man die angezeigten Operationen durchführt, wobei man die Relation $\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 = 1$ berücksichtigen muss, zu

$$(140)\quad \begin{aligned} \Delta\cos\mathfrak{x} &= -AC\mathfrak{c}^2(\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{b}^2) \\ \Delta\cos\mathfrak{y} &= -BC\mathfrak{c}^2(\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{a}^2) \\ \Delta\cos\mathfrak{z} &= A^2\mathfrak{a}^2(\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{b}^2) + B^2\mathfrak{b}^2(\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{a}^2) + (\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{a}^2)(\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{b}^2) \end{aligned}$$

wobei sich der numerische Werth von $\Delta$ leicht aus

$$\Delta^2 = \Delta^2(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2) = f(ABC\ \mathfrak{abc}\ \mathfrak{r})$$

als die Summe der Quadrate der linken Glieder ergibt.

3) Zur vollständigen Auswerthung der Gleichung (140) ist noch die Kenntniss der beiden Werthe von $\mathfrak{r}^2$ nöthig. Letzteres folgt durch Substitution der Werthe von (139) in die Gleichung der Fläche $(F)$ zu

$$(141)\quad \frac{A^2}{\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{r}^2} + \frac{B^2}{\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{r}^2} + \frac{C^2}{\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{r}^2} = 0$$

Diess ist die allgemeine Gleichung, welche die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der zwei zusammen gehörenden, senkrecht zu einander polarisirten Wellen[1]) bestimmt, abhängig von $A$, $B$, $C$, den drei Cosinusse der Winkel, die die Normale $W$ auf die Wellenfläche mit den Coordinatenaxen $X$, $Y$, $Z$ einschliesst.

---

[1]) Sucht man nicht die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen, sondern vielmehr jene Geschwindigkeit des Strahles $\mathfrak{s}$, dessen Cosinus zu $XYZ$ mit $PQR$ bezeichnet werden, so sind im (141) wie aus vorhergehender Note erhellt, die reciproken Werthe einzusetzen. Hierdurch folgt

$$(142)\quad \frac{\mathfrak{a}^2P^2}{\mathfrak{s}^2 - \mathfrak{a}^2} + \frac{\mathfrak{b}^2Q^2}{\mathfrak{s}^2 - \mathfrak{b}^2} + \frac{\mathfrak{c}^2R^2}{\mathfrak{s}^2 - \mathfrak{c}^2} = 0$$

zur Bestimmung der Werthe von $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2$. Die Wurzeln dieser Gleichung lassen sich durch eine Formel darstellen, welche aus (130) entsteht, wenn man in dieselbe $\mathfrak{s}^2\ \mathfrak{a}^2\ \mathfrak{b}^2\ \mathfrak{c}^2$ statt $\mathfrak{r}^{-2}\ \mathfrak{a}^{-2}\ \mathfrak{b}^{-2}\ \mathfrak{c}^{-2}$ einsetzt und auch $\psi'$, $\psi''$, die Winkel des Strahles zu den secundären Axen einführt.

Da (141) eine quadratische Gleichung nach $\mathfrak{r}^2$ ist, so ist eine Bestimmung von $\mathfrak{r}^2$ möglich. Bestimmt man die auftretenden Coefficienten als die Cosinusse beliebiger Winkel, beispielsweise als

$$\left.\begin{aligned} A\sqrt{\frac{\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2-\mathfrak{c}^2}}+C\sqrt{\frac{\mathfrak{b}^2-\mathfrak{c}^2}{\mathfrak{a}^2-\mathfrak{c}^2}}&=\cos\psi \\ -A\sqrt{\frac{\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2-\mathfrak{c}^2}}+C\sqrt{\frac{\mathfrak{b}^2-\mathfrak{c}^2}{\mathfrak{a}^2-\mathfrak{c}^2}}&=\cos\psi' \end{aligned}\right\} \tag{143}$$

so haben die Wurzeln der Gleichung (141) die im früheren Paragraphe unter (130) angegebene Gestalt. Nach einiger Ueberlegung erkennt man aber, dass auch (143) mit (139a) zusammenfällt. Es sind somit die auf directem Wege gewonnenen Werthe von $\mathfrak{r}^2$, $\mathfrak{r}_1^2$ mit jenen des früheren Paragraphes ident. Und wir gelangen zur Kenntniss der wichtigsten Grundgleichungen (130) und (141), welche die meisten optischen Verhältnisse in sich schliessen.

§. 69. Wellenfläche. Die Gleichung (141) gibt, abhängig von der Richtung des Wellenganges, die Werthe der zwei Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, welche den ebenen Wellen bei ihrem Durchgange durch den Krystall zukommen.

1) Durch Variation der Werthe $A$, $B$, $C$ wird es möglich sein, alle in einem Krystalle möglichen Werthe von ($\mathfrak{r}$) im vorhinein zu ermitteln und hierdurch die Gestalt der Wellenoberfläche zu erkennen, d. i. die Verbindungsfläche aller jener Punkte, bis zu welchen nach gleicher Zeit vom Mittelpunkte der Coordinaten als Erschütterungscentrum aus die Wellen vordringen. Während diese Fläche bei den einfach brechenden Medien, wie leicht erkennbar, eine Kugel ist, ist dieselbe bei den doppelbrechenden Medien ein zweischaliger ellipsoidischer Körper.

Zur Kenntniss der Form desselben gelangt man einfach auf constructivem Wege, wenn man die drei Hauptfälle, wo die Normalen auf der Welle in eine Ebene zweier Coordinatenaxen fallen, in Erwägung zieht.

Die Gleichung (141) vermag nämlich noch unter nachstehender Form angeschrieben werden:

$$\mathfrak{r}^4-[(\mathfrak{c}^2+\mathfrak{b}^2)A^2+(\mathfrak{a}^2+\mathfrak{c}^2)B^2+(\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2)C^2]\mathfrak{r}^2+(A\mathfrak{b}\mathfrak{c})^2+(B\mathfrak{a}\mathfrak{c})^2+(C\mathfrak{a}\mathfrak{b})^2=0 \tag{144}$$

Für einaxige Krystalle vereinfacht sich die Gleichung in Folge (132) zu

$$(\mathfrak{r}^2-\mathfrak{c}^2)\,[\mathfrak{r}^2-\mathfrak{a}^2-(\mathfrak{a}^2-\mathfrak{c}^2)\cos^2\psi]=0 \tag{145}$$

worin $\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$ angenommen ist.

Aus Gleichung (144) erhalten wir:

1. wenn die Normalen der Welle in die Ebene $YZ$ fallen, daher $A=0$ wird

$$(\mathfrak{a}^2-\mathfrak{r}^2)\,(\mathfrak{c}^2B^2+\mathfrak{b}^2C^2-\mathfrak{r}^2)=0$$

2. Wenn die Normalen in die Ebene $XY$ fallen; $C = 0$

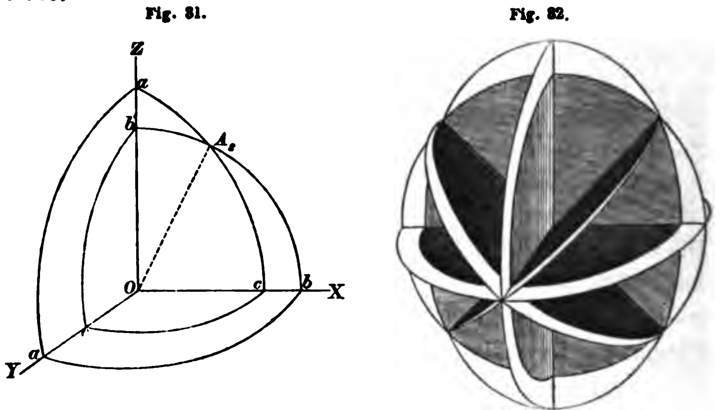
$$(\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{r}^2)(\mathfrak{a}^2 B^2 + \mathfrak{b}^2 A^2 - \mathfrak{r}^2) = 0$$

3. Wenn die Normalen in die Ebene $XZ$ fallen; $B = 0$

$$(\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{r}^2)(\mathfrak{a}^2 C^2 + \mathfrak{c}^2 A^2 - \mathfrak{r}^2) = 0$$

Geht man in die Discussion dieser drei Gleichungen ein, so erkennt man, dass jeder derselben zwei Werthe entsprechen. Einer derselben, durch das erste Glied dargestellt, bleibt für alle weiteren Variationen der Wellenlage ($BC$, $BA$, $AC$) constant, die Bewegung der Welle wird daher ein Kreis sein. Der zweite Werth, entsprechend dem zweiten Gliede, wird mit den Werthen der Cosinusse der Neigung entsprechend dem Diameter einer Ellipse variiren. Die Welle wird somit auch von einer Ellipse begrenzt werden. Specialisirt man noch weiters die obigen Gleichungen, indem man die Wellennormalen successive in eine der Coordinatenaxen fallen lässt, also z. B. $C = 0$, $B = 1$ oder $B = 0$, $A = 1$, so erhält man die Maximalwerthe $\mathfrak{c}^2$ oder $\mathfrak{b}^2$ für die in die Coordinatenaxen fallenden Werthe der Diameter von der die Wellenfläche begrenzenden Ellipse. Betrachtet man beispielsweise den obigen dritten Fall, so ist der Radius des Kreises $\mathfrak{b}$, die Axen der Ellipse $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, und die Ellipse wird daher in Folge unserer Annahme $\mathfrak{a} > \mathfrak{b} > \mathfrak{c}$ den Kreis in irgend einem Punkte $A$ (Fig. 31) durchschneiden; in den beiden anderen Coordinatenebenen kommt kein Durchschnittspunkt vor.

Fig. 31. Fig. 32.




2) Durch diese Discussion wird es möglich, die Wellenfläche zu construiren. Fig. 31 zeigt den positiven Quadranten, Fig. 32 die ganze Wellenfläche sammt den durch den Punkt $A$ gelegten Durchschnitten.

Der Punkt $A$ entspricht der secundären Axe für Strahlen, indem in der Richtung derselben $OA$ ein Strahl, wie die Construction lehrt,

einfach gebrochen durchgeht. Einer durch den Krystall gehenden Welle kommen hingegen einerlei Werthe ihrer Radien zu, wenn dieselbe sich parallel den Kreisschnitten des Ellipsoides, parallel *bb* (Fig. 25) bewegt, so dass deren Fortpflanzungsrichtung mit den primären Axen $VV'$ für Wellen zusammenfällt.

Wir haben nun in der Wellenfläche die allgemeine einhüllende Fläche aller jener Wellen, welche sich in gleicher Zeit vom Erschütterungsmittelpunkte, aber mit verschiedener Geschwindigkeit ausgebreitet haben. Unter dem zur Welle gehörenden Strahle werden wir dann jene Gerade zu verstehen haben, welche vom Erschütterungsmittelpunkte gezogen wird zu jenen Theilen in der Wellenfläche, die der durchgehenden ebenen Welle gleich liegen.

Man kann in Folge dieser Deduction auch die Länge des Strahles als Mass der Geschwindigkeit der Welle benützen und hierdurch wird es leicht, zur Gleichung der Wellenfläche zu gelangen.

Letztere wird sich nämlich aus der für Strahlen geltenden Gleichung (142) nach Elimination der Neigungswinkel ergeben.

Setzt man nämlich $\mathfrak{s}^2 = x^2 + y^2 + z^2$; $x = \mathfrak{s}P$ (vergl. 142), so folgt unmittelbar als Gleichung der Wellenfläche

$$\frac{\mathfrak{a}^2x^2}{\mathfrak{a}^2-(x^2+y^2+z^2)}+\frac{\mathfrak{b}^2x^2}{\mathfrak{b}^2-(x^2+y^2+z^2)}+\frac{\mathfrak{c}^2z^2}{\mathfrak{c}^2-(x^2+y^2+z^2)}=0 \quad (146)$$

3. Dass diese Gleichung[1]) wirklich die Form der Wellenfläche darstellt, somit auch der für Wellen geltenden Gleichung (141) entspricht, hat Senff auf einfachem Wege abgeleitet. Da nach dem Zeugnisse Neumann's (Berl. Acad. Abh. 1835, pag. 90) Senff der erste war, dem eine elegante und genügende Ableitung von (146) gelang, dieselbe aber jetzt in den neueren, sonst vollständigen Arbeiten über die Literatur der Doppelbrechung meist ignorirt wird, so theile ich im Kurzen den Gang seiner Beweise mit. Derselbe ist um so wichtiger, da er die Relation zwischen Strahl und Welle näher bestimmt.

Ist die Gleichung einer Wellenebene durch

$$Ax + By + Cz = \mathfrak{r} \quad . \; . \; . \; F(b)$$

gegeben, so besitzen wir zur Bestimmung von $xyz$ noch $(141) = F(a)$ und

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1 \quad . \; . \; . \; F(c)$$

somit drei Functionen.

[1]) Senff C. E. Untersuchung über die Gesetze der doppelten Strahlenbrechung und Polarisation des Lichtes, Dorpat 1837. 4. vergl. Stefan: Theorie der Doppelbrechung. Sitzungsber. der Wiener Acad. 1864. L (2.) 505. Zech: Wellenfläche: Crelle Journal. 1856 vol. LII. 1857. vol. LIV. 1858 vol. LV.

Bildet man die totale Differenziale von $F(a)$, $F(b)$ und eliminirt $d\mathfrak{r}$, so erhält man, wenn man im Allgemeinen

$$(147) \qquad \mathfrak{F}_\mathfrak{r}^2 = \frac{A^2}{(\mathfrak{r}^2-\mathfrak{a}^2)^2} + \frac{B^2}{(\mathfrak{r}^2-\mathfrak{b}^2)^2} + \frac{C^2}{(\mathfrak{r}^2-\mathfrak{c}^2)^2}$$

setzt, und je nachdem $\mathfrak{r}$ in die Werthe $\mathfrak{r}_1$ oder $\mathfrak{r}_2$ übergeht, auch statt $\mathfrak{F}_\mathfrak{r}$ setzt $'\mathfrak{F}_\mathfrak{r}^2$ $''\mathfrak{F}_\mathfrak{r}^2$

$$\left(\frac{A}{\mathfrak{r}^2-\mathfrak{a}^2}-\mathfrak{F}_\mathfrak{r}^2\mathfrak{r}x\right)dA+\left(\frac{B}{\mathfrak{r}^2-\mathfrak{b}^2}-\mathfrak{F}_\mathfrak{r}^2\mathfrak{r}y\right)dB+\left(\frac{C}{\mathfrak{r}^2-\mathfrak{c}^2}-\mathfrak{F}_\mathfrak{r}^2\mathfrak{r}z\right)dC=0$$

Aus dieser Gleichung und dem ersten Differenziale $F'(c)$ kann man mittelst eines unbestimmten Factors $E$ auch $dA$, $dB$, $dC$ eliminiren, woraus man erhält

$$(148) \qquad \begin{aligned} A\left(\frac{E}{\mathfrak{r}^2-\mathfrak{a}^2}+1\right)+\mathfrak{F}_\mathfrak{r}^2 E\,\mathfrak{r}x &= 0 \\ B\left(\frac{E}{\mathfrak{r}^2-\mathfrak{b}^2}+1\right)+\mathfrak{F}_\mathfrak{r}^2 E\,\mathfrak{r}y &= 0 \\ C\left(\frac{E}{\mathfrak{r}^2-\mathfrak{c}^2}+1\right)+\mathfrak{F}_\mathfrak{r}^2 E\,\mathfrak{r}z &= 0 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Constante $E$ addiren wir die drei Gleichungen nachdem sie 1. mit $A$, $B$, $C$; 2. mit $\frac{A}{\mathfrak{r}^2-\mathfrak{a}^2}$, $\frac{B}{\mathfrak{r}^2-\mathfrak{b}^2}$, $\frac{C}{\mathfrak{r}^2-\mathfrak{c}^2}$; 3. mit $x, y, z$ successive multiplicirt wurden. Benützt man zur Reduction die jedesmal erhaltenen Resultate, so folgt

$$(149) \qquad 1 = \mathfrak{F}_\mathfrak{r}^2 E\mathfrak{r}^2 \qquad E = (x^2+y^2+z^2)-\mathfrak{r}^2$$

Führt man die so bestimmten Constanten in (148) ein und multiplicirt die so erhaltenen drei Gleichungen mit

$$\frac{\mathfrak{a}^2x}{x^2+y^2+z^2-\mathfrak{a}^2}; \quad \frac{\mathfrak{b}^2y}{x^2+y^2+z^2-\mathfrak{b}^2}; \quad \frac{\mathfrak{c}^2z}{x^2+y^2+z^2-\mathfrak{c}^2}$$

so erhält man nach Summation derselben die Gleichung der Wellenfläche unter der Gestalt

$$(150) \qquad \frac{\mathfrak{a}^2x^2}{\mathfrak{s}^2-\mathfrak{a}^2}+\frac{\mathfrak{b}^2y^2}{\mathfrak{s}^2-\mathfrak{b}^2}+\frac{\mathfrak{c}^2z^2}{\mathfrak{s}^2-\mathfrak{c}^2}$$

welche, da da $\mathfrak{s}^2 = x^2+y^2+z^2$ ist, nach Multiplication mit $-1$ mit der früheren Form der Wellenfläche 146 zusammenfällt.

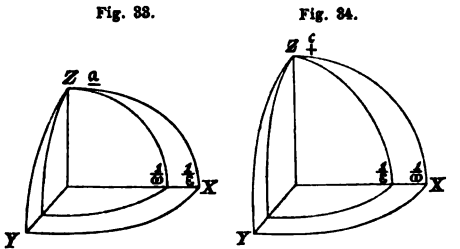
Aus dieser Gleichung folgt unmittelbar

$$(151) \qquad \left.\begin{aligned} \mathfrak{s}^2(\mathfrak{a}^2x^2+\mathfrak{b}^2y^2+\mathfrak{c}^2z^2)-\mathfrak{a}^2(\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2)x^2&+\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2\mathfrak{c}^2 \\ -\mathfrak{b}^2(\mathfrak{c}^2+\mathfrak{a}^2)y^2& \\ -\mathfrak{c}^2(\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2)z^2& \end{aligned}\right\} = 0$$

welche die Wellenfläche bezeichnende Formel zuerst von Fresnel aufgestellt ward.

4) Die Gleichungen 146 und 151 geben die Abhängigkeit der Wellenfläche von den drei Hauptbrechungsexponenten des Krystalls an und lassen somit bei Variation der letzteren die Gestalt der Fläche erkennen. Sind zwei Brechungsexponenten gleich, so erkennt man, dass der Winkel der optischen Axen Null wird, und die Wellenfläche wird eine Combination einer Kugel mit einem Umdrehungs - Ellipsoid. Die optische Axe kann aber entweder (vergl. pag. 178—179) mit $\mathfrak{a}$ zusammenfallen oder mit $\mathfrak{c}$, ersteren Fall $\mathfrak{a}$ nennen wir negativ, letzteren $\mathfrak{c}$ positiv (vergl. Fig. 33 und 34). Analog unterscheidet man auch die zweiaxigen Krystalle, indem wir die Halbirungswinkel jenes Winkels der optischen Axen, der kleiner als 90° ist (die erste Mittellinie des spitzen Winkels der optischen Axe genannt) zur Charakteristik benützt. Fällt die erste Mittellinie mit $\mathfrak{a}$ zusammen, so nennen wir dieselbe negativ, im Gegensatze hierzu positiv, was mit $\mathfrak{c}$ bezeichnet wird.

Fig. 33. Fig. 34.




§. 70. **Beziehungen zwischen Welle und Strahl. Conische Refraction. Scheinbare Axen.** Die Gleichungen des vorhergehenden Paragraphes ermöglichen auch die Beziehungen zwischen einer Welle, und den zu ihr gehörenden Strahl aufzusuchen. Aus (149) folgt

$$\mathfrak{s}^2 = \mathfrak{r}^2 + \frac{1}{\mathfrak{r}^2 \mathfrak{F}_\mathfrak{r}^2} \qquad (152)$$

für die Geschwindigkeit des Strahles, welcher derjenigen Wellenebene angehört, für welche $\mathfrak{F}_\mathfrak{r}$, daher auch $ABC\mathfrak{r}$ bekannt sind.

Ferner folgt aus dieser Gleichung für den Sinus des Winkels $\mathfrak{K}$ zwischen dem Strahle $S$ (dessen Geschwindigkeit $\mathfrak{s}$) und der dazu gehörigen Normale der Welle $W$

$$\sin \mathfrak{K} = \sin WS = \frac{1}{\mathfrak{r}\mathfrak{s}\mathfrak{F}_\mathfrak{r}} \qquad (153)$$

Uebrigens folgt für die Coordinaten des Strahles aus (136), (137), (138)

$$\begin{aligned} x &= A\mathfrak{r}\left[\frac{1 + \mathfrak{F}_\mathfrak{r}^2\mathfrak{r}^2(\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{a}^2)}{\mathfrak{F}_\mathfrak{r}^2\mathfrak{r}^2(\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{a}^2)}\right] = \frac{A\mathfrak{r}(\mathfrak{s}^2 - \mathfrak{a}^2)}{\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{a}^2} \\ y &= B\mathfrak{r}\left[\frac{1 + \mathfrak{F}_\mathfrak{r}^2\mathfrak{r}^2(\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{b}^2)}{\mathfrak{F}_\mathfrak{r}^2\mathfrak{r}^2(\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{b}^2)}\right] = \frac{B\mathfrak{r}(\mathfrak{s}^2 - \mathfrak{b}^2)}{\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{b}^2} \\ z &= C\mathfrak{r}\left[\frac{1 + \mathfrak{F}_\mathfrak{r}^2\mathfrak{r}^2(\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{c}^2)}{\mathfrak{F}_\mathfrak{r}^2\mathfrak{r}^2(\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{c}^2)}\right] = \frac{C\mathfrak{r}(\mathfrak{s}^2 - \mathfrak{c}^2)}{\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{c}^2} \end{aligned} \qquad (154)$$

Diese Gleichungen (154) bestimmen die Coordinaten eines Strahles für eine gegebene Welle und genügen, um aus der Kenntniss des Strahles die Neigungswinkel der Wellennormale abzuleiten.

In allen Fällen sind die Werthe eindeutig, nur für den Fall, dass die Wellennormale mit der optischen Axe für Wellen oder der Strahl mit den secundären Axen zusammenfällt, werden die Werthe von $y$, also die Strahlen, oder $B$, d. i. die Wellen unbestimmt.

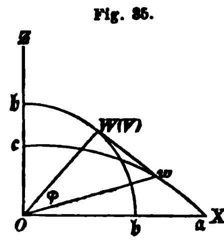
1) Nimmt man den ersteren Fall an, dass die Normale der Welle mit der optischen Axe zusammenfalle, so wird in obiger Gleichung

$$B = 0 \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{b}, \text{ daher } \frac{y}{\mathfrak{r}(\mathfrak{s}^2 - \mathfrak{b}^2)} = \frac{0}{0} \tag{155}$$

Es werden somit zu dieser Welle nicht ein, sondern mehrere Strahlen gehören, deren Coordinaten durch die übrigen, für $x$ und $z$ geltenden Formeln (154) nach Substitution der bedingenden Werthe für $r$ und $\mathfrak{r}$ ausdrückbar sind. Für diese Strahlen lässt sich durch successives Eliminationsverfahren der Beweis führen, dass sie in einen geschlossenen Kegel zweiter Ordnung gelagert sind, welcher für rechtwinkelige Coordinaten der Wellenfläche eine Kreisfläche [1]) zur Basis hat. Da die Oeffnung des Kegels nur gering ist, so wäre überhaupt die Abweichung jeder geschlossenen Curve von dem Kreise gering.

Es erübrigt daher nur noch die Kenntniss von der absoluten Winkelgrösse für die Oeffnung des Kegels in der Zone $XZ$ (Fig. 31), und diese lässt sich leicht aus der Betrachtung der Construction ableiten. Geht die Welle parallel mit dem Kreisschnitte des Ellipsoides (Fig. 29) durch den Krystall, so wird die Wellenfläche (Fig. 32) nicht bloss in zwei Punkten, sondern nahe um $A$, in einer geschlossenen Curve tangirt. Jener Strahl, welcher vom Mittelpunkte aus zur Tangente am Kreise $\mathfrak{b}\mathfrak{b}$ (Fig. 35) gezogen wird, steht auf letzterer senkrecht, fällt daher mit der Wellennormale und der optischen Axe zusammen, die Coordinaten seines Endpunktes $W$ in der Coordinatenebene $XZ$ sind somit

Fig. 35.




$$x = \mathfrak{b} \sin (WX) \qquad y = \mathfrak{b} \cos (WX)$$

Da aber die Welle auch gleichzeitig die Tangente der Ellipse $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ sein muss, so erhält man für den Tangentialpunkt $w$ an der Ellipse $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ (Fig. 35) in der Coordinatenebene $XZ$ die Coordinaten

$$x' = \frac{\mathfrak{a}^2}{\mathfrak{b}^2}\, x \qquad z' = \frac{\mathfrak{c}^2}{\mathfrak{b}^2}\, z$$

[1]) Vergl. Hamilton und Lloyd. Tr. Irish. Ac. 1837. 145. Pogg. Ann. 28. pag. 91. 104. Beer. Pogg. Ann. 85.

Es wird somit

$$\frac{x}{z} = \text{tang } WOX \qquad \frac{x'}{z'} = \text{tang } wOX = \frac{\mathfrak{a}^2}{\mathfrak{c}^2} \text{ tang } WOX$$

Da nun der Winkel der sogenannten inneren konischen Refraction $WOw = \varphi_i = WOX - wOX$ ist, ebenso aus (127) folgt

$$\text{tang } VX = \text{tang } WOX = \sqrt{\frac{\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{c}^2}{\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2}}$$

so ist

$$\text{tang } \varphi_i = \frac{1}{\mathfrak{b}^2}\sqrt{(\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{a}^2)(\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{b}^2)} = \frac{\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)(\beta^2 - \gamma^2)}}{\alpha\gamma} \tag{156}$$

der Werth des Winkels der Oeffnung $\varphi_i$ der sogenannten inneren konischen Refraction.

Zu bemerken ist, dass, während diese Welle im Inneren in einen hohlen Strahlenbündel übergeht, dieselbe bei ihrem Uebertritte in das äussere Mittel wieder einfach gebrochen sich fortpflanzt, indem ihre Normalen wieder in eine Richtung fallen.

Wenn wir daher jene Wellen bezeichnen wollen, welche nach dem Austritte aus dem Krystalle nur einen einfachen Strahl liefern und sich dann in der Richtung der sogenannten äusseren scheinbaren Axe fortpflanzen, so sind diess nur jene Wellen, deren Normale mit einer inneren Wellenaxe[1]) zusammenfällt.

2) Gehen wir zum zweiten unbestimmten Falle über, welcher eintritt, wenn sich ein Strahl in der Richtung einer secundären Axe für Strahlen fortpflanzt, so ist für denselben, da er in der Ebene $XZ$ liegt, $y = 0$ und $\mathfrak{s} = \mathfrak{b}$, daher nach (154)

$$\frac{B\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{b}^2} = \frac{0}{0} \tag{155 a}$$

Diess erfordert, dass $B$ unbestimmt wird, und dass zu diesem Strahle eine unbestimmte Anzahl von Wellen gehört. Es lassen sich nämlich (Fig. 31) an den Endpunkt des Strahles $A_s$ eine unbeschränkte Anzahl Tangenten zur Wellenfläche ziehen, also Wellenebenen bestimmen, zu welchen allen der Strahl $A_s0$ gehört. Diese Eigenschaft der Wellenfläche, von Hamilton aufgefunden, wird mit dem Namen äussere konische Refraction bezeichnet. Diese Wellen bilden nun ebenfalls einen Kegel zweiten Grades, der seine Spitze in $O$ hat und dessen Oeffnung $\varphi_e$ annähernd durch

$$\sin {}^1\!/_2(\varphi_e) = \beta \sin {}^1\!/_2(\varphi_i) \tag{157}$$

sich berechnen lässt.

[1]) Die konische Refraction liefert den Beweis, dass die scheinbaren Axen nicht Functionen der inneren secundären Strahlenaxen sind.

Zu bemerken ist im Gegensatze zu dem früheren Falle, dass der im Krystalle einfach gebrochene Strahl sich nach aussen in das zweite Medium in einen Strahlenbüschel doppelt gebrochen fortpflanzt.

3) Sucht man somit jene Richtungen auf, längs welchen einfache Brechung auftritt, so sind für einen Strahl, welcher einen doppelbrechenden Krystall durchdringt oder durchdrungen hat, nur zwei Richtungen möglich. Einfache Brechung tritt nämlich auf:

a) im Inneren des Krystalles, wenn der Strahl in die Richtung einer secundären Axe fällt;

b) beim Austritte aus dem Krystalle in der Richtung der scheinbaren Axe, wobei die Normale der Welle in der Richtung der primären Axe für Wellen liegt. Beide Fälle sind bei der Berechnung wohl zu unterscheiden.

§. 71. **Brechung von Welle und Strahl.** Die im vorhergehenden Paragraphe aufgestellten Beziehungen ermöglichen auch, den Gang und die Intensität des Lichtstrahles beim Uebergange aus einem einfach brechenden Medium in das anisophane aufzusuchen.

1) Für die Richtung und Geschwindigkeit der ebenen Welle in doppelbrechenden Medien werden nämlich auf Grund des Brechungsgesetzes und der Gleichung (130) nachfolgende Relationen erhalten zwischen dem Incidenzwinkel $i$, den Brechungswinkeln $r_1$, $r_2$ beider gebrochenen Wellen $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ und $\psi_1$, $\psi_2$ den Winkel der Wellennormalen zu den optischen Axen, wobei das positive Zeichen für positive Krystalle, für negative Krystalle das negative Vorzeichen des zweiten Gliedes zu gelten hat.

$$\mathfrak{r}_1 \sin i = \sin r_1 \qquad \mathfrak{r}_2 \sin i = \sin r_2$$

$$(158) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{r}_1^2 &= \tfrac{1}{2}(\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{c}^2) \pm \tfrac{1}{2}(\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{c}^2) \cos (\psi_1' - \psi_1'') \\ \mathfrak{r}_2^2 &= \tfrac{1}{2}(\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{c}^2) \pm \tfrac{1}{2}(\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{c}^2) \cos (\psi_2' + \psi_2'') \end{aligned}$$

Hierdurch und durch 143 ist die Lage der Normale $A_1$, $B_1$, $C_1$, $A_2$, $B_2$, $C_2$ der gebrochenen Wellen bestimmt; da dieselben überdiess in der Einfallsebene[1]) liegen müssen, so gilt ferner noch

$$(159) \qquad \begin{aligned} \cos r_1 &= \cos A_1 \cos H + \cos B_1 \cos K + \cos C_1 \cos L \\ \cos r_2 &= \cos A_2 \cos H + \cos B_2 \cos K + \cos C_2 \cos L \end{aligned}$$

worin $H, K, L$ die Winkel des Einfallslothes $N$ (Fig. 30) zu den Coordinatenaxen bedeuten. Man kann aber auch $\psi_1$, $\psi_2$ von der Lage der Normale der Einfallsebene $N$ (Fig. 30) abhängig machen. Aus dem sphärischen Dreiecke (Fig. 36) zwischen den optischen Axen, Loth- und Wellen-

---

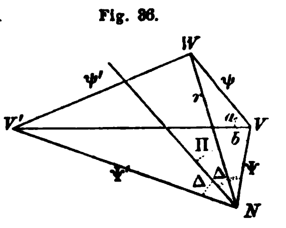
[1]) Die Gleichung der Einfallsebene, sowie die Winkel der gebrochenen Welle zu $X$, $Y$, $Z$ lassen sich auch analog jener Methode bestimmen, welche bezüglich dreier Punkte einer Zone in meiner Krystallographie (Phys. Min. I. vol.) in §. 44, Gleichung $f$, $g$, $h$ (27a) dargelegt ist.

normale[1]) $W$ erhält man unmittelbar für $\psi' \psi''$, sowie analog für $\psi'_1$, $\psi'_2$, wenn für letzteres statt $r'$ der Brechungswinkel $r_2$ gesetzt wird.

$$\begin{aligned}
\cos \psi' &= \cos r' \cos \Psi' + \sin r' \sin \Psi' \cos (\Pi + \Delta) \\
\cos \psi'' &= \cos r' \cos \Psi' + \sin r' \sin \Psi'' \cos (\Pi - \Delta) \\
\cos r &= \cos \psi \cos \Psi + \sin \psi \sin \Psi \cos (a + b) \\
\sin r &= \frac{\cos \psi' \cos \Psi'' - \cos \psi'' \cos \Psi'}{\sin \Psi' \sin \Psi'' \left[\cos (\Pi + \Delta) - \cos (\Pi - \Delta)\right]}
\end{aligned} \qquad (159\,a)$$

wobei $\Psi$ der Winkel des Einfallsloths $N$ zu den optischen Axen, $2\Delta$ die Winkel der Ebene von den optischen Axen zum Loth und $\Pi$ der Winkel der Einfallsebene zu der den Winkel $\Delta$ halbirenden Ebene, $2V$ der Winkel $VV'$ der optischen Axen ist.

Fig. 36.




Wie man aus dem Dreieck weiter sieht bestehen noch folgende Relationen

$$\begin{aligned}
\operatorname{cotang} (\Delta - \Pi) &= \frac{\operatorname{cotang} \psi \sin \Psi - \cos \Psi \cos (a + b)}{\sin (a + b)} \\
\cos a &= \frac{\cos \psi'' - \cos \psi' \cos 2V}{\sin \psi' \sin 2V} \\
\cos b &= \frac{\cos \Psi'' - \cos \Psi' \cos 2V}{\sin \Psi' \sin 2V}
\end{aligned} \qquad (159\,b)$$

Durch diese Relationen ist es immer möglich, $r$ als Function der Orientirung des Einfallslothes $N$ gegen die optischen Axen darzustellen.

2) Geht man zur Bestimmung der Richtung der Lichtstrahlen über, so ist vor Allem zu erinnern, dass dieselben nicht mehr in der Einfallsebene, sondern von ihr abgelenkt liegen. Wollte man in Fig. 36 nebst der Wellennormale $W$, welche für $\mathfrak{r}$ gilt, auch noch die Fortpflanzungsrichtung des Strahles darstellen, so würde der Strahl $\mathfrak{s}$ die Projectionssphäre abseits von $W$ in einem Punkte treffen, den wir im Nachfolgenden S nennen wollen. Die durch den Strahl und die zu derselben gehörende Wellennormale gezogene Ebene muss den Winkel $2\mathfrak{b}$ halbiren, den die zwischen Wellennormale und optischen Axen gezogenen Ebenen an der Wellennormale $W$ (Fig. 36) bilden. Es ist diess eine natürliche Folge des Satzes von der Polarisationsebene, §. 67, in welche letztgenannte auf der Schwingungsrichtung senkrechte Ebene der Strahl fallen muss[2]).

[1]) Eine analoge Gleichung (159) wird sich für die Lage der Strahlen ableiten lassen, wenn man das Dreieck zwischen Strahl, Loth und secundärer optischer Axe (Strahlenaxe) in Betracht zieht.

[2]) Vergl. Sylvester. Phil. Magazin 1837. XI. 461, 537. 1838. XII 341.

Aus dem Principe der Erhaltung der lebendigen Kräfte folgt aber analog (82) ein weiterer Satz 166. Während bei der Ableitung von (82), wo einfach brechende Medien und daher nur kugelförmige Wellen zur Betrachtung kamen, der Strahl mit der Wellennormale zusammenfällt, also die Masse dem Flächenstücke, dessen Seiten die Wellenlänge und $\cos i$ sind, proportional gesetzt werden kann: ist diess letztere hier für doppelt brechende Krystalle nur mehr bei der einfallenden und reflectirten Welle der Fall. Bei der gebrochenen Welle fällt hingegen der Strahl nicht mehr mit der Wellennormale zusammen, man wird somit für die in Betracht kommende Fläche nicht mehr das Product aus der Wellenlänge in den $\cos r$, sondern nur in die Projection des Cosinus des Brechungswinkels $r$, auf die Ebene der Wellennormalen annehmen können.

Führt man also die Winkel $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{J}$ des vorigen Paragraphes und statt des Winkels $\mathfrak{J}$ dessen Supplement, den Winkel $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$, d. i. den Winkel der Einfallsebene zur Schwingungsrichtung ein, so erhält man[1])

$$(166)\quad (J_s^2+J_p^2-L_s^2-L_p^2)\sin i\cos i = R'^2\left[\sin r'\cos r' - \sin\mathfrak{p}'\sin^2 r'\operatorname{tang}\mathfrak{K}'\right] + R''^2\left[\sin r''\cos r'' - \sin\mathfrak{p}''\sin^2 r''\operatorname{tang}\mathfrak{K}''\right]$$

welche Gleichung sich mit Hilfe von (165) reducirt auf[1])

$$(166\text{a})\quad (J_s-L_s)\sin i\cos i = R'\left[\sin r'\cos r'\sin\mathfrak{p}' - \sin^2 r'\operatorname{tang}\mathfrak{K}'\right] + R''\left[\sin r''\cos r''\sin\mathfrak{p}'' - \sin^2 r''\operatorname{tang}\mathfrak{K}''\right]$$

Durch die Gleichungen (165) und 166a) bestimmen sich schliesslich die Werthe von $R'$, $R''$ nach Neumann wie folgt

$$(167)\quad \begin{aligned} \frac{R'}{2\sin i\cos i} &= \varDelta\Big(J_p\cos\mathfrak{p}''\sin(i+r'') - J_s[\sin\mathfrak{p}''(\sin i\cos i+\sin r''\cos r'') - \sin^2 r''\operatorname{tg}\mathfrak{K}'']\Big) \\ \frac{R''}{2\sin i\cos i} &= \varDelta\Big(J_p\cos\mathfrak{p}'\sin(i+r') + J_s[\sin\mathfrak{p}'(\sin i\cos i+\sin r'\cos r') - \sin^2 r'\operatorname{tg}\mathfrak{K}']\Big) \end{aligned}$$

Für $\varDelta$ ist der Werth zu setzen

$$(167\text{a})\quad \frac{1}{\varDelta} = \cos\mathfrak{p}''\sin(i+r'')\left[\sin\mathfrak{p}'(\sin i\cos i+\sin r'\cos r') - \sin^2 r'\operatorname{tang}\mathfrak{K}'\right] + \cos\mathfrak{p}'\sin(i+r')\left[\sin\mathfrak{p}''(\sin i\cos i+\sin r''\cos r'') - \sin^2 r''\operatorname{tang}\mathfrak{K}''\right]$$

Durch ein analoges Eliminationsverfahren lassen sich auch die Werthe von $L_s$, $L_p$ ableiten (vergl. pag. 242).

Diese Gleichungen genügen, um die verschiedenen Intensitätsverhältnisse zu bestimmen, da die Intensität der beiden gebrochenen Strahlen durch deren Amplitude bestimmt ist.

---

[1]) Behufs der Ableitung dieser Gleichung und des Beweises der Richtigkeit derselben vergleiche Neumann. Berl. Ac. Abh. 1835.

Für den Fall, dass die Einfallsebene mit einer optischen Hauptebene zusammenfällt, werden mehrere der Coefficienten gleich Null und die Gleichungen[1]) reduciren sich auf (82), (83). Werden andererseits, wie in dem pyramidalen oder hexagonalen Systeme zwei Brechungsexponenten gleich, so werden sich ebenfalls die Formeln vereinfachen. Da die Ableitung aus den allgemeinen Formeln leicht durchzuführen ist, kann dieselbe übergangen werden, und auf die wichtige Untersuchung Neumann's, welche die Grundlage für die Erkenntniss der Intensitätsverhältnisse der Krystalle ist, hingewiesen[2]) werden.

2) Abweichend von den Methoden Neumann's ist die neueste Untersuchung von Cornu[3]) durchgeführt. Dieselbe stützt sich auf die Ansichten von Mac Cullagh[4]), nach welchen das Problem der krystallinischen Reflexion am leichtesten dann gelöst werden kann, wenn man solche Einfallsebenen wählt, für welche einer der doppelt gebrochenen Strahlen Null wird. Für solche uniradiale Richtungen vereinfacht sich das Problem und wird dem der isotropen Medien analog. Es erübrigt somit, nur immer die Componenten des einfallenden ${}^0J$, gebrochenen ${}^0R$ und reflectirten ${}^0L$ Lichtes nach den zwei möglichen uniradialen Richtungen zu zerlegen. Seien somit die Winkel der Vibrationen mit jener Einfallsebene, welche einer uniradialen Richtung entspricht, successive $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_L$, $\mathfrak{p}_r$, so ist analog dem früheren Verfahren möglich, die nachfolgenden Gleichungen abzuleiten.

$$\begin{aligned} ({}^0J \cos \mathfrak{p}_i - {}^0L \cos \mathfrak{p}_L) \cos i &= {}^0R \cos \mathfrak{p}_r \cos r \\ ({}^0J \cos \mathfrak{p}_i - {}^0L \cos \mathfrak{p}_L) \cos i &= {}^0R \cos \mathfrak{p}_r \sin r \\ {}^0J \sin \mathfrak{p}_i + {}^0L \cos \mathfrak{p}_L &= {}^0R \sin \mathfrak{p}_r \end{aligned} \tag{168}$$

Hierzu kommt noch wegen der Erhaltung der lebendigen Kräfte dei Gleichung

$$({}^0J^2 - {}^0L^2) \sin i \cos i = {}^0R^2 \sin r \cos r\,(1 + \operatorname{tang} r \operatorname{tang} \mathfrak{p}_r \operatorname{tang} \mathfrak{R}) \tag{169}$$

welche sich auch reducirt auf

$$({}^0J \sin \mathfrak{p}_i - {}^0L \sin \mathfrak{p}_L) \sin i \cos i = {}^0R \sin r \cos r\,(\sin \mathfrak{p}_r + \operatorname{tang} r \operatorname{tang} \mathfrak{R}) \tag{169a}$$

Für den zweiten gebrochenen Strahl ergibt sich ein analoges System der Gleichungen, nur mit anderem Index. Beide Systeme genügen für das Problem der krystallinischen Reflexion.

§. 73. **Allgemeine Ableitung der Bewegungsgleichungen für die schiefwinkeligen Axensysteme.** Die bisherigen Untersuchungen gründeten sich auf die durch Versuche nachgewiesene Diffe-

---

[1]) Die Erwägungen von (164) gelten auch für (83) pag. 119.

[2]) Vergl. Neumann l. c. 1. Radicke. Optik. I. 302.

[3]) Cornu. Reflex. cristallin. Ann de chim. 1867. XI. 283.

[4]) Mac Cullagh. Irish Transact. 1837. XVIII. 31. 1839. XXI. 17 und Philos. Magaz. VIII. 103. X. 42. XI. 134.

renz in der molekularen Constitution der Körper nach den drei Dimensionen des Raumes. Es sind daher denselben gleichsam selbstverständlich nur rechtwinkelige Coordinatensysteme zu Grunde gelegt, und die hierdurch erlangten Resultate werden somit nur für die orthogonalen Krystallsysteme Geltung haben. Die Symmetrieverhältnisse der monoklinischen und triklinischen Krystalle weisen jedoch zu bestimmt auf die Existenz schiefwinkeliger Elasticitätsaxen hin, als dass man sich mit den bisherigen Ableitungen begnügen könnte. Durch die Bemühungen von Cauchy[1]) und später Angström[2]) ward es möglich, von der bekannten allgemeinen Bewegungsgleichung (46) selbst zu den verwickeltsten Fällen aufzusteigen.

1) Die allgemeinen Gleichungen, welche auch für ein schiefwinkeliges Coordinatensystem Geltung haben sollen, sind die bereits entwickelten (46)

$$d_t^2 x = Sm\,[f(r) + \Delta r\, d_r f(r)]\,(\Delta x + \Delta x) \tag{46}$$

und analog für $d_t^2 y$, $d_t^2 z$.

Während, wie in (46) bei Zugrundelegung rechtwinkeliger Coordinaten einfache Werthe für $\Delta r$ erhalten, ist hier hingegen zu berücksichtigen, dass für schiefwinkelige Coordinatenaxen $X$, $Y$, $Z$, für welche

$$\cos XY = \zeta \qquad \cos XZ = \eta \qquad \cos YZ = \xi$$

ist, auch dann die Distanz der Moleküle $mn = r$ wird

$$r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 + 2\zeta \Delta x \Delta y + 2\eta \Delta x \Delta z + 2\xi \Delta y \Delta z$$

also auch nach totaler Differenziation

$$r\Delta r = (\Delta x + \zeta \Delta y + \eta \Delta z)\Delta x + (\zeta \Delta x + \Delta y + \xi \Delta z)\Delta y + (\eta \Delta x + \xi \Delta y + \Delta z)\Delta z$$

Substituirt man diese Werthe für $\Delta r$, vernachlässigt die höheren Potenzen $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$, und bedenkt die allgemeine Gleichgewichtsgleichung, so erhält man leicht

$$\begin{aligned} d_t^2 x = \Sigma m \Big[ fr\,\Delta x + \frac{d_r f(r)}{r} \Big\{ & \Delta x^2 + \zeta \Delta x \Delta y + \eta \Delta x \Delta z)\,\Delta x \\ & + (\zeta \Delta x^2 + \Delta x \Delta y + \xi \Delta x \Delta z)\,\Delta y + (\eta \Delta x^2 + \xi \Delta x \Delta y + \Delta x \Delta z)\,\Delta z \Big\} \Big] \end{aligned} \tag{170}$$

analog gebaute Gleichungen folgen für $d_t^2 y$, $d_t^2 z$.

Bekanntlich lehrten die Untersuchungen Cauchy's, dass die Integration dieser Gleichungen ermöglicht wird durch die Einführung von x, y, z als Exponentialform in der Weise

$$\Delta x = \left[ e^{(\Delta x d_x + \Delta y d_y + \Delta z d_z)} - 1 \right] x \tag{171}$$

analog für $\Delta y$, $\Delta z$. Die Entwicklung einer solchen Function erfolgt nach der Formel

$$e^x - 1 = x + \frac{1}{1.2} x^2 + \frac{1}{1.2.3} x^3 + \frac{1}{1.2.3.4} x^4 \ldots.$$

[1]) Cauchy: Double Refraction. Mém. Acad. vol. XVIII. 154—216. Paris 1839.

[2]) Angström. Acta Upsala. vol. XIV. 1849.

2) Hier tritt jedoch die Frage auf, welche Potenzen von (171) in die Gleichung (170) substituirt werden können, um noch reelle Werthe zu erhalten. Da wir den allgemeinen Fall eines triklinischen Axensystemes vor uns haben, erhellt, dass die Molekularsummen analog der krystallographischen Symmetrie der Form $hkl$ und $\bar{h}\bar{k}\bar{l}$ nur für einen Punkt und seinen Gegenpunkt sich aufheben können. Es entspricht somit jeder $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ ein $-\Delta x$, $-\Delta y$, $-\Delta z$, und hieraus erhellt, dass in der Entwicklung von (171) und bei Substitution der Entwicklung in (170) die erste und dritte Potenz Molekularsummen, die der Null gleich sind, liefern. Anders hingegen bei der zweiten und vierten Potenz, welche reelle Werthe gibt, so dass wir setzen können [1])

$$e^{\Delta x d_x + \Delta y d_y + \Delta z d_z} - 1 = \left[\frac{1}{1.2}(\Delta x d_x + \Delta y d_x + \Delta z d_z)\left(1 + \frac{1}{3.4}(\Delta x d_x + \Delta y d_y + \Delta z d_z)^2\right)\right] \quad (171\,a)$$
$$= \Delta' (1 + \Delta')$$

Nennt man daher zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
&\Sigma m\, f(r) = \Phi \\
&\Sigma m \frac{d_r f(r)}{r} \Delta x^2 = \Psi_{xx} \qquad && \Sigma m \frac{d_r f(r)}{r} \Delta y^2 = \Psi_{yy} \\
&\Sigma m \frac{d_r f(r)}{r} \Delta z^2 = \Psi_{zz} \qquad && \Sigma m \frac{d_r f(r)}{r} \Delta x \Delta y = \Psi_{xy} \qquad (172) \\
&\Sigma m \frac{d_r f(r)}{r} \Delta x \Delta z = \Psi_{xz} \qquad && \Sigma m \frac{d_r f(r)}{r} \Delta y \Delta z = \Psi_{yz}
\end{aligned}$$

so folgt, wie man leicht erkennt, aus (170) die nachstehende allgemeine Gleichung, in welcher der vereinfachte allgemeine Multiplicator $\Delta(1+\Delta)$ vor die Function gesetzt ward.

$$\begin{aligned}
d_t^2 \mathrm{x} = \Delta'(1+\Delta') \, [(\Phi + \Psi_{xx} + \zeta \Psi_{xy} + \eta \Psi_{xz})\, \mathrm{x} \\
+ (\Psi_{xy} + \zeta \Psi_{xz} + \xi \Psi_{xz})\, \mathrm{y} + (\Psi_{xz} + \eta \Psi_{xx} + \xi \Psi_{xy})\, \mathrm{z}]
\end{aligned} \qquad (173)$$

und analog für $d_t^2\mathrm{y}$, $d_t^2\mathrm{z}$.

3) Bekanntlich ist es möglich, diese Gleichungen dadurch auf eine lineare Form zu bringen, dass man in $\Delta'$ statt $d_x$, $d_y$, $d_z$ die Cosinusse $A$, $B$, $C$ der Winkel einführt, welche die Wellennormale mit den Coordinatenaxen bildet. Es entspricht nach Cauchy diess der Annahme

$$\mathrm{x} = \bar{\mathrm{x}} e^{-\frac{2\pi}{\lambda}(Ax + By + Cz)\sqrt{-1}}$$
$$\mathrm{y} = \bar{\mathrm{y}} e^{-\frac{2\pi}{\lambda}(Ax + By + Cz)\sqrt{-1}}$$
$$\mathrm{z} = \bar{\mathrm{z}} e^{-\frac{2\pi}{\lambda}(Ax + By + Cz)\sqrt{-1}}$$

[1]) Die von Angström angewendete Methode begnügt sich mit der zweiten Potenz und nimmt auf die krystallographische Symmetrie zu wenig Rücksicht, daher bei der Entwicklung der Gleichung (173) eine andere Methode zu Grunde gelegt ward. Grailich und Lang (Wien. Acad. Sitzungsber. XXXIII, 1858) haben zuerst auf die Nothwendigkeit der Annahme der vierten Potenz hingewiesen, sind jedoch von der Annahme rechtwinkeliger Coordinatenaxen ausgegangen.

Wir erhalten dadurch andere Werthe von $\Delta$, und zwar

$$(171\text{b})\quad \begin{aligned} \nabla(1+\nabla) &= \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{1.2}(A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z)^2 \times \\ &\times\left[1 + \frac{1}{3.4}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z)^2\right] \end{aligned}$$

Um nun mit den gewöhnlich gebräuchlichen Bezeichnungen der Integrationsconstanten im Einklange zu bleiben, nennen wir

$$(172\text{a})\quad \begin{aligned} &\Phi\nabla(1+\nabla) = \tilde{\omega} \\ &\Psi_{xx}\nabla(1+\nabla) = \mathfrak{L}_1 \quad \Psi_{yy}\nabla(1+\nabla) = \mathfrak{M}_1 \quad \Psi_{zz}\nabla(1+\nabla) = \mathfrak{N}_1 \\ &\Psi_{xy}\nabla(1+\nabla) = \mathfrak{P}_1 \quad \Psi_{zx}\nabla(1+\nabla) = \mathfrak{Q}_1 \quad \Psi_{yz}\nabla(1+\nabla) = \mathfrak{R}_1 \end{aligned}$$

Hierdurch verwandeln sich die Gleichungen 153 in

$$(174)\quad \begin{aligned} d_t^2\bar{x} &= -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \left\{(\tilde{\omega}+\mathfrak{L}_1+\zeta\mathfrak{P}_1+\eta\mathfrak{Q}_1)\bar{x}+(\mathfrak{P}_1+\zeta\mathfrak{L}_1+\xi\mathfrak{Q}_1)\bar{y}+(\eta\mathfrak{L}_1+\xi\mathfrak{P}_1+\mathfrak{Q}_1)\bar{z}\right\} \\ d_t^2\bar{y} &= -\left(\frac{2\pi}{\lambda^2}\right)^2 \left\{(\zeta\mathfrak{M}_1+\mathfrak{P}_1+\eta\mathfrak{R})\bar{x}+(\tilde{\omega}+\mathfrak{M}_1+\zeta\mathfrak{P}_1+\xi\mathfrak{R})\bar{y}+(\xi\mathfrak{M}_1+\eta\mathfrak{P}_1+\mathfrak{R}_1)\bar{z}\right\} \\ d_t^2\bar{z} &= -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \left\{(\eta\mathfrak{N}_1+\mathfrak{Q}_1+\zeta\mathfrak{R}_1)\bar{x}+(\xi\mathfrak{N}_1+\zeta\mathfrak{Q}_1+\mathfrak{R}_1)\bar{y}+(\tilde{\omega}+\mathfrak{N}_1+\eta\mathfrak{Q}_1+\zeta\mathfrak{R}_1)\bar{z}\right\} \end{aligned}$$

welche Gleichungen abgekürzt geschrieben werden können als

$$(174\text{a})\quad \begin{aligned} d_t^2\bar{x} &= -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \left\{(\tilde{\omega}+L_1)\bar{x} + P_1\bar{y} + Q_2\bar{z}\right\} \\ d_t^2\bar{y} &= -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \left\{P_2\bar{x} + (\tilde{\omega}+M_1)\bar{y} + R_1\bar{z}\right\} \\ d_t^2\bar{z} &= -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \left\{Q_1\bar{x} + R_2\bar{y} + (\tilde{\omega}+N_1)\bar{z}\right\} \end{aligned}$$

die Bedeutung der Coefficienten $L_1$, $M_1$, $N_1$, $P_1$, $Q_1$, $R_1$, $P_2$, $Q_2$, $R_2$ wird durch den Vergleich der Formeln 174 und 174a von selbst klar.

Es sind die Gleichungen 174a nun die allgemeinen Bewegungsgleichungen mit Zuhilfenahme eines Systems geneigter Elasticitätsaxen. Würde man die Cosinusse der Axenwinkel $\xi$, $\eta$, $\zeta$ Null setzen, d. i. zu einem orthogonalen Coordinatensysteme übergehen, so würden die Werthe von $P$, $Q$, $R$ auf $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ reducirt, die Form der Gleichungen bliebe ungeändert.

**§. 74. Allgemeine Ableitung des Elasticitätsellipsoids.** Die allgemeinen Bewegungsgleichungen 174a gestatten das Elasticitätsellipsoid, sowie auch analog den Gleichungen 50 die Form der Bewegung selbst abzuleiten.

Sei nämlich $S$ die Amplitude des Moleküls in der Richtung seiner linearen Schwingung gezählt, so wird

$$S = \mathfrak{x}\bar{x} + \mathfrak{y}\bar{y} + \mathfrak{z}\bar{z} \qquad (175)$$

sein, wo $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Cosinusse der Linie, in welcher die Bewegung vor sich geht, (vergl. pag. 80) zu den Coordinatenaxen sind.

Multiplicirt man also die drei Gleichungen 178 successive mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, führt weiters $S$ ein, so folgt unter der Voraussetzung, dass

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}(L_1 - \mathfrak{K}^2) + \mathfrak{y}P_1 + \mathfrak{z}Q_2 &= 0 \\ \mathfrak{y}(M_1 - \mathfrak{K}^2) + \mathfrak{z}P_2 + \mathfrak{z}R_1 &= 0 \\ \mathfrak{z}(N_1 - \mathfrak{K}^2) + \mathfrak{x}Q_1 + \mathfrak{y}R_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (176)$$

$$\mathfrak{K}^2 = \frac{\sigma^2}{K^2} - \tilde{\omega}$$

die allgemeine Gleichung

$$d_t^2 S = -\sigma^2 S \qquad (52)$$

deren Integration zu den Gleichungen 50, 51 führt, in welchen, wie bekanntlich

$$\sigma = \frac{2\pi}{\tau}, \quad K = \frac{2\pi}{\lambda^2}, \quad \omega^2 = \mathfrak{K}^2 + \tilde{\omega}^2$$

$\tau$ die Vibrationsdauer, $\lambda$ die Wellenlänge, $\omega$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, $\tilde{\omega}$ eine von $A$, $B$, $C$ unabhängige Function bedeutet.

Die Gleichungen 174 führen zu dem von Cauchy zuerst für rechtwinkelige Coordinatenaxen gegebenen Polarisationsellipsoid.

Die von Cauchy angewendete Methode gründet sich darauf, diese Entwicklung von $\mathfrak{K}^2$ als explicite Function von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $L$, $M$.. welche durch die für orthogonale Axen geltende Hilfsgleichung

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 = 1 \qquad (177)$$

und successive Multiplication von 174 mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ möglich wird.

Durch ein analoges Verfahren gelangt Angström zu dem allgemeinen Ausdrucke des Elasticitätsellipsoids.

Die Gleichung der Linie, in welcher die Schwingung des Moleküls vor sich geht, und deren Cosinusse $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ sind, kann auch bei schiefwinkeligen Elasticitätsaxen, für welche die Cosinusse der Neigungswinkel $\xi$, $\eta$, $\zeta$ sind, in der Form dargestellt werden

$$\frac{x}{\mathfrak{X}} = \frac{y}{\mathfrak{Y}} = \frac{z}{\mathfrak{Z}} \qquad (175\,a)$$

worin die Relationen gelten

$$
\begin{aligned}
\square\mathfrak{X} &= \mathfrak{x}(1-\xi^2)+\mathfrak{y}(\xi\eta-\zeta)+\mathfrak{z}(\xi\zeta-\eta)\\
\square\mathfrak{Y} &= \mathfrak{y}(1-\eta^2)+\mathfrak{x}(\xi\eta-\zeta)+\mathfrak{z}(\zeta\eta-\xi)\\
\square\mathfrak{Z} &= \mathfrak{z}(1-\zeta^2)+\mathfrak{x}(\xi\zeta-\eta)+\eta(\zeta\eta-\xi)\\
\square &= 1-\xi^2-\eta^2-\zeta^2-2\xi\eta\zeta\\
1 &= \mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2+2\zeta\mathfrak{X}\mathfrak{Y}+2\eta\mathfrak{X}\mathfrak{Z}+2\xi\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}\\
1 &= \mathfrak{x}\mathfrak{X}+\mathfrak{y}\mathfrak{Y}+\mathfrak{z}\mathfrak{Z}\ \ldots(a)\\
\mathfrak{x} &= \mathfrak{X}+\zeta\mathfrak{Y}+\eta\mathfrak{Z}\\
\mathfrak{y} &= \mathfrak{Y}+\zeta\mathfrak{X}+\xi\mathfrak{Z}\\
\mathfrak{z} &= \mathfrak{Z}+\eta\mathfrak{X}+\xi\mathfrak{Y}
\end{aligned}
\tag{177a}
$$

Mittelst dieser Relationen und der speciell $a$ bezeichneten Formel (177a), welche die Stelle von 177 vertritt, wird es ebenfalls möglich, aus den Gleichungen 174a das Elasticitätsellipsoid in der allgemeinsten Form abzuleiten.

Multiplicirt man die drei Gleichungen 174a mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, addirt dieselben mit Rücksicht auf 177a, substituirt ferner statt $L$, $M$, $N$ die Werthe $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ $\mathfrak{R}$, so erhält man die allgemeine Gleichung

$$\mathfrak{K}^2 = \mathfrak{L}_1\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{M}_1\mathfrak{y}^2 + \mathfrak{N}_1\mathfrak{z}^2 + 2\mathfrak{P}_1\mathfrak{x}\mathfrak{y} + 2\mathfrak{Q}_1\mathfrak{x}\mathfrak{z} + 2\mathfrak{R}_1\mathfrak{y}\mathfrak{z} \tag{178}$$

welche sowohl für recht- als auch schiefwinkelige Axensysteme gilt.

Für orthogonale Axen ist eine Transformation in das gewöhnliche Elasticitätsellipsoid möglich, denn setzt man

$$\mathfrak{K}^2 = \frac{1}{r^2}$$

so wird

$$1 = \mathfrak{L}_1x^2 + \mathfrak{M}_1y^2 + \mathfrak{N}_1z^2 + 2\mathfrak{P}_1xy + 2\mathfrak{Q}_1xz + 2\mathfrak{R}_1yz \tag{179}$$

das der Fresnel'schen Elasticitätsfläche entsprechende Ellipsoid.

Wir sehen somit, dass das der Ableitung der vorhergehenden Paragraphe zu Grunde gelegte Ellipsoid 125 auch seine Begründung durch die allgemeine Theorie des Lichtes erhält.

**§. 75. Circulare Polarisation.** Die Resultate des vorhergehenden Paragraphes stützen sich vor Allem darauf, dass die Bewegung eine lineare sei und daher die Gleichung 175 eine bedeutende Vereinfachung der allgemeinen Formeln 174a zulässt. Wenn nun auch nach den bisherigen Annahmen eine solche lineare Polarisation fast allgemein beobachtet wird, so darf doch nicht übersehen werden, dass die allgemeinste Art einer Bewegung ellipsoidisch sein müsse. Da es bisher nicht gelungen ist, durch diese Substitution einer elliptischen Bewegung statt der linearen (175) zu einer zweckdienlichen Transformation der allgemeinen Gleichungen 174 zu gelangen, so muss die Form der letzteren selbst verlassen werden, um einige theoretisch interessante Resultate zu

erhalten. Ob die im Nachfolgenden angegebenen neuen Formeln der Differentialgleichungen eine fernere theoretische Begründung erhalten, muss noch fraglich gelassen werden.

Cauchy[1]) hat zuerst gezeigt, dass die Circularpolarisation isophaner Körper von Differentialgleichungen abgeleitet werden könne, die aus den bekannten Formeln 48 durch Hinzufügen eines neuen Gliedes $\left(\frac{dx}{dz} - \frac{dz}{dx}\right)$ mit dem Ellipticitätsfactor $\mathfrak{E}$ entstehen können. Wir erhielten somit Gleichungen der Form

$$d_t^2 \mathrm{x} - \Omega^2 (d_x^2 \mathrm{x} + d_y^2 \mathrm{x} + d_z^2 \mathrm{x}) = \mathfrak{E}^2 (d_z^2 \mathrm{y} - d_y^2 \mathrm{x}) \tag{180}$$

welche einer elliptischen Bewegung Genüge leisten soll. Um letztere zu charakterisiren, möge wie früher $ABC$ die Cosinusse der Winkel der Wellennormale $\mathfrak{r}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bedeuten, hingegen $\mathfrak{x}_1\ \mathfrak{y}_1\ \mathfrak{z}_1\ \mathfrak{x}_2\ \mathfrak{y}_2\ \mathfrak{z}_2$ die Cosinusse der Winkel von den zwei Axen $e_1$ $e_2$ der Ellipse, in welcher die Bewegung erfolgt, zu den Coordinatenaxen sein, so wird die Bewegung den Gleichungen ihrer Ausschläge genügen müssen, nämlich

$$\mathrm{x} = \mathfrak{x}_1 e_1 \sin \frac{2\pi}{\lambda}(Ax + By + Cz - \mathfrak{r}t) + \mathfrak{x}_2 e_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda}(Ax + By + Cz - \mathfrak{r}t) \tag{181}$$

und analog für y und z. Für circulare Polarisation würde $e_1 = e_2$ sein. Diese drei Gleichungen lassen sich aber auch unter der Form schreiben

$$\mathrm{x} = \frac{\mathfrak{x}_1 e_1}{\sin \varphi_x} \cos(\tilde{\omega} + \varphi_x) \tag{181a}$$

wobei $\varphi_x$ $\varphi_y$ $\varphi_z$ analog der Form

$$\varphi_x = \operatorname{arctang} \frac{e_1 \mathfrak{x}_1}{e_2 \mathfrak{x}_2}, \qquad \tilde{\omega} = \frac{2\pi}{\lambda}(Ax + By + Cz - \mathfrak{r}t)$$

Diese Grundsätze sind es, welche Lang[2]) verwendet, um die Circularpolarisation, welche bei einaxigen Medien, z. B. Quarz und Zinnober beobachtet wird, zu erklären.

Die von Lang adoptirten Gleichungen sind der Form

$$d_t^2 \mathrm{x} - \mathfrak{a}^2 (d_x^2 \mathrm{x} + d_y^2 \mathrm{x} + d_z^2 \mathrm{x}) + (\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{a}^2) d_{xz}^2 \mathrm{z} = \mathrm{C}^2 \mathfrak{E}^2 (d_z \mathrm{y} - d_y^2 \mathrm{z}) \tag{182}$$

wobei $\mathfrak{a}^2$ $\mathfrak{c}^2$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten im einaxigen Mittel und $z$ mit der Richtung der optischen Axe zusammenfällt. Da auch diese Gleichungen einer circularen Doppelbrechung, also den obigen Formeln 181 genügen sollen, so wird auch die Substitution der letztgenannten in 182 möglich sein. Führt man diese Substitution durch, so erhält man drei Systeme von Gleichungen analog der Form

[1]) Cauchy. Compt. rend. vol. XV pag. 1082.

[2]) Lang. Pogg. Ann. vol. 119, pag.

$$(183)\quad \begin{aligned} &(\mathfrak{a}^2-\mathfrak{r}^2)\,\mathfrak{x}_1 \operatorname{cotg}\varphi_x + (\mathfrak{a}^2-\mathfrak{c}^2\mathfrak{y}_1 AC \operatorname{cotg}\varphi_z) = -C^2\mathfrak{E}^2 \frac{\lambda}{2\pi}(C\mathfrak{z}_1 - B\mathfrak{y}_1) \\ &(\mathfrak{a}^2-\mathfrak{r}^2)\mathfrak{x}_1 + (\mathfrak{a}^2-\mathfrak{c}^2)\,\mathfrak{y}_1\, AC = C^2\mathfrak{E}^2 \frac{\lambda}{2\pi}(C\mathfrak{x}_1 \operatorname{cotang}\varphi_x - B\mathfrak{y}_1 \operatorname{cotg}\varphi_z) \end{aligned}$$

welche sich in Folge der zwischen $\mathfrak{x}_1$ $\mathfrak{x}_2$ bestehenden Relationen auf drei Systeme von Gleichungen der Form bringen lassen

$$(183\,a)\quad \begin{aligned} &(\mathfrak{a}^2-\mathfrak{r}^2)\,\mathfrak{x}_1 + (\mathfrak{a}^2-\mathfrak{c}^2)\,\mathfrak{z}_1\, AC = C^2\mathfrak{E}^2 \frac{\lambda}{2\pi}\frac{e_1}{e_2}\,\mathfrak{x}_1 \\ &(\mathfrak{a}^2-\mathfrak{r}^2)\,\mathfrak{x}_2 + (\mathfrak{a}^2-\mathfrak{c}^2)\,\mathfrak{z}_2\, AC = C^2\mathfrak{E}^2 \frac{\lambda}{2\pi}\frac{e_1}{e_2}\,\mathfrak{x}_2 \end{aligned}$$

Und die Gleichungen in dieser Form sind von Lang benützt worden, um die Formeln abzuleiten, welche circulare Vibration beim Durchgange der Strahlen längs der Axe einaxiger Medien bestimmen. Da für die Krystallphysik die Circularpolarisation nur in diesen Fällen eine Wichtigkeit erlangt, so ist auch eine allgemeine Discussion der Gleichungen 183 überflüssig. Ueber die weiteren Formeln vergleiche pag. 209.

§. 76. **Hauptschwingungsaxen.** Mit Zugrundelegung des Elasticitätsellipsoids werden sich jetzt auch die allgemeinen Fälle des Durchgangs einer Welle durch einen monoklinischen oder triklinischen Krystall erörtern lassen.

Es wird wie in den früheren Paragraphen die Durchschnittfläche der Welle mit dem Elasticitätsellipsoid und für die Lage der Polarisationsebene des doppelt gebrochenen Strahls das Maximum und Minimum des Krümmungshalbmessers dieses Durchschnittes zu suchen sein.

Da der Lage dieser letztgenannten Radien wirklichen Bewegungen entsprechen sollen, so ist es nothwendig, dass dieselben rechtwinkelig zu einander sein müssen, indem sonst jede Bewegung nach der Einen Richtung auch Bewegungen nach den beiden andern Richtungen nach sich ziehen müsste [1]. Wir müssen daher annehmen, dass selbst für die Fälle schiefwinkeliger Elasticitätsaxen doch beim Durchgang einer Welle durch den Krystall derselbe sich in zwei zu einander senkrecht schwingende Wellenbündel theilt.

---

1) Angström hat aus den Gleichungen 180 den Beweis der Rechtwinkeligkeit abgeleitet. Substituirt man nämlich die speciellen Werthe $\mathfrak{Q}_1$ $\mathfrak{Q}_{,,}$ $\mathfrak{x}_1$ . . . multiplicirt einmal mit $\mathfrak{X}_{,,}$ . . . das zweitemal mit $\mathfrak{X}_1$ . . . so folgt

$$(184)\quad \mathfrak{Q}_1^2(\mathfrak{x}_1\mathfrak{X}_{,,} + \mathfrak{y}_1\mathfrak{Y}_{,,} + \mathfrak{z}_1\mathfrak{Z}_{,,}) = \mathfrak{Q}_{,,}^2(\mathfrak{x}_{,,}\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{y}_{,,}\mathfrak{Y}_1 + \mathfrak{z}_{,,}\mathfrak{Z}_1) = \text{Const.}$$

da die eingeklammerten Ausdrücke beide gleich dem Cosinus der Neigung der beiden Vibrationsrichtungen sind, andererseits aber $\mathfrak{Q}_1$ $\mathfrak{Q}_{,,}$ bestimmte Werthe annehmen, so folgt als Bedingung

$$\mathfrak{x}_1\mathfrak{X}_{,,} + \mathfrak{y}_1\mathfrak{Y}_{,,} + \mathfrak{z}_1\mathfrak{Z}_{,,} = \mathfrak{x}_{,,}\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{y}_{,,}\mathfrak{Y}_1 + \mathfrak{z}_{,,}\mathfrak{Z}_1 = 0$$

daher der Winkel 90° betragen muss.

1) Lässt man die Welle bei prismatischen Krystallen successive parallel der 3 Coordinatenebenen $XY$, $YZ$, $XZ$ einfallen, so werden in einem solchen Falle die Maxima und Minima mit den Elasticitätsaxen zusammen fallen, d. h. die Schwingungen jeder Welle, welche parallel einem Hauptschnitte $XZ$... die Krystalle durchläuft, werden mit den Elasticitätsaxen zusammenfallen.

Anders ist es bei den schiefwinkeligen Axensystemen. Hier müssen wohl auch Schwingungsrichtungen auf einander senkrecht stehen, und können daher nicht mehr mit den Elasticitätsaxen zusammenfallen. Man pflegt nun diese zu einander senkrechten Schwingungsrichtungen in den Hauptschnitten Axen der Polarisation oder der **Hauptschwingungsaxen** und die Abweichungen dieses zweiten optischen Axensystems von dem ersten als Dispersion der Hauptschnitte zu benennen.

Zu bemerken ist hier, dass es unstatthaft wäre, diese Hauptschwingungsaxen als ein rechtwinkeliges Axensystem der Discussion der Phänomene zu Grunde zu legen, indem die Beobachtungen lehrten, dass dieses Axensystem nicht eine constante Lage im Krystalle hat, sondern vielmehr auch durch die Wellenlänge des durchgehenden Lichtes bedingt wird und mit dieser seine Lage gegen die Krystallaxen verändert. Hierdurch wird es nothwendig, schiefwinkelige Elasticitätsaxen von **constanter** Lage anzunehmen und die Beziehungen der Werthe der Hauptschwingungsaxen zu ersteren aufzusuchen.

2) Um nun die Beziehungen der Hauptschwingungsaxen zu den Elasticitätsaxen aufzufinden, genügt es von dem Elasticitätsellipsoid 178 zu jenem Ellipsoid überzugehen, welches über die rechtwinkeligen Hauptschwingungsaxen construirt ist.

Es scheint somit nothwendig, statt der Winkel $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ zu den schiefen Elasticitätsaxen jene Winkel $\mathfrak{x}_o$, $\mathfrak{y}_o$, $\mathfrak{z}_o$ einzuführen, welche eine beliebige Schwingungsrichtung der Molekule mit den Hauptschwingungsaxen bildet.

Hierdurch treten aber nun bei dem **monoklinischen** Systeme Vereinfachungen bemerkenswerther Art ein, indem es nur bei diesem Systeme möglich wird, mehrere der auftretenden Factoren zu eliminiren. Beim triklinischen Systeme wird diess nicht der Fall sein und wir gelangen trotz dieser Transformationen nur wieder zu einem complicirten Ausdruck.

3) Die Grundbedingungen des **monoklinischen** Systems bezüglich der optischen Eigenschaften sind jenen der Krystallographie ident. Eine Elasticitätsaxe fällt mit der Axe $Y$ der Krystallographie zusammen, während hingegen die beiden anderen Elasticitätsaxen in der Ebene $XZ$ (der Symmetrieebene) liegen. Es werden somit zwei der Haupt-

schwingungsaxen ebenfalls in der Ebene $YX$ liegen und die dritte mit der nach $Y$ fallenden Elasticitätsaxe übereinstimmen.

Hierdurch erkennt man, dass für das monoklinische System sich die Bestimmung der Neigung $\mathfrak{S}$ der beiden optischen Coordinatensysteme zu einander nur auf die Ebene der Symmetrie zu beziehen hat. Um diese Bestimmung des Winkels $\mathfrak{S}$ der Elasticitätsaxe zu der Hauptschwingungsaxe zu ermöglichen, wählt man eine Welle, die parallel der Symmetrieebene der Krystalle durchläuft und eine in dieselbe fallende beliebige Schwingungsrichtung. Hierdurch wird $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$, $\mathfrak{y} = 0$, $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}$, $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}$ und die Gleichung 178 reducirt sich vorerst auf

(185) $$\mathfrak{A}^2 = {}^0\mathfrak{L}_1\, \mathfrak{x}^2 + {}^0\mathfrak{N}_1\, \mathfrak{z}^2 + 2\, \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{x}\mathfrak{z}$$

in welche Gleichung für die Constanten die aus 172 — 174 sich ergebenden Werthe einzuführen sind. Vorerst verwandelt sich (171b) in

(186)
$$\nabla' (1+\nabla') = \frac{1}{1.2}\, \Delta y^2 \left[1 + \frac{1}{3.4}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (\Delta y)^2\right]$$
$${}^0\mathfrak{L}_1 = \Sigma\, m \frac{d_r f(r)}{r}\, \Delta x^2\, \nabla' (1+\nabla')$$
$${}^0\mathfrak{N}_1 = \Sigma\, m \frac{d_r f(r)}{r}\, \Delta z^2\, \nabla' (1+\nabla')$$
$$\mathfrak{Q}_1 = \Sigma\, m \frac{d_r f(r)}{r}\, \Delta x\, \Delta z\, \nabla' (1+\nabla')$$

Der Coefficient $\mathfrak{Q}$, der sich auch in der Form $(\Psi_{xy^2z} + \Psi_{xy^2z})$ schreiben liesse, wäre, wie ein Blick auf $\Sigma(xy^2z)$ zeigt, bei dem prismatischen Systeme gleich Null, da ja für jeden positiven Punkt $x$ ein negativer Punkt $z$ entspricht, wodurch sich die Summe der molekularen Einwirkungen aufheben würde. Hingegen bei dem monoklinischen Systeme können vermöge der krystallographischen Symmetrie von der Pyramide $hkl$ nur solche Summen Null werden, bei welchen $y$ in der ungeraden Potenz auftritt. In Folge dessen wird somit der Coefficient $\mathfrak{Q}_1$ einen constanten Werth haben. Allein eine Transformation der Gleichung 185 in ein auf rechtwinkelige Axen bezogenes Ellipsoid wird wie die Rechnung lehrt nur dadurch möglich, dass der Coefficient $\mathfrak{Q}_1$ der Nulle gleichgesetzt wird[1]) wodurch man als die erste Bedingung für die optischen Verhältnisse des monoklinischen Systemes die Gleichungen erhält

(187)
$$\Sigma m\, \frac{d_r f(r)}{r}\, \Delta x\, \Delta y^2\, \Delta z \left[1 + \frac{1}{6}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \Delta y^2\right] = 0$$
$$\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{L}_1 \mathfrak{x} + \mathfrak{N}_1 \mathfrak{z}^2$$

---

[1]) Auf diese Bedingung haben Grailich und Lang in Sitzungsber. der Wiener Academie vol. XXXIII, pag. 411 zuerst hingewiesen.

4) Geht man nun von den Cosinussen der Winkel $\mathfrak{x}, \mathfrak{z}$, welche die Vibrationsrichtung $V$ (Fig. 37) mit den Elasticitätsaxen $X_e$, $Z_e$ macht, zu den Cosinussen der Winkel $\mathfrak{x}_s$, $\mathfrak{z}_s$ über, welche $V$ mit den Hauptschwingungsaxen macht und denkt dieselben als Function des Winkels $\mathfrak{S}$ von der Schwingungsaxe $X_S$ zur Elasticitätsaxe $X_e$, sowie des Winkels $\eta$, welchen die Elasticitätsaxen $X_e$, $Z_e$ mit einander machen, so sieht man, dass sich die Gleichung 187 verwandelt in die nachfolgende Gleichung

Fig. 37. $X_e$ — $X_s$ — $V$ — $Z_s$ — $Z_e$

$$\mathfrak{Q}^2 = {}^0\mathfrak{L}_1 (\mathfrak{x}_s \cos \mathfrak{S} + \mathfrak{z}_s \sin \mathfrak{S})^2 + {}^0\mathfrak{N}_1 [\mathfrak{x}_s \cos(\mathfrak{S} + \eta) + \mathfrak{z}_s \sin(\mathfrak{S} + \eta)]^2 \quad (188)$$

Dieser Ausdruck gibt, wenn die Bedingung

$${}^0\mathfrak{L}_1 \cos \mathfrak{S} \sin \mathfrak{S} + {}^0\mathfrak{N}_1 \cos(\mathfrak{S} + \eta) \sin(\mathfrak{S} + \eta) = 0 \quad (189)$$

erfüllt ist, die Gleichung einer auf die rechtwinkeligen Schwingungsaxen bezogenen Ellipse, welche, wenn für

$$\mathfrak{Q}^2 = \frac{1}{r^2}$$

gesetzt wird, auch in die Coordinaten $xz$ übertragen werden kann

$$1 = x^2 [{}^0\mathfrak{L}_1 \cos^2 \mathfrak{S} + {}^0\mathfrak{N}_1 \cos^2(\mathfrak{S} + \eta)] + z^2 [{}^0\mathfrak{L}_1 \sin^2 \mathfrak{S} + {}^0\mathfrak{N}_1 \sin^2(\mathfrak{S} + \eta)] \quad (190)$$

Diese Gleichung bestimmt nun die Werthe aller in der Symmetrieebene liegenden Vibrationen.

Entwickelt man die Bedingung 189, so folgt aus derselben der Werth für $\mathfrak{S}$ unter der Form

$$\operatorname{tang} 2\,\mathfrak{S} = -\frac{{}^0\mathfrak{N}_1 \sin 2\eta}{{}^0\mathfrak{L}_1 + {}^0\mathfrak{N}_1 \cos 2\eta} \quad (191)$$

worin das Minuszeichen die entgegengesetzte Lage der Winkel $\mathfrak{S}$ und $\eta$, vom Nullpunkte der Winkel aus gerechnet, bedeutet.

Diese Formel stimmt mit der von Angström gegebenen vollkommen überein, enthält aber zugleich, da in der Entwicklung der Exponentielle die höheren Glieder nicht vernachlässiget wurden, auch $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{N}_1$ als Functionen von $\frac{1}{\lambda^2}$ (Formel 186) und ist somit geeignet die Dispersion der Hauptschnitte (vergl. vorigen Paragraph) zu erklären.

Die Formel 191 macht zugleich erklärlich, dass im prismatischen Systeme, wo $\eta = 90$, $\sin 2\eta = 0$, auch $\mathfrak{S} = 0$, Schwingungs- und Elasticitätsaxe zusammen fallen, da gleichzeitig 187 erfüllt ist.

§. 77. Elasticitätsfläche und Hauptbrechungsexponenten. 1) Nennt man noch, ohne auf das Grössenverhältniss Rücksicht zu nehmen, die Lichtfortpflanzungsgeschwindigkeit, welcher Vibrationen

parallel den Hauptschwingungsaxen $X_s$, $Z_s$ entsprechen, $\mathfrak{a}_s$, $\mathfrak{c}_s$ zum Unterschiede von $\mathfrak{a}_t$, $\mathfrak{c}_t$, welche auf die Elasticitätsaxen Bezug haben, so wird

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_s &= \mathfrak{L}_1^0 \cos^2\mathfrak{S} + \mathfrak{N}_1^0 \cos^2(\mathfrak{S} + \eta) \\ \mathfrak{c}_s &= \mathfrak{L}_1^0 \sin^2\mathfrak{S} + \mathfrak{N}_1^0 \sin^2(\mathfrak{S} + \eta) \end{aligned} \tag{192}$$

sein. Geht man wieder vom monoklinischen System zum prismatischen über, wo $\mathfrak{S} = 0$, $\eta = 90^0$, so ist

$$\mathfrak{a}_s = \mathfrak{a}_t = \mathfrak{L}_1^0 \qquad \mathfrak{c}_s = \mathfrak{c}_t = \mathfrak{N}_1^0 \tag{192a}$$

Für Schwingungen parallel den Elasticitätsaxen im monoklinischen Systeme wird in Folge 187, wenn man hierin $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z} = 0$, $\eta$ setzt, sein

$$\mathfrak{a}_t = \mathfrak{L}_1^0 + \mathfrak{N}_1^0 \cos^2\eta \qquad \mathfrak{c}_t = \mathfrak{N}_1^0 + \mathfrak{L}_1^0 \cos^2\eta \tag{192b}$$

2) Sucht man nun schliesslich den Werth der Lichtgeschwindigkeit für Vibrationen parallel der Elasticitäts- und Schwingungsaxe $Y$, so darf man nur eine Welle annehmen, welche parallel der Coordinatenebene $X_t$, $Y_t$ durchgeht, also $B = 0$, $A = 0$, $C = 90 + \eta$ und in der Coordinatenebene $XY$ eine Vibrationsrichtung annehmen, die mit $Y_1$ zusammenfällt, also $\mathfrak{x} = 0$, $\mathfrak{y} = 1$, $\mathfrak{z} = 0$

Wir erhalten dadurch für das monoklinische System

$$\mathfrak{b}_t = \mathfrak{M}_1^0 = \Psi_{\eta}\, \Delta z^2 \sin^2\eta \left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\, \Delta z^2 \sin^2\eta\right) \tag{193}$$

Für das prismatische System ist wieder $\eta = 90^0$ und wir erhalten dann

$$\mathfrak{b}_t = \Sigma m \frac{d_r fr}{r}\, \Delta y^2, \Delta z^2 \left(1 + \frac{1}{\lambda^2} \Delta z^2\right) \tag{193a}$$

für den Werth der mit der Elasticitätsaxe $Y$ zusammen fallenden Vibrationsrichtung.

3) Da durch die bisherigen Untersuchungen die Verhältnisse des monoklinischen Systems auf die 3 senkrechten Hauptschwingungsaxen bezogen sind, wird es möglich, analog den orthogonalen Systemen für jede beliebige Lage der Wellen die Elasticitätsfläche

$$\frac{A^2}{\mathfrak{a}_s - \Omega^2} + \frac{B^2}{\mathfrak{b}_s - \Omega^2} + \frac{C^2}{\mathfrak{c}_s - \Omega^2} = 0 \tag{194}$$

heraus abzuleiten.

Ebenso wird auch für den Winkel der optischen Axen die Formel 127 gelten, wenn in derselben statt $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Werthe von $\mathfrak{a}_s$, $\mathfrak{b}_s$, $\mathfrak{c}_s$, aber mit genauer Berücksichtigung ihres gegenseitigen Grössenverhältnisses, substituirt werden.

Untersucht man die Werthe des triklinischen Systems, so wird es wohl auch möglich sein, zu den 3 Hauptschwingungsaxen überzugehen. Jedoch gibt ein einfacher Blick auf die Werthe der Factoren $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}_1$ . .

zu erkennen, dass nur durch complicirtere Bedingungen zu einfachen Gleichungen analog 194 zu gelangen sein wird.

4. Schliesslich erübrigt noch, die Werthe der Hauptbrechungsexponenten für jenen Fall aufzusuchen, in welchem nur eine elliptische Polarisation vorkommt. Dieselbe ist beobachtet an hexagonalen Krystallen, Quarz und Zinnober, und nähert sich für den Durchgang der Strahlen parallel der optischen Axe der Circularpolarisation.

Aus den 6 Gleichungen (183a) folgt aber[1]), wenn man $\mathfrak{z}_2$ der Nulle gleichsetzt

$$\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{r}^2 = C^2 \mathfrak{E}^2 \frac{\lambda}{2\pi} \frac{e_1}{e_2}$$

$$(\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{r}^2) + (\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{r}^2) C^2 = (\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{r}^2) + (\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{c}^2)(C^2 - 1) = C^2 \mathfrak{E}^2 \frac{\lambda}{2\pi} \frac{e^2}{e_1} \tag{195}$$

oder multiplicirt

$$(\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{r}^2)^2 + (\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{c}^2)(\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{r}^2)(C^2 - 1) = C^4 \mathfrak{E}^4 \frac{\lambda^2}{\pi^2}$$

Bedenkt man, dass in dieser Gleichung $C$ der Cosinus des Winkels der Wellennormale zur Coordinatenaxe $Z$, die hier angenommen als die optische Axe ist, so stimmt derselbe auch mit dem $\cos\psi$ (Satz 134) überein. Entwickelt man somit $\mathfrak{r}^2$ aus obigen Formeln, so erhält man

$$\mathfrak{r}^2 = \mathfrak{a}^2 - \frac{\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{c}^2}{2} \sin^2\psi \pm {}^1/_2 \sqrt{(\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{c}^2)^2 \sin^4\psi + \cos^4\psi\, \mathfrak{E}^4 \frac{\lambda^2}{\pi^2}} \tag{196}$$

welche Gleichung für den Fall der Linearpolarisation, d. i. $\mathfrak{E} = 0$ mit den bekannten Formeln 133 zusammenfällt. Ebenso ist die Differenz der zwei Strahlen

$$\mathfrak{r}_1^2 - \mathfrak{r}_2^2 = \sqrt{(\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{c}^2)^2 \sin^4\psi + \cos^4\psi\, \mathfrak{E}^4 \frac{\lambda^2}{\pi^2}} \tag{196a}$$

Aus obiger Gleichung ersieht man ferner, dass für Werthe von $\psi$ nahe an $90^0$, $\cos\psi = 0$, d. h. für Strahlen, die geneigt zur optischen Axe durchgehen, verschwindet das Glied mit $\mathfrak{E}$ und tritt die gewöhnliche lineare Polarisation ein, während hingegen für Strahlen, die parallel der Axe durchgehen, also $\sin\psi = 0$ $\cos\psi = 1$ haben, der Werth von $\mathfrak{r}$ sich reducirt auf

$$\mathfrak{r}^2 = \mathfrak{a}^2 \pm \mathfrak{E}^2 \frac{\lambda}{2\pi} \tag{197}$$

Diese Gleichung sagt, dass sich also parallel der Axe zwei Strahle mit ungleicher Geschwindigkeit und entgegengesetzter Circularpolarisation fortpflanzen. Die Anwendung dieser Gleichung wird in einem nachfolgenden Kapitel erfolgen.

[1]) Lang. Pogg. Ann. vol. 119, pag. 80.

§. 78. **Ableitung der Wellenfläche.** Geht man wieder auf das allgemeine Problem der Bewegung bei schiefwinkeligen Axen zurück, so erübrigt nur noch die Ableitung der Wellenfläche. Angström hat dieselbe durch Annahmen über die gegenseitigen Beziehungen der Molekularsummen zu begründen versucht.

Eliminirt man nämlich aus den Gleichungen 176 die Werthe $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, so erhält man successive

$$(L_1-\Omega^2)(M_1-\Omega^2)(N_1-\Omega_2)-P_1P_{,,}(N_1-\Omega^2)-Q_1Q_{,,}(M_1-\Omega^2)$$
$$-R_1R_{,,}(L_1-\Omega^2)+P_1Q_1R_1+P_{,,}Q_{,,}R_{,,}=0$$

$$\Omega^6-\mathfrak{s}_1\Omega^4+\mathfrak{s}_{,,}\Omega^2+\mathfrak{s}_{,,,}=0$$

$$\mathfrak{s}_1=\mathfrak{L}_1+\mathfrak{M}_1+\mathfrak{N}_1+2\zeta\mathfrak{P}_1+2\eta\mathfrak{Q}_1+2\zeta\mathfrak{R}_1$$

(198) $$\mathfrak{s}_{,,}=(\mathfrak{L}_1\mathfrak{M}_1-\mathfrak{P}_1^2)(1-\zeta^2)+2(\mathfrak{N}_1\mathfrak{P}_1-\mathfrak{Q}_1\mathfrak{R}_1)(\zeta-\xi\eta)$$
$$+(\mathfrak{L}_1\mathfrak{R}_1-\mathfrak{Q}_1^2)(1-\eta^2)+2(\mathfrak{M}_1\mathfrak{Q}_1-\mathfrak{P}_1\mathfrak{R}_1)(\eta-\xi\zeta)$$
$$+(\mathfrak{M}_1\mathfrak{N}_1-\mathfrak{R}_1^2)(1-\xi^2)+2(\mathfrak{L}_1\mathfrak{R}_1-\mathfrak{Q}_1\mathfrak{P}_1)(\zeta-\xi\eta)$$

$$\mathfrak{s}_{,,,}=(\mathfrak{L}_1\mathfrak{M}_1\mathfrak{N}_1-\mathfrak{L}_1\mathfrak{R}^2-\mathfrak{M}_1\mathfrak{Q}_1^2-\mathfrak{N}\mathfrak{P}_1^2+2\,\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1\mathfrak{R}_1)\,\square$$

wo $\square$ durch 177a bestimmt ist.

Zwei der Wurzeln von 198 werden die Transversalvibrationen, eine die longitudinalen Schwingungen betreffen und man wird, um letztere eliminiren zu können, zu Annahmen über die in $\mathfrak{L}_1$ $\mathfrak{M}_1$ .. auftretenden Molekularsummen gezwungen sein.

Für rechtwinkelige Axensysteme vereinfacht sich durch den Wegfall der Grössen $\xi\eta\zeta$ die Gleichung 198 und wird nach dem Vorgang Cauchy's und Neumann in die zwei Factoren zerlegt

$$\Omega^2-(A^2\Delta x^2\Psi_{xx}+B^2\Delta y^2\Psi_{yy}+C^2\Delta z^2\Psi_{zz})=0$$

(198a) $$\Omega^4-[A^2\Delta x^2(\Psi_{yy}+\Psi_{zz})+B^2\Delta y^2(\Psi_{xx}+\Psi_{zz})+C^2\Delta z^2(\Psi_{xx}+\Psi_{yy})]\Omega^2$$
$$+A^2\Delta x^2\Psi_{yy}\Psi_{zz}+B^2\Delta y^2\Psi_{xx}\Psi_{zz}+C^2\Delta z^2\Psi_{xx}\Psi_{yy}=0$$

welche letztere Gleichung sich wie bekannt leicht auf die Form von 194 zurückführen lässt und die transversalen Schwingungen bestimmt. Dieser Ableitung haben Cauchy und Neumann drei Relationen zwischen den Molekularsummen analog der Gleichung

(198b) $$(\Delta x^2\Psi_{xx}-\Delta x^2\Psi_{yy})(\Delta y^2\Psi_{yy}-\Delta y^2\Psi_{xx})=(2\Delta x^2\Psi_{yy})^2$$

zu Grunde gelegt.

Durch eine wohl etwas complicirtere Elimination einiger Molekularsummen gelangt Angström zu einer 198a analogen Gleichung für die Transversalcomponenten des Lichtes, welche derselbe unter der Form schreibt

(199) $$\Omega^4-\Omega^2\{(A^2+B^2-2AB\zeta)\Delta x^2\Psi_{yy}+(A+C-2AC\eta)\Delta z^2\Psi_{xx}$$
$$+(B^2+C^2-2BC\xi)\Delta y^2\Psi_{zz}\}$$
$$+\square\{A^2\Delta x^2\Psi_{yy}\Psi_{zz}+B^2\Delta y^2\Psi_{xx}\Psi_{zz}+C^2\Delta z^2\Psi_{xx}\Psi_{yy}\}=0$$

Wohl besitzt diese Formel die nothwendige Eigenschaft für $\xi, \eta, \zeta = 0$ in die bekannte Gleichung 198a überzugehen, ebenso genügt sie der Ableitung der von uns auf anderem Wege gefundenen Formel 191—194, doch kann dieselbe, so lange die Elimination der Molekularsummen nur auf willkürlichen Annahmen beruht, auch nur als hypothetische Formel betrachtet werden.

Es dürfte hier schliesslich nicht unwichtig sein, an die allgemeine Ableitung der Wellenfläche von Pochhammer, Pogg. Ann. vol. 121, pag. 239 zu erinnern, welcher nachwies, dass nur in dem Falle, dass die Constanten der Molekularaction (vergl. Cauchy. Exercis. des mathém. vol. III) vernachlässigt werden können, die allgemeine Gleichung 194, im entgegengesetzten Falle aber die Gleichung

$$\frac{A^2}{\mathfrak{a}_s - \mathfrak{K}^2 - 0_1} + \frac{B^2}{\mathfrak{b}_s - \mathfrak{K}^2 - 0_2} + \frac{C^2}{\mathfrak{c}_s - \mathfrak{K}^2 - 0_3} = 0 \qquad (199a)$$

Geltung habe, in Folge dessen dann die Hauptschnitte der Wellenfläche nicht mehr aus Kreis und Ellipse, sondern aus zwei Ellipsen bestehen würden. Ein Fall, der durch die bisherigen Beobachtungen an Krystallen des monoklinischen Systems für letzteres weder geläugnet, noch bestätigt wird.

---

# XIII. Kapitel.

## Dioptrisches Verhalten planplaner Krystallplatten. Richtung des Strahls und seiner Schwingungsebene.

§. 79. Die Bestimmung der optischen Constanten krystallisirter Medien wird in den meisten praktischen Fällen so durchgeführt, dass zur Bestimmung der Qualität der optischen Werthe planplane Platten, zur Ermittlung der Quantität hingegen Prismen untersucht werden. Sind diese Präparate krystallographisch orientirt, so wird auch die durchgehende Welle gegen die Krystallaxen bestimmt sein. Hierdurch wird es möglich, die Resultate des vorhergehenden Kapitels zu specialisiren und sowohl Richtung des Strahles und seiner Schwingungen, als auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit selbst zu finden. Es muss wohl hier darauf hingewiesen werden, dass die Resultate des vorhergehenden Kapitels auf Grundlage der Kenntniss die Hauptbrechungsexponenten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ oder $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ erlangt wurden, während bei der Untersuchung neuer Präparate eben diese Grössen unbekannt sind, und nur aus den übrigen Functionen abgeleitet werden können. Der Bestimmung der Hauptbrechungsexponenten pflegt daher meist eine Untersuchung von planplanen Platten vorherzugehen, indem dieselben namentlich in den asymmetrischen Krystallsystemen das einzige Mittel sind, um jene Richtungen zu erforschen, in welche die Hauptschwingungsrichtungen (§. 76) fallen.

Ehe man noch zu den speciellen Untersuchungen übergeht, dürfte es nicht überflüssig sein, die Herstellung der optischen Präparate und namentlich die der planplanen Platten mit einigen Worten zu erläutern.

Sei vorerst die Richtung festgesetzt, in welcher der Schnitt erfolgen soll, so werden je nach der Grösse und Härte des zu Platten

bestimmten Minerals für die Herstellung der Schnitte verschiedene Methoden angewendet werden können. Um schon bei einem ersten Schnitte die bestimmte Richtung einzuhalten und auch aus einem gegebenen grösseren Materiale mehrere Platten von gleicher Orientirung zu schneiden, würde die Anwendung eines ähnlichen Apparates zu empfehlen sein, wie er in meiner Krystallographie (Phys. Min. vol. I. Kap. XXII) zum Schneiden der Modelle beschrieben ward. Man würde durch zweckmässige Adaptirung die Richtung des schneidenden Instrumentes gegen den Krystall am Gradbogen bestimmen, und wäre hierdurch sicher, die geforderte Platte mit einem Schnitte nahe richtig, sowie auch durch successives paralleles Verstellen des Krystalls aus demselben mehrere Platten mit nur geringem Materialverluste herstellen zu können. Das Schneidwerkzeug muss eine feine Laubsäge oder besser ein blosses Stahlblatt sein, welches je nach Härte und Löslichkeit des Materials mit Oel, Wasser befeuchtet und mit Schmirgelpulver bestreut wird.

Da ein solcher Schneideapparat seinen vollen Nutzen nur bei grossem Materiale hat, welches gleichzeitig mehrere Platten zu schneiden erlaubt, während hingegen der Mineraloge möglichst viele kleine Krystalle optisch zu verwerthen strebt, so empfiehlt sich für letztere die Herstellung der optischen Präparate mit freier Hand durch ein Verfahren, welches bei einiger Uebung selbst bei den kleinsten Krystallen anwendbar ist.

Man bestimmt zuerst an dem ganzen Krystalle die Durchschnittspunkte der Kanten mit der Richtung der Durchschnittslinie für die Platte und entfernt nun diese überflüssigen Partien je nach der Härte des Materials entweder durch eine mit Wasser und Schmirgel befeuchtete Feile oder durch blosses Schaben mit dem Messer. Dadurch erhält man bereits Flächen, welche, obwohl rauh und uneben oder gekrümmt, doch nahe in der Richtung der zu schneidenden Plattenfläche liegen. Man kann hier bereits durch Messung der Winkel dieser Schnittfläche zu den Seitenflächen des Krystalls, welche letztgenannte man durchwegs zu erhalten bestrebt sein muss, erkennen, ob die Richtung des Schnittes nahe richtig ist.

Man wird sodann Verbesserungen in der Richtung so lange vornehmen, bis die Uebereinstimmung der geforderten und geschnittenen Fläche vorhanden ist. Ist auf diese Weise die Fläche durch behutsames Feilen und Schaben hergestellt, so wird erfordert, dass man die Fläche eben und die Platte zur gewünschten Dicke schleife. Diess Ebenschleifen der Platte geschieht für härteres Material auf einer Gusseisenplatte mit Schmirgel, für weichere auf einer matten Glasplatte mit Bims oder geschlemmter Kreide, mit Oel oder Wasser befeuchtet. Ist der Körper

löslich, so genügt zum Schleifen auf der Glasplatte Wasser. Ist der Körper etwas hart, so wird die Platte abwechselnd mit einer Seite auf einer Glasplatte mit Mastix befestigt und ihre freie zweite Seite dann geschliffen; ist der Körper jedoch weicher, so ist diess Verfahren kaum nöthig, und man kann die Platte frei schleifen.

Um nun bei diesem Feinschleifen aus freier Hand möglichst die gewünschte Richtung beizubehalten, empfiehlt sich, den Schliff nur mit der Spitze des gekrümmten Zeigefingers durchzuführen. Man legt die Platte mit ihrer Unterfläche auf die Glasplatte, legt auf erstere mit sanftem Drücken die Spitze des Zeigefingers so an, dass sich die Platte gleichsam in dieselbe einbettet, und fährt mit langsamen, gleichmässig grösseren Zügen über die Glastafel. Einige Uebung ermöglicht, nicht bloss die vorhandene Richtung der Plattenoberfläche constant zu erhalten, sondern dieselbe auch in einem gewünschten Sinne mehr oder minder abzuändern. Winkelbestimmungen der Platte zu ihren Seitenflächen sind zur Controle nöthig.

Ist die Platte fein und eben geschliffen, so muss dieselbe, um kein diffuses Bild zu geben, polirt werden. Diess geschieht am besten auf Leder mit Englischroth (Colcothar). Krystalle, welche nicht allzuweich sind, erlangen hierdurch eine genügende, vollkommen ebene, glänzende Fläche. Nur für Krystalle, welche entweder leicht zerbröckeln oder verwittern, oder keinen vollkommenen Glanz annehmen, genügt (wenn nicht quantitative Bestimmungen durch Interferenz Beobachtungen vorzunehmen sind) die Herstellung eines unpolirten Ebenschliffes. Man wird dann das Präparat zwischen zwei feine Deckgläschen bringen und durch einen leicht erhärtenden Kitt befestigen, wobei die Aufmerksamkeit auf den nothwendigen Parallelismus der Deckgläschen mit den Schnittflächen zu richten ist.

Als Kitt, dessen nothwendige Eigenschaften nur Durchsichtigkeit und Undurchdringlichkeit gegen die äussere Luft sind, werden mehrere Harze angewendet. Für gewöhnliche Zwecke genügt eine Lösung von Canadabalsam in Alkohol und Aether; soll der Kitt schneller erhärten, so empfiehlt sich die Anwendung einer ätherischen Mastixlösung. Soll der Kitt unmittelbar erhärten, und verträgt die Platte Wärme, ohne verletzt zu werden, so kann auch als Bindemittel eine durch Erhitzung flüssig gewordene Harzmasse angewendet werden. Da durch die parallel aufgeklebten Glasplättchen die Polarisationsrichtungen des Strahles nicht geändert werden, so sind so dargestellte Präparate sowohl wegen der klaren Bilder, welche sie geben, als auch wegen der grösseren Haltbarkeit sehr zweckmässig.

§. 80. Bestimmung der Schwingungsrichtungen. Bereits im §. 71 wurden die Gleichungen aufgestellt, welche die Lage der Polarisationsrichtungen des Strahles, abhängig von der Grösse der Elasticitätsaxen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, und von der Lage der durchgehenden Wellen gegen diese Elasticitätsaxen darstellt. Man erkennt durch diese theoretischen Untersuchungen, dass in jeder planplanen Platte, je nach ihrer Orientirung gegen die Elasticitätsaxen oder die optischen Axen sich der durchgehende Strahl in zwei Wellenbündel mit verschiedener Geschwindigkeit und senkrechter Polarisationsrichtung trennt.

Sind die dem Elasticitätsellipsoide zu Grunde liegenden Werthe $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ bekannt, ferner die Orientirung $A$, $B$, $C$ von der Wellennormale $W$ und $HKL$ der Normale der Platte $N$ gegen die Elasticitätsaxen bekannt, so wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der beiden Wellenbündel $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2$ durch die Gleichungen 130 und 143 gegeben, während die Richtung der Vibrationen selbst durch die Gleichungen 139, 140 bestimmt wird.

Diese Gleichungen sind wohl nur für rechtwinkelige Elasticitätsaxen mit voller Strenge abgeleitet worden, sie werden jedoch, mindestens so weit die bisherigen Versuche gehen, die Verhältnisse des monoklinischen und triklinischen Systems annähernd darstellen. Wohl ist der theoretische (vergl. §. 76) Beweis für die Abhängigkeit der optischen Verhältnisse der klinischen Systeme von einem rechtwinkeligen Ellipsoide (construirt über die Hauptschwingungsaxen) von dem Nullwerden (187) der summatorischen Function $\Sigma m \frac{d_x fr}{r} \Delta x \, \Delta^2 y \, \Delta z$ abhängig gemacht worden und daher nicht absolut beweisbar; doch zeigte er die Möglichkeit der Existenz analoger Verhältnisse im monoklinischen wie im prismatischen Systeme.

Durch diese oben erwähnten Gleichungen und den §. 71 wird es nun möglich sein, aus den bekannten $a$, $b$, $c$ $A$, $B$, $C$ $H$, $K$, $L$ für jede beliebige Platte die Richtungen der Schwingungen des durchgehenden Strahles gegen die Elasticitätsaxen im voraus zu bestimmen. Am einfachsten gestalten sich diese Berechnungen für senkrechte Incidenz des Lichtstrahles, indem in diesem Falle $ABC = HKL$ wird und die Richtung des Strahles mit der Wellennormale $W$ und dem Einfallslothe $N$ (Fig. 30) in einem Punkte zusammenfällt. Im Nachfolgenden kommen der Einfachheit wegen nur die Fälle dieser senkrechten Incidenz zur Sprache.

Um diese Berechnungen zu prüfen oder überflüssig zu machen, kann man im Falle der senkrechten Incidenz die directen Bestimmungen der Vibrationsrichtungen des Strahles in der Platte benützen. Analysirt man nämlich das aus der Platte senkrecht austretende Licht mittelst eines Nicols, so wird in zwei Stellungen des Nicols das Maximum der

Helligkeit eintreten. Es entsprechen, wie sich leicht erkennen lässt, diese Maxima den Vibrationsrichtungen des Strahles in der Platte. Hierdurch erhält man die Lage der Schwingungsrichtungen gegen die Plattenebene selbst bekannt. Sind nun die Endkanten der Platten gegen die Elasticitätsaxen orientirt, so wird durch diese Beobachtung der Winkel der Schwingungsrichtung mit den Kanten der Platte bekannt.

Die Kenntniss des Winkels der Schwingungsrichtung zur Kante lässt sich nun entweder aus der schon bekannten krystallographischen und optischen Orientirung der Platte im Voraus berechnen oder umgekehrt zur Erforschung der letztgenannten benützen. Man pflegt zu diesem Zwecke die Kanten der Platten meist durch den Durchschnitt zweier gegen die Elasticitätsaxen orientirten Krystallflächen zu bilden.

Die Lage der Wellenfläche (zugleich Plattenoberfläche) ist nämlich für senkrechte Incidenz durch die Cosinusse $A$, $B$, $C$ der Winkel bestimmt, welche die Normale $N$ der Fläche zu den Elasticitätsaxen machen und welche aus der krystallographischen Orientirung zu den Krystallaxen $X_k$, $Y_k$, $Z_k$ und letzterer gegen die Elasticitätsaxen $X_e$ . . nach der bekannten Gleichung

$$(200) \quad A = \cos PX_k \cos X_kX_e + \cos PY_k \cos X_kX_e + \cos P'Z_k \cos Z_kX_e$$

folgen. Sind ferner für die zweite Fläche, welche mit der ersteren die Kante $K$ bildet die Werthe $A'$ $B'$ $C'$ analog bestimmt, so werden denn auch aus diesen die Cosinusse $h, k, l$ der Winkel der Kante zu $X_e$, $Y_e$. $Z_e$ ableitbar sein, nach

$$(200\text{a}) \quad \begin{aligned} \nabla h &= B'C - BC' \\ \nabla k &= AC' - A\,C \\ \nabla l &= A'B - AB' \end{aligned}$$

wobei sich ($\nabla^2$) durch die Summation der linken Glieder ergibt. Ist hierdurch die Lage der Kante bestimmt, so wird auch aus den für die Werthe $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ geltende und bekannte Winkel $\mathfrak{x}_1\ \mathfrak{y}_1\ \mathfrak{z}_1$; $\mathfrak{x}_{,,}\ \mathfrak{y}_{,,}\ \mathfrak{z}_{,,}$ sich die Cosinusse der Winkel $\mathfrak{k}_1$ $\mathfrak{k}_2$ der zwei Schwingungsrichtungen zur Kante ergeben, da bekanntlich

$$(201) \quad \begin{aligned} \cos \mathfrak{k}_1 &= \mathfrak{x}_1 h + \mathfrak{y}_1 k + \mathfrak{z}_1 l \\ \cos \mathfrak{k}_2 &= \mathfrak{x}_{,,} h + \mathfrak{y}_{,,} k + \mathfrak{z}_{,,} l \end{aligned}$$

Durch diese Gleichungen ist es möglich, wenn $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, sowie die Orientirung des Krystalls zu den Elasticitätsaxen bekannt ist, successive die Winkel $ABC, A'B'C'$ $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}_{,,}$; $\mathfrak{x}_{,,}\ \mathfrak{y}_{,,}\ \mathfrak{z}_{,,}$ h, k, l und dann die Winkel der Schwingungsrichtung $\mathfrak{k}_1$ $\mathfrak{k}_2$ gegen die Kanten zu berechnen.

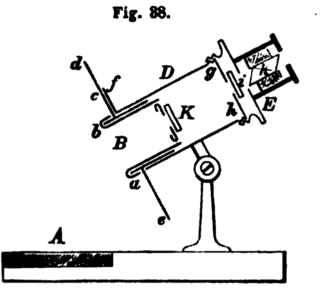
Im Allgemeinen wird eine kurze Betrachtung der obwaltenden Verhältnisse lehren, dass für alle jene Flächen, welche einem Hauptschnitte oder der Ebene zweier Elasticitätsaxen parallel laufen, wie Prismen,

Domen, Pinakoidflächen, die Schwingungsrichtung des einen Strahles in diese Coordinatenebene fällt, während die Zweite auf derselben senkrecht steht. Für optisch einaxige Mittel ist die Lage der beiden gleichen Elasticitätsaxen im horizontalen Hauptschnitte ohne Einfluss, daher für Pyramiden des pyramidalen und hexagonalen Krystallsystems eine Schwingungsrichtung immer in die Ebene von Flächennormale zur optischen Hauptaxe fällt.

Für alle Pyramiden der übrigen Systeme, sowie für alle Flächen der klinischen Systeme, mit Ausnahme jener, welche in der Symmetrieebene des monoklinischen Systemes liegen, wird die Vibrationsrichtung je nach dem Charakter des Mittels und der krystallographischen Orientirung [1]) verschieden liegen.

§. 81. Stauroskop. Da die oben erwähnte Methode der Dunkelstellung des Nicols keine grosse Genauigkeit bei Bestimmung der Lage der Hauptschwingungsrichtung zulässt, so sind mehrere Versuche zuerst von Dove angestellt worden, diesen Fehler möglichst zu verringern. Eine für diese Zwecke passende Combination hat Kobell [2]) zusammengestellt und mit dem Namen Stauroskop bezeichnet. Bei demselben wird statt der Dunkelstellung das Auftreten eines Interferenzbildes beobachtet, welches um viel empfindlicher die Lage der Vibration anzeigt. Ein nach Kobell's Angabe gefertigtes Instrument ist (Fig. 38) dargestellt. Die wesentlichen Bestandtheile sind: der Spiegel *A*, welcher polarisirtes Licht liefert, ein getheilter Kreis *d e*, dessen fixe Alhidade *f*, *K* die zu untersuchende Krystallplatte, *k* ein Nicol'sches Prisma. Der Krystallträger *B* ist frei verschiebbar und wird nur durch die Wülste *a*, *b* an das den Limbus *de* tragende Rohr angedrückt, doch fest genug um den Drehungen des letzteren zu folgen.

Fig. 38.




Soll nun eine Bestimmung der Vibrationsrichtung einer Krystallplatte durchgeführt werden, so muss der Krystallträger *B* aus der Röhre *D* herausgezogen werden, die Platte *K* wird dann auf den Träger aufgesetzt. Um diese Einstellung immer gleichmässig zu machen, sind auf diesem Krystallträger feine Linien gezogen, so dass dann die krystallographisch orientirte Kante der Platte parallel mit einer dieser Linien gestellt werden kann. Wie erwähnt ist der Limbus *de* mit dem Krystallträger *K* drehbar und die Alhidade *f* gibt den Drehungswinkel am Kreise *de* an.

---

[1]) Vergl. Grailich. Kryst. opt. Untersuchungen. Preisschrift, 1857. pag. 30.

[2]) Kobell. Anzeig. der Münchner Academie. 1855—1858.

Hat nun der obere Nicol eine solche Stellung, dass er das von *A* direct kommende Licht auslöscht, dass somit seine Schwingungsrichtung in die Einfallsebene falle, so wird, wenn man die Krystallplatte *K* zwischen *k* und *A* bringt, das Gesichtsfeld sich erhellen. Diess ist eine Folge der Doppelbrechung von *K*. Dunkelheit wird nur dann wieder eintreten, wenn man Limbus und Krystallträger so weit dreht, dass die Schwingungsrichtungen des Lichtes in der Platte *K* mit der Schwingungsrichtung des Lichtes im oberen Nicol zusammentrifft. Diess geschieht in zwei um 90° verschiedenen Stellungen der Alhidade *f*.

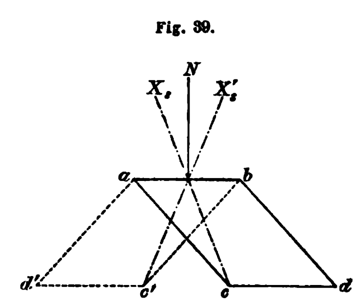
Um aus diesen Angaben die Lage der Schwingungsrichtung in der Platte gegen die Kante zu finden, muss der Limbus am Instrument so orientirt sein, dass im Nullpunkt desselben, ohne zwischenliegenden *K* durch den oberen Nicol die Dunkelstellung eintritt. Diese Orientirung des Limbus ist in allen Fällen leicht möglich, in denen die Schwingungen des von *A* reflectirten Lichtes horizontal sind.

Ferner muss die Leitlinie am Krystallträger so gezogen sein, dass sie einen Durchmesser des Limbus von dem neunzigsten zu dem 270. Grade bildet. Diese Eigenschaft kann der Mechaniker dem Instrumente geben, wobei nur erforderlich ist, dass der Krystallträger *B* immer in Einer Richtung in die Röhre *D* einschiebbar ist.

Hat das Instrument diese Eigenschaften, so ist ersichtlich, dass wenn in der Platte *K* die Schwingungsrichtung senkrecht zu der justirten Kante vor sich geht, die Alhidade *f* am Limbus auf 0° zeigen wird. Ist hingegen die Schwingungsrichtung in der Platte gegen dieselbe Kante um einen Winkel *x* geneigt, so wird auch denselben die Alhidade anzeigen in dem Momente, wo wahrhafte Verdunklung des Gesichtsfeldes eintritt.

Um die Orientirung des Limbus überflüssig zu machen und die Polarisationsrichtung des Polariseur und Analyseur willkürlich wählen zu können, darf man nur zwei Beobachtungen combiniren. Man beobachtet bei willkürlichem Nullpunkt der Theilung jenen Grad am Limbus, bei welchem die Platte *K* Dunkelstellung hervorruft. Dann dreht man diese Platte *K* um eine Axe (Fig. 39) welche in der Plattenebene liegt, und befestigt in dieser verwendeten Stellung die Platte wieder auf dem Krystallträger, wobei jedoch die zuerst orientirte Kante *ab* auch diessmal wieder parallel der Leitlinie am Krystallträger sein muss. Man sucht nun jenen Grad am Limbus auf, bei welchem auch für die zweite Plattenstellung Dunkelheit eintritt. Sei

Fig. 39.



nur der zuerst abgelesene Winkel $x$, der zweite $y$, so ersieht man unmittelbar aus (Fig. 39), dass $\frac{x-y}{2}$ oder $\frac{y-x}{2}$ je nachdem $x \gtrless y$ der Winkel ist, um welchen die Vibrationsrichtung gegen die orientirte Kante geneigt ist.

Da die einfache Dunkelstellung wegen der Schwierigkeit der Intensitätsschätzung auf mehrere Grade unsicher ist, so pflegt man, wie schon erwähnt, zwischen Platte und Nicol bei $i$ eine senkrecht zur optischen Axe geschnittene Calcitplatte zu bringen. Diese liefert als Interferenzbild ein schwarzes Kreuz, welches nur bei vollkommener Dunkelstellung der Platte $K$ scharf begrenzt und schwarz erscheint. Diess erlaubt eine genauere Einstellung.

Das Kobell'sche Stauroskop leidet jedoch an dem Uebelstande, dass der Krystallträger immer aus und in die Röhre eingeschoben werden muss. Ein Uebelstand, der durch den Vortheil gleichsam in einer Dunkelkammer zu operiren nicht aufgewogen wird. Es ist ja oftmals bequem, die Orientirung des Krystalls fortwährend beobachten zu können.

Fig. 40.

In dieser Beziehung bietet das von Brezina[1]) beschriebene Instrument (Fig. 40), einige Vortheile, welche sich noch dadurch vergrössern, dass man dasselbe Instrument ohne Kalkspathplatte $c$ als ein sogenanntes einfaches Polarisationsinstrument verwenden kann (siehe später).

Die Einrichtung des Instrumentes ist aus der Figur ersichtlich, wenn man sich gegenwärtig hält, dass $c$ die Kalkspathplatte, $ef$ der Limbus, $lm$ der Krystallträger ist, welcher letztere bei $o$ auf einen Stift aufgesetzt wird, um eine fixe Stellung gegen den Limbus zu bewahren.

Statt der senkrecht zur optischen Axe geschnittenen Kalkspathplatte $c$ kann man auch Platten mit anderen Interferenzbildern benützen. So wendet Brezina eine Combination zweier nahe senkrecht gegen die optische Axe geschnittenen Kalkspathplatten an, die im Instrument so befestigt werden, dass die Axen gekreuzt sind. Ueberdiess müssen die optischen Axen beider, und auch der Polarisationsrichtung des oberen Nicols in eine Ebene fallen.

Das hierdurch gewonnene Interferenzbild (Fig. 41) zeigt sich sehr empfindlich, indem bei geringer Drehung der zu untersuchenden Platte

[1]) Vergl. Brezina. Pogg. Ann. vol. 128, pag. 446.

aus der Hauptschwingungsrichtung der Mittelbalken *bc* seine Stellung ändert (Fig. 42). Eine solche Verschiebung des Balkens *bc* gegen seine Verlängerung *ad* ist nun viel leichter und sicherer als blosse Variationen der Intensität zu messen.

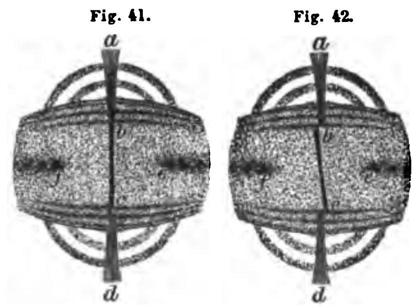


Fig. 41. Fig. 42.

§. 82. **Stauroskopische Beobachtungen.** Durch die Angaben des Stauroskops kann die Orientirung der Vibrationsrichtung gegen die Kanten und mittelst dieses Winkels (201) auch die relative Lage gegen die Elasticitätsaxen gefunden werden. Den wichtigsten Vortheil bietet jedoch das Stauroskop bei Untersuchung der Krystalle klinischer Systeme, welche optisch unbestimmt sind. Wie man aus den Resultaten des §. 76 ersieht, werden solche Krystalle schiefwinkelige Elasticitätsaxen von constanter Lage besitzen; allein die Vibrationen des Lichtes werden sich auch auf drei sogenannte Hauptschwingungsaxen beziehen lassen, welche jedoch gegen die Elasticitätsaxen mit den Wellenlängen variabel geneigt sind.

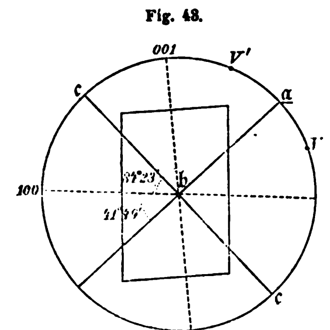


Fig. 43.

Das Stauroskop ermittelt die Lage dieser Hauptschwingungsaxen. Bei Krystallen des **monoklinischen** Systems genügt eine Platte, welche (vergl. Fig. 43) parallel der Symmetrieebene aus dem Krystalle geschnitten ist. Da nach §. 76 die Hauptschwingungsaxen in die Symmetrieebene entfallen müssen, zeigt die Beobachtung in diesem Falle dieselbe direct und gibt deren Neigung gegen eine beliebige Kante in der Zone an. Man pflegt meist die Neigungen zu jener Kante zu bezeichnen, welche durch die Combination der Flächen (010) (001) oder (100) (010) in der Symmetrieebene gebildet wird.

Die Lage dieser Hauptschwingungsaxen ist aber mit der Farbe des einfallenden Lichtes variabel, und so stimmen die Beobachtungen mit der Theorie überein, denn wie die Formel 191 angibt, ist der Winkel $\mathfrak{S}$ zwischen Schwingungs- und Elasticitätsaxe eine Function von $\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)$, also analog dem bekannten Gesetze der Dispersion eine Function der Wellenlänge.

Bildet man daher wie bei dem letzerwähnten Falle diese Differenzen für verschiedene Wellenlängen $\lambda$, so werden sich verhalten die Differenzen der Tangente

$$\text{tang}\,\mathfrak{S}_\rho - \text{tang}\,\mathfrak{S}_\gamma : \text{tang}\,\mathfrak{S}_\gamma - \text{tang}\,\mathfrak{S}_{\beta\lambda} = \left(\frac{1}{\lambda_\rho^2} - \frac{1}{\lambda_\gamma^2}\right) : \frac{1}{\lambda_\gamma^2} - \frac{1}{\lambda_\beta^2} \qquad (202)$$

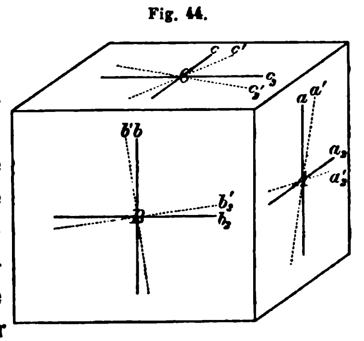
wie die Differenzen der Wellenlänge.

Bei dem triklinischen Systeme ist im Gegensatze zum monoklinischen Systeme die Lage der drei Elasticitätsaxen im Raume vollkommen unbestimmt. Wäre es auch für dieses System vollkommen gestattet. alle Verhältnisse von den schiefwinkeligen Elasticitätsaxen auf die drei Hauptschwingungsrichtungen zu übertragen und diese letztgenannten in den Entwicklungen der §§. 75 — 78 statt der schiefwinkeligen Elasticitätsaxen zu substituiren, so würden auch hier für den Winkel $\mathfrak{f}$ der Vibrationsrichtung zu den Kanten Gleichungen analog 139, 140, 200, 201 gelten, wodurch diese Winkel (pag. 216) als eine Function $F$ von $[\mathfrak{abc}\ (X_k Y_k Z_k : X_s Y_s Z_s)]$ dargestellt werden. Sind diese Grössen bekannt, so lässt sich $\mathfrak{f}$ wohl hieraus bestimmen; doch da die Function $F$ nicht linear ist, so wird der von Grailich[1]) angegebene Weg, aus mehreren Beobachtungen des Winkels $\mathfrak{f}$ die unbekannten Grössen ($\mathfrak{abc}$ $X_k X_s$, $X_k Y_s$ . . . ) direct zu bestimmen, kaum durchführbar.

Die indirecte Methode für die optische Untersuchung triklinischer Krystalle besteht meist darin, durch zahlreiche Schnitte die Lage der scheinbar optischen Axen zu ermitteln. Ich halte jedoch auch eine Combination stauroskopischer Platten für genügend, die Lage der Hauptschwingungsrichtungen zu ermitteln.

Schneidet man nämlich aus einem triklinischen Krystalle einen Würfel oder hiermit gleichbedeutend drei zu einander senkrechte Platten, so werden im allgemeinen die Vibrationsrichtungen beim Durchgang des Strahles parallel den drei Dimensionen gegen die Kanten (Würfelseiten) nicht parallel, sondern geneigt $a'a'_2$, $b'b'_2$, $c'c'_2$ sein. (Fig. 44). Wären hingegen die Würfelseiten je zwei Schwingungsrichtungen parallel (wie im prismatischen Systeme die Combinationen 100, 010, 001 mit den Elasticitätsaxen parallel ist), so werden die Vibrationsrichtungen $aa_2$, $bb_2$, $cc_2$ der Würfelkanten parallel.

Fig. 44.

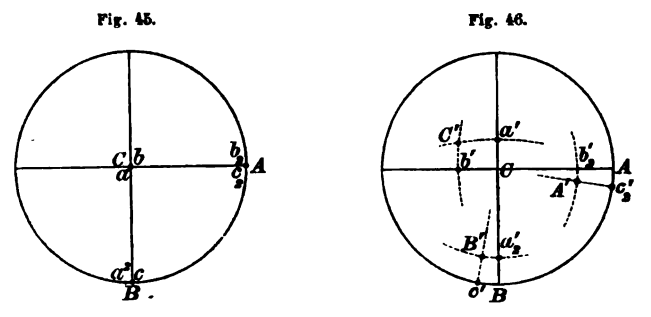



Da die Oberflächen und Kanten dieser Platten krystallographisch orientirt sind, so wird es auch möglich sein, in die krystallographische Projection des Krystalls weiterhin einzutragen: 1) die Normale der

[1]) Grailich. Preisschrift. Wien 1857, pag. 38.

Platten, 2) die zur ersteren senkrechte Zone, in welche die Schwingungsaxen fallen, 3) in dieser Zone die Normalpunkte der Schwingungsaxen.

Führt man diess zugleich so aus, dass durch den Würfel ein positiver Quadrant gebildet wird, so würde die Projection (Fig. 45) die Verhältnisse im prismatischen, die Fig. 46 die Verhältnisse des triklinischen Systems darstellen. Sind *A B*, *C* die Würfel- oder Plattenflächen, so coincidiren mit deren Normalpunkten bei senkrechter Incidenz auch die Normalen der drei Wellenflächen, und es wird *aa*, *bb*, *cc*, die Lage der Vibrationsrichtung. Aus dieser Projection ersieht man, dass für den Fall, als die Plattenoberflächen parallel den Hauptschwingungsrichtungen geschnitten sind, die Punkte *bc*, *ac*, *ab* zusammenfallen müssen. Letzteres




ist in Fig. 46 nicht der Fall, man kann jedoch als erste Annäherung sagen: *a'a'*, *b'b'*, *c'c'*, entstehen durch Projection der Hauptschwingungsaxen auf die Zonen *AB*, *AC*, *BC*, und man wird in Folge dessen die in dem Durchschnitte der Zonen *Aa*, *Bb*, die Hauptschwingungsaxe *C'*, in dem Durchschnitte der Zone *Ac*, *Ca* die Axe *B'*, in dem Durchschnitt von *Bc*, *Cb* die Hauptschwingungsaxe *A'* aufsuchen müssen.

Da wie oben erwähnt die Punkte *ABC*, *abc* in der Projection gegen die übrigen Krystallflächen orientirt sind, so wird eine leichte Rechnung die Lage der Punkte *A'B'C'* gegen die Krystallaxen angeben. Sind diese bekannt, so wird man wieder einen Würfel oder drei neue Platten schneiden müssen, deren Oberflächen dann parallel den Zonen *A'B'*, *A'C'*, *B'C'* sein müssen. Sind die Punkte *A'B'C'* wirklich die Normalpunkte der Hauptschwingungsaxen, so werden diese neuen Platten eine Projection analog 45 liefern. Sollten noch geringe Abweichungen vorhanden sein, so würde diess Verfahren wiederholt werden müssen. Es ist jedoch immer möglich, durch successives Darstellen von je dreien senkrecht gegen einander orientirten Platten mittelst des Stauroskops die Lagen der drei Hauptschwingungsaxen [1]) des triklinischen Systems zu finden. Sind diese

[1]) Ueber die relative Grösse zweier in einer Platte liegenden Hauptschwingungsaxen. Vergleiche später Kapitel XVI.

bekannt, so kann behufs der Controle, wenn überdiess $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, bestimmt würde, mittelst der früheren Gleichung der Winkel der Vibrationsrichtung zu beliebigen Kanten berechnet werden.

§. 83. **Circular-polarisirende Platten.** Die vorerwähnten Thatsachen sind eine Folge der Zerlegung der einfallenden Phase in zwei zu einander senkrecht polarisirten Bewegungen und jede Abweichung von den bekannten Erscheinungen deutet auch auf Aenderung der Art der Polarisation in der Platte selbst.

So erzeugen nun im Stauroskop die Platten mehrerer einaxiger Minerale, wenn sie senkrecht zur optischen Axe geschnitten sind, und wenn weisses Licht einfällt, ein gefärbtes Bild, und nur wenn homogenes farbiges Licht einfällt, ist es möglich eine Dunkelstellung des Analyseur zu bewerkstelligen. Man bemerkt jedoch, dass die Polarisationsebene den Analyseur für diese Dunkelstellung zu jener des Polariseurs nicht mehr rechtwinkelig [1], sondern um $90 \pm \Delta$ geneigt ist, dass ferner der Winkel $\Delta$ mit der Farbe des einfallenden Lichtes variirt und zwar von roth zu violett zunimmt. Diese Ablenkung $\Delta$ wächst weiters proportional der Dicke der Krystallplatte und ist für einzelne Medien in dem Sinne von links nach rechts [2], für andere von rechts nach links zu zählen, wenn man die ursprüngliche Dunkelstellung beider Nicols ohne eingeschaltete Krystallplatte mit Null bezeichnet.

Neben zahlreicheren organischen flüssigen Verbindungen sind unter den Mineralien namentlich Quarz und Zinnober, welche diese Circularpolarisation an senkrecht zur optischen Axe geschnittenen Platten zeigen. Herschel fand [3], dass der Sinn der Drehung der Circularpolarisation mit der krystallographischen Symmetrie der Quarze zusammenhängt. Die an Quarz vorkommenden Trapezoëder unterstehen nämlich dem krystallographischen Symbol $r\left(\frac{\varkappa}{2}\right)(pqr)$ oder $l\left(\frac{\varkappa}{2}\right)(pqr)$ (vide meine Krystallographie, Physik. Min. vol. I pag. 146—147), und je nach dem am Krystalle die rechte oder linke Hemiedrie ausgebildet erscheint, ist auch der Sinn der Drehung nach rechts oder links. Nach den Beobachtungen von Brewster [4] besteht analog hiermit der kry-

---

[1] Zu bedenken ist, dass Platten, welche senkrecht zur optischen Axe geschnitten sind, bei diesen einaxigen Medien parallel jenem Hauptschnitte sind, in welchen die beiden gleichen Elasticitätsaxen entfallen. Der Hauptschnitt wird desshalb ein Kreisschnitt, und die Lage der Schwingungsrichtungen in Folge dessen nur mehr von der Polarisationsrichtung des einfallenden Lichtes abhängig

[2] Der Sinn der Drehung wird bestimmt, wenn man dem aus der Platte austretenden Strahle entgegensieht, wo dann eine Drehung nach rechts im Sinne des Uhrzeigers ist.

[3] Herschel hat zuerst gefunden, dass die von Biot entdeckte rechte und linke Drehung von der krystallographischen Symmetrie abhängt. Mém. Cambridge Soc. vol. I. Edinb. Phil. Journ. vol. IV. 371. VI, 379.

[4] Brewster. Edinb. Philos. Transact. vol. IX, pag. 139.

stallographisch symmetrische Amethyst aus einer Combination von rechts und links drehendem Quarz, was auch die Farben des Gesichtsfeldes andeuten.

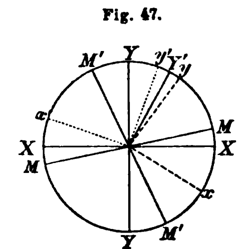


Fig. 47.

Alle diese Erscheinungen stehen mit der im §. 47 angedeuteten Circularpolarisation im vollkommensten Einklang. Die Drehung der Polarisationsebene durch einfach brechende Medien erklärt sich nämlich, durch die Möglichkeit, diese Circularvibration mittelst der Interferenz aus zwei zu einander senkrechten Vibrationen, deren eine um $\frac{1}{4}\lambda$ verzögert ist, abzuleiten. Ueberdiess müssen beide Componenten $x$ und $y$ einen Winkel von $45^0$ zu der Ebene vom Einfallsloth zu dem Ort des vibrirenden Moleküls $M$ (Fig. 47) einschliessen. (Vergl. die Ableitung der analogen Gleichungen in Satz 87a). Nehmen wir nun eine solche Dicke der circularpolarisirenden Schichte an, dass in der Zeit, wo das Licht diese durchläuft, das Theilchen einen aliquoten Theil der kreisförmigen Wellenlänge nach $M$ zurücklegt, so werden hierfür die Componenten $y = \sin \frac{2\pi}{\lambda}\, vt$; $x = \sin \frac{2\pi}{\lambda}\left(vt - \frac{\lambda}{4}\right)$ gelten.

Um somit Dunkelstellung zu erzeugen, wird der Analyseur aus der Lage $Y$ nach $y$, der Polariseur von $X$ nach $x$ gedreht werden müssen, welchen Winkel wir als Drehungswinkel anführen. Da die Lage der Punkte $M$ wie eben erwähnt von dem Verhältniss der Dicke zur Geschwindigkeit des Lichtes abhängt, so wird man den Bogen $s_c$ (circulare Amplitude) bezeichnen können mit

$$s_c = \frac{D}{v} = D\mu = D\left(\mathfrak{R}^2 + \frac{\mathfrak{D}^2}{\lambda^2}\right) \tag{203}$$

Man sieht hieraus, dass der Bogen $s_c$, also auch der Drehungswinkel d. i. ($s_c$—$45^0$) proportional ist der Dicke der durchlaufenen Schichte und mit dem reciproken Verhältniss der Wellenlänge wachsend. Das analoge Verhältniss der Drehungswinkel zum Quadrat der Wellenlänge, wie der Dispersion der Hauptschnitte und Brechungsexponenten wird durch zahlreiche Beobachtungen von Stefan [1]) begründet.

Geht man zu den doppelbrechenden Stoffen über, so ist zu bedenken, dass da die Geschwindigkeit der beiden Strahlen ungleich und die Richtung der Vibration verschieden sein wird, dass die eine Vibration bereits in $M'$ während die zweite erst bis $M$ vorgeschritten ist. Analog

[1]) Stefan. Sitzungsber. der Wiener Academie 1865. L. (II.) 88.

dem obigen Vorgang wird man beide Phasen in je zwei Amplituden zerlegen müssen, deren eine eine Beschleunigung um $\frac{\lambda}{8}$; die andere hingegen eine Verzögerung von $\frac{\lambda}{8}$ erhalten hat.

Da beide Phasen übereinstimmen, so liefert ihre Interferenz nach bekannten Gesetzen einen geradlinig polarisirten Strahl $Y'$, dessen Winkel $Y'Y = \frac{Yy + Yy'}{2}$ ist. Aus der Fig. 47 erhellt unmittelbar, dass $Y'$ nach rechts oder links fällt, je nach den $YM \gtrless YM'$ oder mit anderen Worten aus der Interferenz der beiden Strahlen wird ein rechts oder links drehender Strahl entstehen, je nach dem die rechts oder die links drehende Componente grössere Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzt. Auch für diesen Drehungswinkel doppelbrechender Medien gilt das oben erwähnte Gesetz der Abhängigkeit von $\lambda^2$, und für Quarz von 1 MM. Dicke fand Stefan[1]) folgende Drehungswinkel für die Fraunhofer'schen Linien:

| *B* | *C* | *D* | *E* | *F* | *G* | *H* | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15°55 | 17°22 | 21°67 | 27°46 | 32°69 | 42°37 | 50°98 | (203 a) |

Dass in der Richtung der Axe des Quarzes sich wirklich zwei circularpolarisirte Strahlen fortpflanzen, hat Fresnel beobachtet Dank der Herstellung eines Doppelprisma aus Quarz Fig. 48, wovon $ABC$ aus rechts drehenden, hingegen $ABD$ und $ACE$ aus links drehenden Modificationen geschnitten ist. Die optische Axe ist hier in allen Prismen der Kante $BC$ parallel.

Fig. 48.

Fresnel[2]) erhielt, wenn senkrecht auf $BD$ ein Lichtstrahl auffiel, beim Austritt aus $EC$ zwei getrennte Strahlen, welche, wie die Untersuchung mit dem Parallelepiped (Fig. 22) ergab, entgegengesetzt circularpolarisirt waren. Das Auftreten zweier Strahlen zeigt überdiess, dass die Geschwindigkeit der beiden Strahlenbündel eine verschiedene ist, entsprechend der oben gesagten. Zu demselben Resultate gelangte auch Stefan (l. c.) durch die Methode der Interferenzen.

§. 84. Ungewöhnliche Richtungen der Strahlen. In den vorhergehenden Paragraphen wurde die Richtung der Polarisationsebene von jenen Strahlen bestimmt, welche beim Durchgang durch

[1]) Stefan Sitzungsber. der Wiener Academie 1865. L. (II.) 383.
[2]) Fresnel. Mém. de l'Institut 1827. VII. 45. Pogg. Ann. vol. 23.

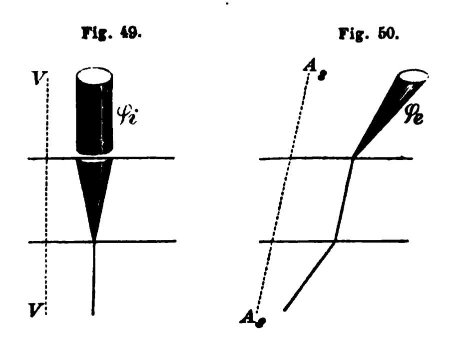
planplane doppelbrechende Platten entstehen. Würde man mit einem einfachen Strahlenbündel operiren, so würden beim Durchgang durch die Platten nur zwei einfache von einander getrennte Strahlen auftreten.

Um die Richtung des gebrochenen Strahles zu finden, sind die Formeln des §. 71 anzuwenden. Wenn bekannt sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, i$, sowie die Cosinus der Winkel $ABC$ der einfallend fallenden Wellennormale zu den Elasticitätsaxen, sowie $HKL$ die Cosinus der Winkel, des Einfallslothes zu den Elasticitätsaxen, so müssen aus diesen Grössen successive die Brechungswinkel $r_1 r_2$ der Wellennormale, welche letzteie in der Einfallsebene liegen, sowie hieraus die Winkel der gebrochenen Wellennormale zu den Elasticitätsaxen, schliesslich die Winkel des gebrochenen Strahles zu den Elasticitätsaxen, sowie deren Brechungswinkel $'r_s\ ''r_s$ berechnet werden. Zur Auswerthung von $r_1\ r_2$ aus den Gleichungen 158 muss ein angenähertes Verfahren angewendet werden, indem vorerst (weil $\mathfrak{r}_1\ \mathfrak{r}_2$ Functionen von den anfangs unbekannten $\psi' \psi''$ sind)

$$(204) \cos(\psi_1' - \psi_1'') = 1 \qquad \cos(\psi_2^1 + \psi_2'') = 0 \text{ oder } \mathfrak{r}_1 = \mathfrak{a} \qquad \mathfrak{r}_2 = \frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{c}}{2}$$

gesetzt werden muss. Hieraus folgt als erste Annäherung ein Werth von $r_1\ r_2$, mittelst dessen dann die Winkel $\psi_1\ \psi_2$ genau zu bestimmen und hierdurch wieder besser übereinstimmende Werthe von $r_1 r_2$ erhalten werden können. Ist so die Lage der gebrochenen Wellennormale in der Einfallsebene bestimmt, so werden sich mit Anwendung des Sätze des §. 71 successive die übrigen Winkel ableiten lassen.

Für eine beliebige Orientirung der Platte gegen die optischen Axen werden wir immer zwei bestimmte Werthe der Brechungswinkel der Strahlen $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$ erhalten, und nur zwei Ausnahmsfälle, wo die Richtung des gebrochenen Strahles vieldeutig wird, sind zu betrachten. Es sind diess die in §. 70 besprochene innere und äussere conische Refraction. Zur Beobachtung der inneren conischen Refraction $\varphi_i$ ist eine Platte senkrecht zu einer wahren optischen Axe $(VV)$ nothwendig, auf welche ein Lichtstrahl senkrecht auffällt. Fig. 49. Derselbe theilt sich der Theorie entsprechend in der Platte in einen Kegel und tritt als ein ringförmiger Strahlenbüschel aus. Zur Beobachtung der äusseren conischen Refraction $\varphi_e$ genügt jede Platte, welche eine optische Axe für Strahlen $A_s A_s$ (Fig. 50) einschliesst. Lässt man parallel derselben einen Strahl



durchgehen, so theilt sich derselbe bei seinem Austritt in einen Strahlenkegel. Lloyd fand die Oeffnung der Kegel der inneren conischen Refraction für Arragonit zu $\varphi_i = 1^0 55'$, den der äusseren zu $\varphi_o = 3^0 7'$; Zahlen, welche mit dem angegebenen Gesetze 157 vollkommen stimmen.

Um den ersteren Fall $\varphi_i$ zu beobachten, kann man die Platte in eine Fassung bringen, analog der dichroskopischen Lupe, oder man kann, wie Zech[1]) angibt, auch diese Ringe im Mikroskop wahrnehmen, wenn man unter die Platte ein Staniolblättchen bringt, welches das von oben einfallende Licht wieder normal durch die Platte reflectirt.

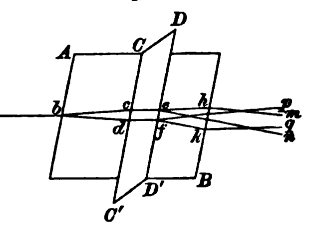
Ausser dieser durch die Gestalt der Wellenfläche hervorgerufenen anormalen Brechung sind auch andererseits Fälle von überzähligen Strahlen beobachtet worden, welche nur in einer ungewöhnlichen morphologischen Structur der Krystallplatte ihren Grund hatten.

Das Mineral, welches zu solchen Abnormitäten am häufigsten Anlass gibt, ist Kalkspath, und eine der Erscheinungen, welche ziemlich viele Kalkspath-Rhomboeder darbieten, ist die Zerlegung des einfallenden Strahles in vier, sechs oder mehr Strahlen.

Brewster[2]) führte ganz richtig die Thatsache auf den Einfluss dünner den Krystall durchziehender Zwillingslamellen zurück. Da nämlich die Orientirung der Zwillingslamelle gegen die optische Hauptaxe eine andere ist, als die der übrigen Theile der Platte, so werden auch dem einfallenden Strahle in beiden Fällen andere Polarisationsrichtungen aufgezwungen.

Jedes der (Fig. 51) zwei Bündel *bc* und *bd* von dem beim Durchgang durch *AC* zerlegten Strahle wird bei seinem Eintritt in die Zwillingsschichte *C D* nochmals doppelt gebrochen. Ist die Dicke dieser Schichte etwas grösser, so trennen sich die vier Bündel, sonst hingegen fallen je zwei in der Richtung *ce*, *df* zusammen, interferiren und liefern hierdurch nur zwei gefärbte Bilder. Jedes der Bündel *ce*, *df* zerlegt sich hingegen in *DB* wieder in zwei Strahlen, welche in Folge der Farbe der Strahlen *ce*, *df*, ebenfalls und zwar complementär gefärbt erscheinen.

Fig. 51.




§. 85. Ringförmige Brechung. Beugung. Ausser dem eben erwähnten Phänomen hat Brewster[2]) noch auf die Erscheinung von Lichtringen hingewiesen, welche in einzelnen Varietäten des Kalk-

[1]) Zech. Pogg. Ann. vol. 104, pag. 188.
[2]) Brewster. Edinburgh Transactions vol. IX, 317. Philos. Transact. 1815, pag. 270.
[2]) Brewster. Report of British Association. 1844. 9.

spathes dann gesehen werden, wenn man durch die Rhomboederflächen auf eine helle Lichtquelle hinsieht.

Man beobachtet nämlich, dass statt der beiden Strahlenbündel, Lichtringe, Diahelien auftreten, welche durch den Ort der normalen Bilder gehen. Ueberdiess treten noch secundäre Lichtringe Parahelien auf, welche lichtschwächer sind und nicht durch den Ort der normalgebrochenen Strahlen gehen.

Je nach der Lage des einfallenden Rhomboeders zu dem einfallenden Strahle variirt die Form der Erscheinung. Bei einer Lage des gebrochenen Strahles, dass derselbe parallel der Rhomboederkante ist, verschwinden die Parahelien, bei anderen Zwischenlagen ziehen sich wieder die Ringe in langgestreckten Ellipsen bis Linien zusammen, so dass man selbst statt der Parahelien das Bild der Lichtquelle sieht.

Diese Erscheinung ward von Brewster, so wie in jüngster Zeit von Plücker[1]) durch die Annahme von feinen cylindrischen Canälen erklärt, welche parallel einer Kante des Rhomboeders angeordnet sind und welche durch Brechung die Diahelien, durch innere Reflexion hingegen die Parahelien erzeugen. Hiermit stimmen auch die Polarisationsrichtungen der vier Bilder. Die Diahelien, welche durch den Normalort der gebrochenen Strahlen gehen, sind wie diese polarisirt; man wird somit Vibrationen parallel und senkrecht zur Ebene der optischen Axe, welche im Hauptschnitt des Rhomboeders liegt, oder die Strahlen $\varepsilon$ und $\omega$ unterscheiden müssen.

Lässt man z. B. parallel den Vibrationen von $\omega$ polarisirtes Licht einfallen, so verschwinden zwei Bilder und zwar die Diahelie $\varepsilon$ und eine Parahelie, welche parallel $\omega$ polarisirt war. Es bilden somit die einfallenden Strahlen, wenn sie parallel $\omega$ polarisirt, die Diahelie $\omega$, und die Parahelie $\varepsilon'$, hingegen wenn sie parallel $\varepsilon$ polarisirt sind, die Diahelie $\varepsilon$, und die Parahelie $\omega'$. Dass die Bilder der ordentlichen Diahelie und ausserordentlichen Parahelie entgegengesetzt polarisirt sind, zeigt die Betrachtung der austretenden Strahlen mittelst des Nicols.

Diese Verhältnisse stimmen, wie Plücker (l. c.) bemerkt, sowohl mit den Annahmen von parallel gelagerten Canälen, welche gleichzeitig brechen und reflectiren und auch mit der Gestalt der Wellenfläche.

Da diese feinen Canäle aber auch als ein beugendes Gitter in einem doppeltbrechenden Medium betrachtet werden können, so hat Ditscheiner[2]) die Formel 61 — 63 zur Erklärung dieses Phänomens benützt.

---

[1]) Plücker. Verhandlungen der preussischen Rheinlande. 1865. pag. 10, 100.
[2]) Ditscheiner. Sitzungsber. der Wiener Acad. 1866. LIV. pag. 525.

Bezeichnet man nämlich wie bekannt die Cosinusse der directen Wellennormale mit $A\ B\ C$, die der gebeugten mit $A_B\ B_B\ C_B$, so ist als Bedingung für die Maxima oder Minima die Intensität laut (61)

$$\frac{A}{v} = \frac{A_B}{v_B} \qquad \frac{B}{v} = \frac{B_B}{v_B} \tag{205}$$

Betrachtet man nur ein einfach brechendes Medium, wo also $v = v_B$ ist, und setzt

$$B' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

so erhält man

$$(x^2 + z^2)\, B^2 + y^2\, (1 - B^2) = 0$$

die Gleichung eine Kegelfläche, wie bereits pag. 88 angedeutet ward.

Wäre hingegen das beugende Gitter in einem doppelbrechenden Medium vorhanden, so müssten statt $v$ und $v_B$ die allgemeinen Ausdrücke 158 zu substituiren sein. Hierdurch erhält man statt (204)

$$\frac{A}{\sqrt{\left[\frac{a^2+c^2}{2} + \frac{a^2-c^2}{2}\cos(\psi \pm \psi')\right]}} = \frac{A_B}{\sqrt{\left[\frac{a^2+c^2}{2} + \frac{a^2-c^2}{2}\cos(\psi_B \pm \varphi'_B)\right]}} \tag{205 a}$$

$$\frac{B}{\sqrt{\left[\frac{a^2+c}{2} + \frac{a^2-c^2}{2}\cos(\psi \pm \psi')\right]}} = \frac{B_B}{\sqrt{\left[\frac{a^2+c^2}{2} + \frac{a^2-c^2}{2}\cos(\psi_B \pm \psi'_B)\right]}}$$

$$A_B^2 + B_B^2 + C_B^2 = 1.$$

Man ersieht hieraus, dass 16 Combinationen möglich sind, wovon, wie das Zeichen der Cosinusse angibt, die Hälfte durch Brechung, die andere Hälfte hingegen durch Reflex entstanden ist. Berücksichtiget man einaxige Substanzen, so reduciren sich diese Werthe durch Einführung des constanten $\omega$ und man erhält

$$\begin{aligned} B\omega &= B_B\omega = B_B\varepsilon_B \\ B\varepsilon &= B_B\omega = B_B\varepsilon_B. \end{aligned} \tag{206}$$

Aus diesem Werthe der Cosinusse der Wellennormale lassen sich analog dem obigen Falle, Kegelflächen für die Wellennormale ableiten, denen dann auch Kegelflächen der Strahlen entsprechen werden.

Wie man leicht erkennt, entsprechen dem einfallenden Strahle $\omega$ der Diahelie $\omega_B$ die Parahelie $\varepsilon_B^1$; dem einfallenden Strahle $\varepsilon$, die Diahelie $\varepsilon_B$ und die Parahelie $\omega_B^1$.

Man erhält hierdurch also durch die Anwendung der Principien der Beugung ebenfalls eine genügende Erklärung des Phänomens. Die Existenz der feinen Canäle im Kalkspath ward durch die directen Beobachtungen Plückers (l. c.) bewiesen und deren Grösse zu 0·0006 MM. bestimmt.

# XIV. Kapitel.

## Bestimmung der Brechungsexponenten.

§. 86. Soll der wahre Einfluss der doppelbrechenden Substanz auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes bestimmt werden, so genügen nicht die qualitativen Untersuchungen des vorhergehenden Kapitels. Letztere geben uns nur Aufschluss über die Lage der sogenannten drei Hauptschwingungsrichtungen für alle Fälle und ermöglichen hierdurch auch die denselben entsprechenden drei Hauptwerthe der Brechungsexponenten aufzusuchen. Wie aus dem früheren Kapitel erhellt, werden die absoluten Werthe von $\omega$, $\varepsilon$ im pyramidalen und hexagonalen, von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ im prismatischen, von $\alpha_s$, $\beta_s$, $\gamma_s$ im monoklinischen und triklinischen Krystallsysteme zur genauen qualitativen Kenntniss der Doppelbrechung nöthig sein.

Die Werthe der Brechungsexponenten lassen sich jedoch durch drei Methoden, durch directe Brechung, oder auch durch Reflexion und Interferenz bestimmen; die erstere Methode setzt die Herstellung von Prismen, die letztere von Platten aus durchsichtigem Material voraus; die Methode der Reflexion vermag selbst die natürlichen Flächen eines wenig durchsichtigen Materials zu benützen.

Schnitt der Prismen. Geht man zuerst auf die Erörterung der wichtigsten und am häufigsten angewendeten Methode, jener der directen Messung der Brechungsexponenten durch prismatische Brechung über, so mögen vorher einige Worte den Schliff passender Prismen erklären. Da bereits im 8. Kapitel, §. 43 auseinandergesetzt ward, dass die Orientirung der brechenden Kante und der Halbirungslinie des brechenden Winkels A gegen die Krystallgestalt von Einfluss ist, so ist auch bei Herstellung der Prismen namentlich auf diese beiden Bestimmungsstücke das Augenmerk zu richten. Ist genügendes Material zur Herstellung mehrerer Prismen vorhanden, so werden, wie leicht erhellt, parallel zu

den Elasticitätsaxen oder im monoklinischen Systeme parallel zu den drei Hauptschwingungsrichtungen (§. 76) die brechenden Kanten der zu schneidenden Prismen laufen müsse. Man hat somit im pyramidalen und hexagonalen Systeme zwei Prismen zu schneiden, so dass die brechenden Kanten des ersten parallel und die des zweiten senkrecht gegen die krystallographische Hauptaxe sind. Im prismatischen Systeme hingegen drei Prismen, deren brechende Kanten wechselseitig parallel den drei Krystall- und Elasticitätsaxen $X$, $Y$, $Z$ sind. Im monoklinischen und triklinischen Systeme sind vorerst mittelst des Stauroskopes die Lagen der Hauptschwingungsaxen $X_s$, $Y_s$, $Z_s$ aufzusuchen und zu diesen parallel die Kanten der drei nöthigen Prismen herzustellen.

Die Schwingungen des zu berücksichtigenden Lichtstrahles sind parallel der brechenden Kante (wovon man sich mittelst des am Beobachtungsfernrohre angebrachten Nicols überzeugt), und in Folge dessen parallel einer der Hauptschwingungsaxen, und geben direct einen der gesuchten Hauptbrechungsexponenten.

Der zweite Strahlenbündel, welchen das doppelbrechende Prisma hervorruft, ist senkrecht gegen das erste polarisirt und schwingt somit senkrecht gegen die der brechenden Kante parallele Elasticitätsaxe und überdiess im Minimum der Deviation auch parallel der Halbirungslinie des brechenden Winkels. Der Brechungsexponent dieses zweiten Strahles variirt aus eben dem Gesagten zwischen den zwei Hauptbrechungsexponenten jener Elasticitätsaxen, die senkrecht auf der brechenden Kante stehen und gleichzeitig in die Ebene des durchgehenden Strahles fallen. Letztgenannte Ebene wird bestimmt durch die Normalen auf der Ein- und Austrittsfläche des Prisma und durch die auf der brechenden Kante senkrechte Halbirungslinie des brechenden Winkels.

Aus dem oben Gesagten erhellt nun, dass auch der zweite Strahlenbündel den Werth eines Hauptbrechungsexponenten erlangen wird, wenn der Schnitt des Prisma so geführt ist, dass die Halbirungslinie des brechenden Winkels mit einer Hauptschwingungsaxe zusammenfällt, indem in einem solchen Falle parallel zur letztgenannten die Schwingungen des zweiten Strahles vor sich gehen werden.

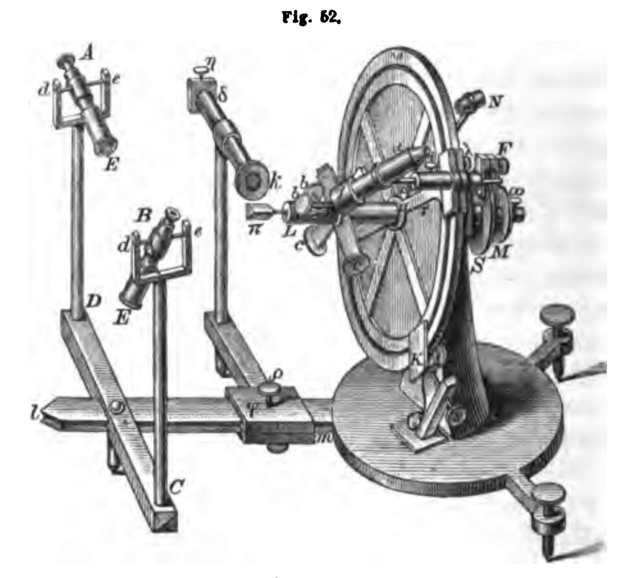
Ist somit wenig Material vorhanden, so wird das Prisma in der Art zu schleifen sein, dass sowohl die brechende Kante als auch die Halbirungslinie mit einer Elasticitätsaxe zusammenfällt, wodurch beide Strahlen die Berechnung von Hauptbrechungsexponenten ermöglichen. Fälle, wo natürliche Flächen ein so günstiges Prisma darstellen, sind die Combinationen zweier zusammengehörenden Prismen oder Domenflächen, z. B. $(hko)$, $(\bar{h}ko)$ oder $(oqr)$ $(o\bar{q}r)$; unter der Voraussetzung, dass der innere Körperwinkel so klein ist, um nicht totale Reflexion

hervorzurufen. Die Grösse der brechenden Winkel hängt, wie leicht ersichtlich, von der brechenden Kraft der Substanz ab, und dürfte für mittlere Brechung $40^0$—$60^0$ ein passender Werth sein. Der Schliff des Prisma erfolgt nach den Regeln des §. 79.

§. 87. Methoden für Refractionsbeobachtungen. Die Ablenkungen der gebrochenen Strahlen können je nach der Grösse des Prisma an einem Spectralapparate mit verticalem oder horizontalem Limbus gemessen werden.

Ist das Prisma wie bei den meisten krystallographischen Untersuchungen der Fall, klein, so geschehen die Beobachtungen am zweckmässigsten an dem bekannten Reflexionsgoniometer (vergl. meine Krystallographie. Phys. Min. vol. I. Fig. 79), welcher mittelst einiger pas-

Fig. 52.

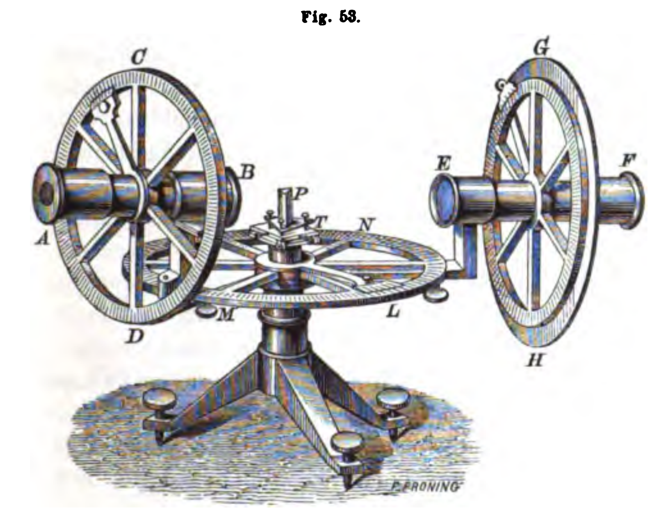



sender Zugaben auch für optische Zwecke genügt. Diese Zugaben (Fig. 52) sind 1. ein sogenanntes Collimatorfernrohr $\delta$k, welches, wenn man die beiden Beobachtungsfernröhre *A*, *B* auf dem Schlitten *lm* verschiebt, auf diesen letztgenannten mit $\varphi\varrho$ aufsetzbar ist. Das Collimatorfernrohr trägt bei $\eta$ eine horizontale Spalte, und dient, um einen parallelen Lichtbündel auf das Prisma $\pi$ zu leiten. 2. Zur Beobachtung des abgelenkten Strahles wird mit dem Limbus ein Beobachtungsfernrohr $\alpha\gamma$ so verbunden, dass bei Drehung des Limbus um seine fixe Axe das Beobachtungsfernrohr sich mit demselben dreht und einen Kreis beschreibt, dessen Centrum in der Mitte der Axe liegen muss. Zur Justirung dieses Beobachtungsfernrohres $\alpha\gamma$, welche wohl vom Mechaniker

vorgenommen und durch eine Marke bezeichnet wird, kann auch folgender Vorgang gewählt werden. Man justirt eine feine Spitze $\varkappa$ mittelst der beiden krystallographischen Fernröhre $A$, $B$, und sieht dann ($\alpha\gamma$ trägt zu diesem Zwecke eine verschiebbare Loupe), ob bei einer Drehung des Fernrohres $\alpha\gamma$ um den Limbus $\varkappa$ immer in Mitte des Gesichtsfeldes bleibt. Um diess zu bezwecken, ist $\alpha\gamma$ mit dem Limbus nur durch einen hohen Cylinder $i$ in Verbindung, in welchem der Arm des Fernrohres parallel der Axe des Limbus vor- und rückwärts geschoben und parallel der Ebene des Limbus selbst gedreht werden kann.

Die Befestigung des Fernrohres mit dem Limbus kann dadurch bewerkstelligt werden, dass auf der Axe ein besonderer Arm $a$ als Träger des Fernrohres angebracht ist, oder mittelst einer den Seitenarm des

Fig. 53.




Fernrohres tragenden Klemme $\lambda$, welche in einer vertieften Rinne des Limbus lauft und mit einer Schraube festgemacht werden kann. Eine Combination beider Methoden (vergl. Fig. 52), wobei die Möglichkeit geboten ist, $\alpha\gamma$ nach Willkür abgesondert vom Limbus zu bewegen oder mit demselben zu verbinden dürfte vorzuziehen sein.

Ist das Prisma grösser, so wird wegen seines Gewichtes und Druckes auf die Axe ein Apparat mit horizontalem Limbus angewendet. An der Axe des getheilten Kreises (Fig. 53) sind für einen solchen Fall zwei bewegliche Arme $L$, $M$, die je ein Fernrohr $AB$, $EF$ tragen, angebracht. Eines dieser Fernröhre dient zur Beleuchtung, das zweite zur Beobachtung, und sie sind in Folge dessen nach Willkür mit dem Limbus durch Schrauben fest zu vereinen. Der Tisch $T$ trägt zur verticalen Einstellung drei Schrauben, zur horizontalen Verschiebung sitzt er auf einem horizontal.

verschiebbaren Schlitten, oder ein der Mitte der Axe entsprechender Punkt, auf welchen die brechende Kante zu stellen ist, ist markirt.

Die Beobachtung mit dem ersten Instrumente (Fig. 52) erfordert, dass das Prisma wie ein gewöhnlicher Krystall centrirt und justirt und mit den beiden Fernröhren $A$, $B$ dessen Winkel bestimmt wird (vergl. meine Krystallographie.) Dann werden diese beiden Fernröhre weggeschoben und das Collimator- und optische Fernrohr $\alpha\gamma$ angeschraubt. Die Richtung des Collimatorfernrohres ist parallel dem Limbus willkürlich, nur müssen die Strahlen durch die Axe gehen. Der Nullpunkt für die Angaben des mit dem Limbus fix verbundenen optischen Fernrohres ist jene Zahl, welche die Coincidenz des Spaltenbildes $\eta$ vom Collimator mit dem horizontalen Faden des Beobachtungsfernrohres angibt. Sei die brechende Kante nach abwärts gerichtet, so wird der gebrochene Strahl nach aufwärts gebrochen werden; man wird somit denselben mit dem Fernrohre $\alpha\gamma$ in einer der Verticalen nahe kommenden Stellung aufsuchen müssen. Der hier abgelesene Winkel weniger dem Werthe des Nullpunktes gibt die Deviation des gebrochenen Strahles. Um weiters die Schwingungsebene des Strahles zu erkennen, ist mit dem Beobachtungsfernrohre ein Nicol verbunden.

Zu bemerken ist, dass diese Methode für das Minimum der Deviation gilt. Letztere ist leicht zu erkennen aus dem Gange des Spectrum, denn ehe das Minimum erreicht ist, wandert das Spectrum bei einer Drehung des Prisma von violett zu roth, ist das Minimum aber überschritten, ändert sich der Sinn des Ganges, und das Spectrum wandert von roth zu violett. Durch einige Drehungen des Prisma (zu diesem Zwecke ist die Axe frei vom Limbus beweglich und auch unabhängig von letzterem mittelst einer rückwärts an dem Fusse des Instrumentes angebrachten Klemme $\omega$ festzustellen) erkennt man leicht die Minimumstelle, und man wird wohl thun, dieselbe für jede Farbe aufzusuchen.

Will man die Minimumstellung weiters controliren, so ist der Incidenzwinkel $i$ an der Eintrittsfläche des Prisma zu bestimmen. Zu diesem Zwecke darf man nur das reflectirte Bild des einfallenden Strahles von dieser Fläche aufsuchen, den betreffenden Winkel $x$ am Limbus ablesen, so ist, wie leicht erhellt, $2i = (180^0 - \text{Nullpunkt} - x)$, wodurch man den gesuchten Incidenzwinkel findet. Da somit $A$, $D$, $i$ durch diese Operationen bekannt werden, lässt sich (vergl. §. 89) daraus der Brechungsexponent ableiten[1]).

Vorstehendes Verfahren dient zur Messung der kleinen Prismen; für grössere Prismen wird der Apparat mit horizontalem Limbus (Fig. 53) gewählt werden müssen. Die optischen Messungen werden auch mit diesem

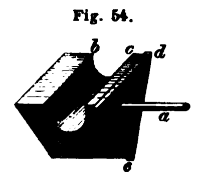
[1]) Dieses Goniometer ermöglicht auch die Bestimmung der Brechungsexponenten von Flüssigkeiten, und zwar in jenem Falle, der sich bisher immer der Beobachtung entzog. Von den

Apparate nach obiger Methode vorgenommen werden, die Messung des Prismenwinkels erfolgt jedoch abhängig von der Bauart des Instrumentes. Sind beide Fernröhre unabhängig von der Axe festzustellen, und der Limbus mit dem Prisma unabhängig von den Fernröhren drehbar, so ist die Messung des Prismenwinkels mit festgestellten Fernröhren durch Drehung des Limbus analog dem gewöhnlichen Reflexionsverfahren vorzunehmen. Wäre hingegen ein Fernrohr mit dem Limbus unveränderlich verbunden und nur das zweite Fernrohr frei beweglich, so dient ersteres als Beleuchtungsfernrohr; das Prisma wird dann mit der Kante gegen dieses Fernrohr aufgestellt, so dass beide Prismenflächen vom einfallenden Strahle gleichzeitig getroffen werden können. Sucht man mit dem zweiten Fernrohre nun die reflectirten Strahlen von den beiden Flächen auf und liest am Limbus die betreffenden Winkel ab, so ist der zwischen beiden Ablesungen liegende Winkel gleich dem doppelten Prismenwinkel.

§. 88. Lichtquellen. Um ausser der Refraction auch die Dispersion des Mediums zu bestimmen, ist die Ablenkung des gebrochenen Strahles für die verschiedenen Wellenlängen zu bestimmen. Zu diesem Zwecke ist die Anwendung von directem Sonnenlichte, welches durch das Prisma zerlegt die bekannten Fraunhofer'schen Linien erkennen lässt, und die Einstellung auf diese letztgenannten das passendste Mittel. (Vergl. Wellenlänge der Fraunhofer'schen Linien und Dispersion, §. 38 und folgende §.) Da die Anwendung des Sonnenlichtes erfordert, dass der einfallende Lichtstrahl eine Richtung parallel dem Collimatorfernrohre ($\eta\gamma$) Fig. 52 hat, andererseits sich der Stand der Sonne continuirlich ändert, so ist eine Combination mehrerer Spiegeln nöthig, welche durch mehrfache Reflexionen dem Strahle die gewünschte Richtung geben. Man lässt nämlich den directen Sonnenstrahl auf einen ersten Spiegel $a$ auffallen, welcher den Strahl zu einem zweiten Spiegel $b$ reflectirt. Der Spiegel $b$ erhält eine solche Lage, dass der von $a$ auf ihn fallende Lichtstrahl parallel der Axe des Collimatorfernrohres $\alpha\gamma$ (Fig. 52) reflectirt

seltenen chemischen Verbindungen stehen meist nur geringe Quantitäten dem Physiker zur Untersuchung zu Gebote, weniger, als die gewöhnlichen Apparate erfordern. Mit obigem Apparate ist es möglich, selbst einige Tropfen nutzbar zu verwenden, wenn ein kleines Hohlprisma, welches für den Apparat nicht zu schwer ist, zur Hand ist. Die gewöhnlichen Hohlprismen sind zu diesem Zwecke unbrauchbar, ich fand zu diesem Zwecke ein Prisma tauglich, welches $\frac{1}{2}$ Zoll gross, und wie die Figur zeigt, bei $bc$ durchbohrt ist. Bei $a$ trägt die Fassung des Prisma eine Axe, um in der Axe des Instrumentes befestigt werden zu können. Für jede specielle Untersuchung werden die Seitenflächen mit feinen Deckgläschen und Gyps verklebt, und bilden dadurch ein Hohlprisma, welches oben offen bleibt und mit der Kante nach abwärts am Goniometer befestigt wird. Nach der Messung werden die Deckplatten weggenommen und das Prisma gereinigt.

Fig. 54.



wird, somit durch dieses Fernrohr geht und das Prisma $\varkappa$ trifft. Diese Methode hat den Vortheil, dass man den Spiegel $b$ in unveränderter Stelle lassen und nur durch Variationen des Spiegels $a$ dem Stande der Sonne folgen kann. Ist die reflectirende Fläche $a$ gross, so wird einige Zeit verfliessen, bevor die Variationen im Sonnenstande so bedeutend werden, dass $b$ kein Licht mehr erhält. Um $a$ dem Laufe der Sonne gemäss zu verschieben, kann man diesen Spiegel an einer der Weltaxe parallelen Axe befestigen und durch ein Uhrwerk in drehender Bewegung erhalten. Letzteres ist das Princip der Heliostaten, deren Anwendung nothwendig ist, wenn man längere Zeit hindurch mit constantem Sonnenlichte operiren will. Eine vollständige Erörterung des Gebrauches der Heliostaten überschreitet die hier nöthigen Grenzen.

Für den Fall, dass zu den Messungen nicht die Anwendung von directem Sonnenlichte möglich ist und zu künstlicher Beleuchtung gegriffen werden muss, lassen sich auch hierfür mehrere zweckmässige Methoden anführen. Durch die Fortschritte der Spectralanalyse (§. 41) ist es jetzt leicht, jede gewünschte lichte Linie im Spectrum zu erzeugen, indem man den betreffenden Stoff entweder im Gasgebläse verbrennt, oder den elektrischen Funken zwischen Theilchen des Stoffes entweder frei oder in geschlossenen, luftleer gemachten (Geissler-schen) Röhren überspringen lässt. In beiden Fällen werden die Theilchen des Stoffes glühend und erregen die ihnen eigenthümlichen Schwingungszustände und die lichten Linien im Spectrum. Um mit möglichst hellen Linien arbeiten zu können, wird man Stoffe wählen, welche nur eine, höchstens zwei bis drei helle Linien geben, indem sonst die Lichtstärke zu gering ist, um die Absorption im Prisma genügend überwinden zu können.

Wendet man den elektrischen Funken an, so dürften die drei Linien des Wasserstoffspectrums in den Geissler'schen Röhren am passendsten sein. Die Farben dieser drei Linien sind ganz passend: roth, gelb, blau, und nach den Bestimmungen von Plücker[1]) deren Wellenlängen

$$\lambda(H_\alpha) = 653{\cdot}3 \qquad \lambda(H_\beta) = 484{\cdot}3 \qquad \lambda(H_\gamma) = 433{\cdot}9 \tag{207}$$

Da jedoch die Lichtstärke dieser drei Linien nicht bedeutend ist, sowie die Erzeugung derselben auch mehrere elektrische Apparate, namentlich einen sogenannten Ruhmkorff'schen Inductionsapparat erfordert, so dürfte in den meisten Fällen eine offene homogene Lichtflamme vorzuziehen sein, in welcher eines der Alkalimetalle zum Glühen gebracht wird. Bereits im §. 41 wurden die specifischen Farben einiger dieser Alkalimetalle angeführt.

[1]) Plücker. Pogg. Ann. 107, pag. 506.

Man ersieht aus derselben, dass man für roth Kalium, Lithium, für gelb Natron, für grün Thallium, für blau Strontium und Indium verwenden kann.

Von diesen ist die bekannte gelbe Natronfärbung am leichtesten und am reinsten zu erhalten und stimmt, wie bekannt, mit der Fraunhofer'schen Linie $D$ überein. Die Intensität von $Ka_\alpha$ und $Sr_\delta$ ist aber gering, so dass sie höchstens mit Anwendung eines Knallgasgebläses genügend lichtstark werden. Es bleiben somit übrig das lichtstarke Lithium, sowie die etwas schwächeren Färbungen durch Thallium und Indium.

Die Wellenlängen der Hauptlinien dieser Stoffe[1] sind in Millionstel des Millimeter

$$\lambda_{Li} = 670 \quad \lambda_{Na} = 589 \quad \lambda_{Th} = 534 \quad \lambda_{In} = 451 \qquad (208)$$

Zur Erzeugung der hellen Linien werden sich am besten die Chlor- oder kohlensauren Verbindungen dieser Stoffe eignen. Die einfachste und zweckmässigste Methode, um die Salzlösung in Contact mit der Flamme zu bringen, ist ein Asbestfaden von der Stärke eines gewöhnlichen Dochtes, welcher über den Rand des mit der concentrirten Lösung gefüllten Fläschchens in die Flamme hineinragt. Die Flamme selbst wird möglichst farblos sein müssen, um die specifische Farbe des Metalls nicht zu schwächen; je nach der nöthigen Lichtstärke wird sich statt des Knallgasgebläses auch gewöhnliches Gas oder eine Weingeistflamme anwenden lassen.

Bevor man noch durch die Spectralanalyse diese Hilfsmittel der künstlichen homogenen Lichtquelle kennen gelernt hatte, verwendete man meist die dunklen Linien im Spectrum, welche durch die Absorption eines vom Lichtstrahle durchlaufenen Mediums hervorgebracht wurden. Hier zeigten sich die von Brewster entdeckten Absorptionslinien im untersalpetrig-sauren Gase ziemlich zweckmässig und wurden mehrfach benützt[2], obgleich die Messung dunkler Linien auf lichtschwachem Hintergrunde Unbequemlichkeiten im Gefolge hat. Seit jedoch A. Weiss[3] fand, dass die relative Lage der Linien durch die Dichte des absorbirenden Mediums beeinflusst wird, dürfte auf die Anwendung dieses Mittels zu verzichten sein.

Für gewöhnliche Fälle, wo geringere Genauigkeit der beobachteten Stelle im Spectrum genügt, wird man das künstliche Licht durch Anbringung farbiger Glastafeln vor der Spalte $\eta$ des Collimator homogen zu machen suchen. Zu diesem Zwecke hat man bereits farbige Glasplatten

---

[1] Vergl. Kirchhoff. Abh. d. Berl. Acad. 1861—1863. Mitscherlich. Pogg. Ann. 121. Huggins. Pogg. Ann. 124. Schrötter. Sitzungsb. d. Wien. Acad. 1866. Müller J. Pogg. Ann. 124.

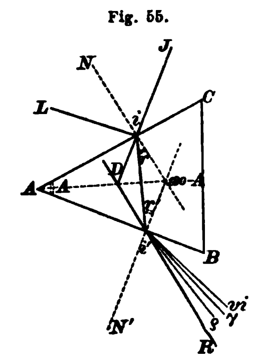
[2] Vergl. deren Bestimmung in Grailich's Preisschrift 1857. Wien.

[3] A. Weiss. Pogg. Ann. 1861

im Vorrathe, deren genaue Farbennuance und Wellenlänge durch Vergleich mit dem Sonnenspectrum genau bestimmt ist.

§. 89. Berechnung der Refractionsbeobachtungen. Aus den gemessenen Werthen (Fig. 55) für den brechenden Winkel A, für die Incidenz $i$ und für die Deviation $D$ berechnet sich der Brechungsexponent nach den in §. 37 entwickelten Formeln. Für das Minimum der Deviation gilt die Formel 69 zwischen $\mu$, $AD$, für jede andere Ablenkung die Formel 68, welche $\mu$ aus $i$, $A$, $D$ ableitet.

Fig. 55.



Durch diese Formeln berechnen sich direct jene Hauptbrechungsexponenten, deren Schwingungen parallel der brechenden Kante vor sich gehen. Es ward früher erwähnt, dass zur Erkennung dieser Schwingungsrichtung am Beobachtungsfernrohre ein Nicol'sches Prisma angebracht ist.

Der zweite ausserordentliche, senkrecht zur Kante und parallel der Halbirungslinie des brechenden Winkels schwingende Strahl variirt zwischen den beiden übrigen Hauptexponenten und hat einen Werth, welcher von der Orientirung der Halbirungslinie gegen die Elasticitätsaxe abhängt. Die hierfür geltenden Functionen wurden zuerst von Stokes[1]) und Senarmont[2]) abgeleitet. Zu bemerken ist, dass diese Ableitungen, sowie die Benützung der Rechnungsformel 68, 69, welche für isotrope Medien abgeleitet wurde, nur dadurch für doppelbrechende Körper möglich ist, dass paralleles Licht einfällt. Hierdurch fällt Strahl und Wellennormale selbst beim Austritte aus den doppelbrechenden Medien wieder zusammen, und es entfällt die Nothwendigkeit, die Lage des Strahles mittelst complicirter Formeln separat abzuleiten.

Durch diese erwähnte Vereinfachung ist es möglich, auch den ausserordentlichen Strahl zur Berechnung von Hauptbrechungsexponenten zu benützen. Im Allgemeinen wird man hierbei drei Fälle zu unterscheiden haben. 1. Die brechende Kante ist parallel einer der Elasticitätsaxen. 2. Die brechende Kante ist senkrecht zu einer Krystallaxe. 3. Die Orientirung des Prisma sei willkürlich.

Für diese Fälle wird man aber immer auf jene Formel zurückgreifen müssen, welche den Werth eines Brechungsexponenten als Function der Lage der Wellennormale angibt, nämlich

---

[1]) Stokes. Jour. mathem. of Cambridge vol. I.
[2]) Senarmont. Nouvelle Annal. d. mathémat. vol. 16.

$$\frac{A_{\mathfrak{r}}^2}{\mathfrak{a}^2-\mathfrak{r}^2}+\frac{B_{\mathfrak{r}}^2}{\mathfrak{b}^2-\mathfrak{r}^2}+\frac{C_{\mathfrak{r}}^2}{\mathfrak{c}^2-\mathfrak{r}^2}=0 \tag{141}$$

1) Ist die brechende Kante parallel einer Elasticitätsaxe eines zweiaxigen Mediums, so wird ein Hauptbrechungsexponent von einem Strahle abgeleitet, dessen Vibrationen parallel der Kante sind. Analog wird auch bei einaxigen Medien der Brechungsexponent $\varepsilon$ bekannt, wenn die Kante parallel der optischen Hauptaxe ist, der zweite Strahl bei einaxigen Medien wird dann immer den Werth $\omega$ haben. Bei zweiaxigen Medien lässt sich der Werth des zweiten Strahles aus 141 ableiten. Sei beispielsweise die Kante parallel der Elasticitätsaxe $\mathfrak{a}$, so wird für die Wellennormale, wie leicht ersichtlich, $A = 0$ und $B + C = 90^0$. Man kann somit 141 umstellen, wenn man $\delta$ und $\varepsilon$ die Hauptbrechungsexponenten nennt, zwischen welchen der ausserordentliche Strahl $\mu_\varepsilon$ variirt, dann den Winkel, welchen die Wellennormale zu der $\delta$ entsprechenden Elasticitätsaxe macht, mit $d$ bezeichnet. Man findet

$$\frac{1}{\mu_\varepsilon^2}=\frac{\sin^2 d}{\delta^2}+\frac{\cos^2 d}{\varepsilon^2} \tag{209}$$

Statt des Winkels der Wellennormale zu der Elasticitätsaxe kann man auch den Winkel $t$ der Halbirungslinie des brechenden Winkels zu der Elasticitätsaxe $\frac{1}{\delta}$ einführen.

Bedenkt man, dass in Figur 55 die Linien $AD$ . . . in einer Ebene mit den beiden Elasticitätsaxen $\delta^{-1}$, $\varepsilon^{-1}$ liegen, zieht man ferner die Elasticitätsaxe $\delta^{-1}$ willkürlich, bringt mit derselben gezogenen Linie die Normale der Eintrittsfläche, sowie die Wellennormale $\frac{1}{\mu_\varepsilon}$ zum Durchschnitt, so erhält man für den Winkel $d$ den Werth

$$d = 180^0 - r - \left[90^0 - \left(t - \frac{\mathrm{A}}{2}\right)\right] \tag{210}$$

Substituirt man diesen Werth in 209, so folgt

$$\frac{1}{\mu_\varepsilon{}^2}=\frac{\cos^2\left(\frac{\mathrm{A}}{2}-r-t\right)}{\delta^2}+\frac{\sin^2\left(\frac{\mathrm{A}}{2}-r-t\right)}{\varepsilon^2} \tag{211}$$

Da sich in dieser Gleichung $r$ durch Formel 68 mittelst des Incidenzwinkels ableiten lässt, ferner für das Minimum der Deviation mittelst der Bedingung $d_r D = 0$ sich aus 211 eine weitere Gleichung bilden lässt, so ist es möglich, die Hauptbrechungsexponenten $\delta$ und $\varepsilon$

als gesonderte Functionen[1] des zweiten, senkrecht zur brechenden Kante schwingenden Strahles $\mu_e$ darzustellen. Die Gleichungen lauten hierfür unter der Voraussetzung, dass $\mu_e$ für das Minimum der Deviation 69 bestimmt ist

$$(212)\quad \begin{aligned} \delta^2 &= \mu_e^2 \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{A}{2} - r\right) + \operatorname{cotg} t}{\operatorname{cotang}\frac{A}{2}\operatorname{tang}\left(\frac{A+D}{2}\right)\operatorname{tang}\left(i - \frac{A+D}{2}\right) + \operatorname{cotg} t} \\ \varepsilon^2 &= \mu_e^2 \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{A}{2} - r\right) - \operatorname{tang} t}{\operatorname{cotang}\frac{A}{2}\operatorname{tang}\left(\frac{A+D}{2}\right)\operatorname{tang}\left(i - \frac{A+D}{2}\right) - \operatorname{tg} t} \end{aligned}$$

2) Geht man zum zweiten Falle über, bei welchem die brechende Kante senkrecht auf einer Elasticitätsaxe steht, so haben hier die Brechungsexponenten im Allgemeinen nur Mittelwerthe.

Jener Strahl $\mu'_o$, welcher parallel der Kante vibrirt, fällt wieder in die Ebene zweier Elasticitätsaxen $\delta$, $\varepsilon$, und ist in diesem Falle $t'$ der Winkel der Kante mit der Elasticitätsaxe $\frac{1}{\delta}$, so gelten zur Ableitung der Hauptbrechungsexponenten ebenfalls die obigen Formeln 209—212, wenn man in dieselben $\mu'_o$ statt $\mu_e$, $t'$ statt $t$ setzt. Der zweite Strahl $\mu'_e$ wird seine Vibrationen nicht in einem Hauptschnitte haben, und nur für den Fall, dass die Halbirungslinie des brechenden Winkels mit einer Elasticitätsaxe zusammenfällt, erhält $\mu'_e$ Werth des betreffenden Hauptbrechungsexponenten.

Es eignen sich daher zu solchen Prismen namentlich die Combinationen der prismatischen Pyramide $(hkl)$, $(\bar{h}\bar{k}l)$.

Ist bei einaxigen Medien die brechende Kante senkrecht zu der Hauptaxe, so hat (vergl. pag. 179) $\mu'_o$ den Werth $\omega$; halbirt weiters die optische Axe den brechenden Winkel, so fällt $\mu'_e$ mit $\varepsilon$ zusammen.

3. Der dritte Fall umfasst alle jene Combinatinnen, in welchen die Schwingungen der beiden Strahlen nicht in dem optischen Hauptschnitte liegen. Die Gleichung 141 lässt sich, wie Lang[2] gezeigt, hiefür in einer Form geben, welche bloss von der Orientirung der Prismenflächen zu den Elasticitätsaxen, dann von den beobachteten Winkeln A, $D$ und dem Incidenzwinkel $i$ und den Werth des Brechungsexponenten $\varrho$ abhängen. Seien nämlich die Winkel der Normale auf die erste Prismenfläche zu den Elasticitätsaxen $X$, $Y$, $Z$ bezeichnet mit

[1] Senarmont l. c. Lang. Sitzungsber. der Wien. Acad. 1858, vol. 33, pag. 577.
[2] Lang. Sitzungsber. der Wien. Acad. 1858, vol. 33, pag. 155.

$H, K, L$, die der zweiten Fläche mit $H'$, $K'$, $L'$, während die Cosinusse der betreffenden Winkel von den Wellennormalen $A_r$, $B_r$, $C_r$ heissen, so besteht zwischen diesen Grössen, da $J$, $R'$ und $N$, $N'$ in einer Zone liegen (vergl. Fig. 55) folgende Relation

$$\begin{aligned} A_r \sin \mathrm{A} &= \cos H \sin (\mathrm{A} - r) - \cos H' \sin r \\ &= \frac{1}{\varrho} (\cos H \sin i' - \cos H' \sin i) \end{aligned} \tag{213}$$

und analog für $B_r$, $C_r$. Diese Gleichungen folgen unmittelbar aus der Formel 26*c* auf pag. 111 meiner Krystallographie (Phys. Min. vol. I.)

Man kann somit die Formel 141 schreiben

$$\begin{aligned} \frac{(\cos H \sin i' - \cos H' \sin i)}{\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\alpha^2}} + \frac{\cos K \sin i' - \cos H' \sin i}{\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\beta^2}} \\ + \frac{\cos L \sin i' - \cos L' \sin i}{\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\gamma^2}} = 0 \end{aligned} \tag{214}$$

Diese Gleichung in Verbindung mit der bekannten 67, 68, 69 ermöglicht $\alpha \beta \gamma$ abzuleiten, wenn man durch Variation der Werthe von $i$ soviel Bedingungsgleichungen als nöthig aufstellt. Am zweckmässigsten dürfte diese Gleichung jedoch zur Berechnung jener Fälle (vergl. oben 2. $\mu'_s$) sein, welche einem Prisma angehören, dessen Halbirungslinie von dem brechenden Winkel parallel zu einer Elasticitätsaxe ist, dessen ausserordentlicher Brechungsexponent $\mu'_s$ daher unmittelbar einen Hauptbrechungsexponenten liefert, wodurch die Zahl der Unbekannten in 214 sich auf 2 reducirt. Seien beispielsweise diese letztgenannten $\beta$ $\gamma$, so wäre wohl möglich durch Variation der Incidenzwinkel zwei Bedingungsgleichungen nach 214 aufzustellen und mittelst derselben $\beta$ $\gamma$ zu berechnen, doch dürften die hier in Rechnung kommenden Fehler bedeutender sein, als die Genauigkeit erlaubt. Man kann daher eine Beobachtung an einem zweiten Prisma hiermit combiniren, ($2-\mu'_s$) dessen Brechungsexponent ebenfalls zwischen $\beta$, $\gamma$ variirt (Formel 209) und einem Strahle angehört, welcher senkrecht zur Kante vibrirt. Eine solche Combination habe ich selbst bei Berechnung der Brechungsexponenten von Schwefel erprobt und die nothwendigen Formeln [1]) sind, wenn $\alpha$, dann $\mu$ von Formel 209 und $\varrho$ von Formel 214 bekannt ist:

[1]) Schrauf. Sitzungsber. der Wien. Acad. 1860. vol. XLI, pag. 769.

$$P - \sqrt{P^2 - Q} = \frac{1}{\beta^2}$$

$$P = \frac{1}{2M}\left[M\left(\frac{1}{\varrho^2} - v\right) + N + Q\right] \quad Q = \frac{1}{M}\left(M\frac{v'}{\varrho^2} + Nv' + Ov'\right)$$

$$(215) \quad M = \frac{(\cos H \sin i' - \cos H' \sin i)^2}{\varrho^{-2} - \alpha^{-2}} \qquad O = \operatorname{cotg}^2 d (\cos L \sin i' - \cos L' \sin i)^2$$

$$N = (\cos K \sin i' - \cos K' \sin i)^2 \qquad v' = \frac{1}{\sin^2 d}\left(\frac{1}{\varrho^2}\cos^2 d + \frac{1}{\mu^2}\right)$$

Diese Formeln 215 liefern $\beta$ aus 3 Brechungsexponenten und deren Orientirung. Aus $d$, $\mu$, $\beta$ folgt, mittelst 209 der Brechungsexponent $\gamma$.

Ich erwähne hier, dass ein natürlicher Krystall von Schwefel hinreichte, um an ihm $\alpha\beta\gamma$ zu ermitteln. Die Combination der Flächen $\{111\}$ $\{\bar{1}\bar{1}1\}$ liefert (vide oben Fall 2) als $\mu_a$ den Werth $\alpha$, und überdiess $\mu_0$ nach (209). Die Combination der Flächen $\{113\}$ $\{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$ Fig. 56 gibt $\varrho$ nach (214). Man ersieht hieraus, dass diese Methode ermöglicht, selbst mit dem geringsten Aufwande von Material die nothwendigen Grössen $\alpha\beta\gamma$ zu ermitteln.

Fig. 56.

001, $\bar{1}13$, $\bar{1}13$, $113$, $\bar{1}11$, $111$, $\bar{1}11$, $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$, $1\bar{1}\bar{1}$, $1\bar{1}\bar{1}$

§. 90. **Dispersion und Absorption der doppelt gebrochenen Strahlen.** Da die Angaben des Brechungsexponenten immer für eine bestimmte Oscillationsdauer oder Wellenlänge gelten müssen, so ist jede Messung für mehrere genau bestimmte Farben durchzuführen. Ueber die zu diesem Zwecke anzuwendenden Lichtquellen vergleiche das im §. 88 Gesagte. Wenn die Methode der Einstellung und Rechnung auf das Minimum der Deviation (69) angewendet wird, ist zu bemerken, dass jede einzelne Farbe auf das Minimum eingestellt werden muss. Wird jedoch der Incidenzwinkel $i$ ebenfalls in Rechnung gezogen (Formel 68), so genügt eine einmalige Einstellung des Spectrums.

Die Genauigkeit der Spectralmessungen muss nun schliesslich durch die für die Dispersion geltenden Formeln verificirt werden. Die einfachsten Methoden hierfür sind die der Differenzen (Formel 79—80); will man die Beobachtungen weiter prüfen, so kann man die allgemeinen Formeln des §. 39 benützen. Beispielsweise sind die Zahlen für $\omega$ von Calcit[1]) aus zwei Beobachtungen gerechnet nach

[1]) Ich wiederhole hier diese Zusammenstellung, weil pag. 101 durch ein Versehen die Titel der Columnen vertauscht wurden.

| Beob.: | Rudberg | Ger.: Cauchy | Bad. Pow. | Christof. | Form. 76. |
|---|---|---|---|---|---|
| $\omega_B$ | 1·65308 | 1·653065 | — | — | 1·653059 |
| $\omega_C$ | 1·65452 | — | 1·6547 | 1·6545 | — |
| $\omega_D$ | 1·65850 | 1·658459 | 1·6584 | 1·6583 | 1·658469 |
| $\omega_E$ | 1·66360 | 1·663557 | 1·6638 | 1·6632 | 1·663568 |
| $\omega_F$ | 1·66802 | — | — | 1·6677 | — |
| $\omega_G$ | 1·67617 | 1·676249 | 1·6765 | — | 1·676110 |
| $\omega_H$ | 1·68370 | 1·683013 | 1·6843 | 1·6836 | 1·682880 |

Diese Formeln, namentlich 75 und 76, stimmen mit den genauen Beobachtungen Rudberg's überein, so dass man diese Uebereinstimmung auch immer als ein nothwendiges Merkmal für die genaue Beobachtung der Dispersion fordern muss.

Bei der Messung der Brechungsexponenten ist ausser der Dispersion auch auf die Lichtstärke der gebrochenen Strahlen oder die Absorption Rücksicht zu nehmen. Bekanntlich unterscheidet man (vergl. pag. 131) zwei Arten der Absorption: variabel bezüglich der Farbe und variabel bezüglich der Intensität. Die Beobachtungen für die erstere Art der Absorption haben ein geeignetes Mittel in der Haidinger'schen dichroskopischen Lupe. Schwieriger sind hingegen genaue Bestimmungen der nach den drei Richtungen verschiedenen Intensitätsabsorption zu machen, indem immer der Einfluss der chromatischen Absorption eliminirt und ein constantes Mass der Intensität herbeigezogen werden muss.

Die relative Absorption zweier Strahlen lässt sich erkennen, wenn man dieselbe etwa durch totale Reflexion in ein Bündel vereint durch einen der dichroscopischen Lupe ähnlichen Apparat [1]) gehen lässt. Fällt die Lage der Hauptschnitte des Calcit mit jenen der beiden Strahlen zusammen, so haben die zwei Strahlen vermöge ihrer relativ verschiedenen Absorption verschiedene Intensität. Dreht man hingegen den Calcit, so wird ein Winkel $\psi$ existiren, für welchen die beiden Bilder gleich intensiv werden, woraus sich dann das Verhältniss der beiden Intensitäten ergibt zu

$$\frac{P}{S} = \frac{1 - \operatorname{tang}\psi}{1 + \operatorname{tang}\psi} \qquad (216)$$

Leichter gestalten sich die Beobachtungen, wenn man immer die Intensitätsverhältnisse bei den prismatisch doppelt gebrochenen Strahlen untersucht, indem hier gleichzeitig der Effect der chromatischen Absorption leichter erkannt werden kann. Die meisten so gemachten Beobachtungen lehren, dass die Intensität der gebrochenen Strahlen proportional der Zunahme des Brechungsexponenten absorbirt werde

[1]) Beer. Pogg. Ann. vol. 84. pag. 37.

(pag. 131). Hiermit stimmt auch der Satz der Molekulartheorie des Lichtes, nach welcher die Amplitude (also auch Intensität) beim Uebergange in ein zweites Mittel proportional dem Brechungsexponenten verkleinert wird

$$s' = \frac{s}{\mu} \tag{101}$$

Zu bemerken ist, dass dieser Satz nicht etwa die Fluorescenz unmöglich macht, welche, wie öfters erwähnt, in einer Verminderung der Amplitude mit gleichzeitiger Verzögerung der Vibrationsdauer besteht. Die Intensitätsabsorption findet auch bei der strahlenden Wärme statt, und bei letzterer lässt sich der Beweis von (101) liefern (vergl. Kap. XIX.).

§. 91. **Die Reflexion an doppelbrechenden Medien nach Neumann.** Durch das Brewster'sche Tangentengesetz 81 ward zuerst die Möglichkeit begründet, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in einem Medium durch die blosse Beobachtung des reflectirten Strahls zu finden. Wie bereits in §. 46 auseinandergesetzt, theilt sich das unpolarisirt einfallende Licht an der Trennungsfläche zweier Medien in zwei entgegengesetzt polarisirte Strahlen, den gebrochenen und reflectirten. Die Vibrationen des letzteren sind zumeist senkrecht auf die Einfallsebene und die Polarisation derselben ist im Maximum bei jenem Einfallswinkel, welchen wir Hauptincidenz oder Polarisationswinkel $J$ nennen und für welchen tang $J = \mu$ gilt. Bevor noch die Ablenkung der Polarisationsebene durch Reflexion — eine Consequenz der elliptischen Polarisation — durch Brewster gefunden war, genügte es den Winkel $J$ als jenen Incidenzwinkel zu definiren, unter welchem die in der Einfallsebene schwingende Componente des reflectirten Strahles Null ist. Da diess jedoch wie Brewster zeigte, in den seltensten Fällen vollkommen erreicht ist, so erweiterten Seebeck[1]) und Neumann[2]) den Begriff desselben. Nach ihnen ist der Polarisationswinkel jener Winkel, unter welchem natürliches Licht reflectirt werden muss, damit es vollständig polarisirt ist, wobei der Azimuth der Polarisationsebene von der Einfallsebene abweichen kann. Diese Definition setzt ebenfalls das absolute Nullwerden der zweiten Componente voraus, was jedoch niemals eintritt. Die obige Definition stimmt aber mit jener für die elliptische Polarisation nahezu, wenn man die Limite der zweiten Componente Null setzt, und hierdurch erhalten die Ableitungen den nöthigen Grad der Genauigkeit. Da aber die (später erörterten) Untersuchungen von

---

1) Seebeck. Pogg. Ann. vol. 21, pag. 290. vol. 22, 126

2) Neumann. Abh. d. Berl. Acad. 1835. Abth. 2, pag. 30.

Jamin lehren, dass nur für Stoffe, deren Brechungsexponente nicht 1·7—1·8 übersteigt, die in die Einfallsebene fallende Componente nahe Null wird, so sind auch die auf obige Definition gebauten Schlüsse nur unterhalb dieser Grenze absolut richtig.

Neumann bestimmt die Amplituden des von der Krystallfläche reflectirten Lichtstrahles mittelst der schon früher aufgestellten Gleichungen 165 und 166a. In dem betreffenden Paragraphe 72 waren durch Elimination von $L_s$ und $L_p$ die Werthe von $R'$ $R''$ für den gebrochenen Strahl abgeleitet. Eliminirt man hingegen diese letztgenannten Amplituden $R'$ $R''$ aus 165 und 166a, so erhält man die Werthe für die Amplituden des reflectirten Strahles

$$L_p = pJ_p + s'J_s \qquad L_s = p'J_p + sJ_s \tag{217}$$

worin

$$\begin{aligned}
p &= \Delta \left\{ \begin{array}{l} \cos \mathfrak{p}'' \sin (i + r'') [\sin \mathfrak{p}' (\sin i \cos i + \sin r \cos r) + \sin^2 r' \operatorname{tang} \mathfrak{K}'] \\ + \cos \mathfrak{p}' \sin (i + r') [\sin \mathfrak{p}'' (\sin i \cos i + \sin r \cos r) + \sin^2 r'' \operatorname{tang} \mathfrak{K}''] \end{array} \right\} \\
s &= - \Delta \left\{ \begin{array}{l} \cos \mathfrak{p}' \sin (i - r') [\sin \mathfrak{p}'' (\sin i \cos i + \sin r'' \cos r'') - \sin^2 r'' \operatorname{tang} \mathfrak{K}''] \\ + \cos \mathfrak{p}'' \sin (i - r'') [\sin \mathfrak{p}' (\sin i \cos i + \sin r' \cos r') - \sin^2 r' \operatorname{tang} \mathfrak{K}'] \end{array} \right\} \\
p' &= - \Delta \left\{ \cos 2i \cos \mathfrak{p}' \cos \mathfrak{p}'' \sin (r' - r'') \right\} \\
s' &= \Delta \left\{ \begin{array}{l} \sin 2i [\sin \mathfrak{p}' \sin \mathfrak{p}'' (\sin i \cos i - \sin r'' \cos r'') \\ \qquad - \sin \mathfrak{p}'' \sin^2 r' \operatorname{tang} \mathfrak{K}' + \sin \mathfrak{p}' \sin^2 r'' \operatorname{tang} \mathfrak{K}''] \end{array} \right\}
\end{aligned} \tag{217a}$$

in welchen Gleichungen $\Delta$ durch Formel 167a bestimmt ist.

Ist eine vollständige Polarisation des reflectirten Strahles $L'_s$ unter dem Polarisationswinkel aber mit dem Azimuth $p_L$ der Vibrationsrichtung möglich, so muss die senkrecht hierzu zerlegte Componente $L'_p$ der Vibration Null werden. Zerlegt man somit $L_p'$ $L_s'$ nach der Hauptpolarisationsebene oder nach den Haupteinfallsebenen, gegen welche sie um $p_L$ geneigt, so ist

$$\begin{aligned}
L'_s &= L_p \sin p_L + L_s \cos p_L = J_p (p \sin p_L + p' \cos p_L) + J_s (s' \sin p_L + s \cos p_L) \\
L'_p &= L_p \cos p_L - L_s \sin p_L = J_p (p \cos p_L - p' \sin p_L) + J_s (s' \cos p_L - s \sin p_L)
\end{aligned} \tag{218}$$

Da nach den neueren Untersuchungen aber lineare Polarisation nur in den seltensten Fällen, meist hingegen elliptische Polarisation auftritt, so verschwindet streng genommen $L_p'$ nie, sondern nähert sich nur der Limite Null. Setzt man als erste Annäherung, um zu einfachen Rechnungsformeln zu gelangen, dennoch $L'_p$ für den Hauptpolarisationswinkel gleich Null, so muss, weil $L_p$ unabhängig von der Phase des einfallenden Lichtes sein wird, aus 218 folgen

$$p \cos p_L = p' \sin p_L \qquad s' \cos p_L = s \sin p_L$$

hieraus folgen für den Hauptpolarisationswinkel die Bedingungen

$$ps - p's' = 0 \qquad \operatorname{tang} p_L = \frac{s'}{s} \tag{219}$$

Die Formeln vereinfachen sich aber, wenn die Einfallsebene mit einem der optischen Hauptschnitte zusammenfällt; denn in einem solchen Falle werden entweder tang $\mathfrak{R}' = 0$; sin $\mathfrak{p}' = 0$, cos $\mathfrak{p}'' = 0$ oder tang $\mathfrak{R}'' = 0$, sin $\mathfrak{p}'' = 0$, cos $\mathfrak{p}' = 0$; wodurch immer $p' = 0$, $s' = 0$ wird. Mit dieser Annahme erhält man dann aus 201, 201a für den Fall, dass die Einfallsebene mit einem Hauptschnitt zusammenfällt

$$(220) \quad \begin{aligned} Lp &= \frac{\sin i \cos i - \sin r'' \cos r'' \pm \dfrac{\sin^2 r''}{\mathfrak{r}_2^{2\,\prime\prime}\mathfrak{F}_\mathfrak{r}}}{\sin i \cos i + \sin r'' \cos r'' \pm \dfrac{\sin^2 r''}{\mathfrak{r}_2^{2\,\prime\prime}\mathfrak{F}_\mathfrak{r}}} Jp \\ Lp &= \frac{\sin i \cos i - \sin r' \cos r' \pm \dfrac{\sin^2 r'}{\mathfrak{r}_1^{2\,\prime}\mathfrak{F}_\mathfrak{r}}}{\sin i \cos i + \sin r' \cos r' \mp \dfrac{\sin^2 r'}{\mathfrak{r}_1^{2\,\prime}\mathfrak{F}_\mathfrak{r}}} Jp \end{aligned}$$

Die erste dieser Gleichungen gilt, wenn die Einfallsebene mit dem Hauptschnitte $\mathfrak{ab}$ übereinstimmt, die zweite hingegen wenn die Einfallsebene mit dem Hauptschnitte $\mathfrak{bc}$ übereinstimmt. Für den Hauptschnitt $\mathfrak{ac}$ gilt die erste Formel, wenn die Wellennormale des gebrochenen Strahles im stumpfen Winkel der optischen Axen, die zweite Formel, wenn sie im spitzen Winkel derselben liegen.

**§. 92. Die Bestimmung der Brechungsexponenten mittelst Reflexionsbeobachtungen nach Neumann.** Um zu möglichen Rechnungsformeln für die Beziehungen von Polarisationswinkel und Brechungsexponenten zu gelangen, führte Neumann (l. c.) mehrere Vereinfachungen ein. Erstens setzt er statt der Bedingungsgleichung $L'_p = 0$ und $ps - p's' = 0$ die einfachere Bedingungsgleichung $L_p = 0$, welche wie leicht ersichtlich, ebenfalls nur in erster Annäherung giltig ist; zweitens untersucht er die Fälle, wo die Einfallsebene mit einem Hauptschnitt parallel ist.

Folgt man seiner Analyse beispielsweise für den Fall, wo die Einfallsebene die spitzen Winkel der optischen Axen eines negativen Krystalles $\underline{\mathfrak{a}}$ halbirt und den Winkel des Einfallslothes zu Axe $\underline{\mathfrak{a}}$ wie früher mit $H$ bezeichnet wird, so ist in Folge 219

$$(221) \qquad L_p = 0 \qquad \sin i \cos i - \sin r'' \cos r'' \pm \frac{\sin^2 r''}{\mathfrak{r}_2^{2\,\prime\prime}\mathfrak{F}_\mathfrak{r}} = 0$$

$''\mathfrak{F}_\mathfrak{r}$ bestimmt sich nach 160, wenn man bedenkt, dass in diesem Falle $\psi_i' = \psi_i''$; und lässt sich transformiren mittelst eines Dreieckes zwischen einer optischen Axe, der Elasticitätsaxe $\underline{\mathfrak{a}}$ und der Wellen-

normale $''W$, wobei der Winkel zwischen dieser Normale und $\underline{\mathfrak{a}}$ mit $(H - r_{,,})$ bezeichnet werden kann. Aus 221 leitet sich dann ab

$$\sin i \cos i - \sin r'' \cos r'' - \tfrac{1}{2} (\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2) \sin 2 (H - r_{,,}) \sin^2 i = 0 \tag{222}$$

annähernd kann weiter $\sin^2 r_{,,}$ ausgedrückt werden durch

$$\sin^2 r_{,,} = \mathfrak{r}_{,,} \sin^2 i = [c^2 + (\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{c}^2) \sin^2 \psi_2] \sin^2 i$$

$$= \left[\frac{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2}{2} - \frac{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}}{2} \cos 2 (H - r_{,,})\right] \sin^2 i \tag{223}$$

Aus 222 und 223 lassen sich $\sin 2 r_{,,}$; $\cos 2 r_{,,}$ ableiten, durch deren Quadrirung und folgende Addition Neumann findet

$$\sin^2 J = \frac{(1 - \mathfrak{b}^2) \cos^2 H + (1 - \mathfrak{a}^2) \sin^2 H}{1 - \mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}^2} \tag{224}$$

Analoge Formeln ergeben sich für die übrigen Hauptschnitte, wenn man statt des Winkels $H$ den betreffenden Winkel des Einfallslothes zu einer Elasticitätsaxe, so wie die Werthe der Elasticitätsaxen selbst einführt. Die Formel ist zuerst von Seebeck [1] auf anderem Wege gefunden und an Kalkspath erprobt worden.

Sucht man nur die Bestimmungen in erster Annäherung durchzuführen, so ist es auch möglich die Beschränkung auf die Hauptschnitte fallen zu lassen und auch jene Zonen einzubeziehen, welche überhaupt nur Eine Elasticitätsaxe in sich enthalten. Hierdurch wird es möglich auch Beobachtungen an Pyramidenflächen zu benützen, wenn die Einfallsebene einer Hauptzone, d. i. einer Zone vom Pol der Pyramide zur Elasticitätsaxe, parallel ist.

Geht man die Verhältnisse solcher Hauptzonen durch und vernachlässigt alle Differenzen höherer Ordnung, so erhält man als erste Annäherung eine Gleichung analog 224. Ich finde hierfür

$$\sin^2 J = \frac{(1 - \mathfrak{h}^2) \sin^2 H + \left(1 - \dfrac{\mathfrak{k}^2 \cos^2 K}{\sin^2 H}\right) \cos^2 H - \mathfrak{l}^2 \cos^2 L \operatorname{cotang}^2 H}{1 - \dfrac{\mathfrak{h}^2 \mathfrak{k}^2 \cos^2 K}{\sin^2 H} - \mathfrak{h}^2 \mathfrak{l}^2 \dfrac{\cos^2 L}{\sin^2 H}} \tag{225}$$

worin $HKL$ die Winkel des Einfallslothes zu den betreffenden drei Elasticitätsaxen, deren Grösse mit $\mathfrak{h}\ \mathfrak{k}\ \mathfrak{l}$ bezeichnet wird und $J$ den Hauptpolarisationswinkel für jene Hauptzone der Einfallsebene bedeutet, welche durch die Elasticitätsaxe $\mathfrak{h}$ geht.

Man erkennt leicht, dass, wenn die Hauptzone sich in einen Hauptschnitt verwandeln, also $L = 90$, $K = 90 - H$ würde, dass auch 225 sich auf 224 zurückführen lässt in der bequemen Schreibweise

[1] Seebeck. Pogg. Ann. vol. 21, 290. vol. 22, 126.

(226 a) $$\sin^2 J = \frac{(1-\mathfrak{h}^2)\sin^2 H + (1-\mathfrak{k}^2)\sin^2 K}{1-\mathfrak{h}^2\mathfrak{k}^2}$$

wo die Einfallsebene dann parallel der Ebene der Elasticitätsaxen $\mathfrak{h}\,\mathfrak{k}$ ist.

Diese aufgestellten Gleichungen werden im allgemeinen genügen, um aus der Beobachtung des Hauptpolarisationswinkels an orthogonalen Krystallen die Werthe der Brechungsexponenten $\frac{1}{\mathfrak{h}}\ \frac{1}{\mathfrak{k}}\ \frac{1}{\mathfrak{l}}$ abzuleiten. Am einfachsten gelingt diess, wenn die Pinacoidflächen 100, 010, 001 zu Gebote stehen. Die Bestimmung des Hauptpolarisationswinkels $J_A$, $J_B$ auf zwei Pinacoidflächen, z. B. $A_h$, $B_k$, bei constanter Einfallsebene (parallel $\mathfrak{h}\,\mathfrak{k}$) genügt zu Ableitung der Werthe von $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{k}$. Es ist für $A_h$ nämlich $\sin H = 0$; für $B_k$ aber $\sin K = 0$; daher

$$\sin^2 J_A = \frac{1-\mathfrak{k}^2}{1-\mathfrak{h}^2\mathfrak{k}^2};\ \sin^2 J_B = \frac{1-\mathfrak{h}^2}{1-\mathfrak{h}^2\mathfrak{k}^2}$$

(226) und daher

$$\frac{\sin^2 J_A}{\cos^2 J_B} = \frac{1}{\mathfrak{h}^2} \qquad \frac{\sin^2 J_B}{\cos^2 J_A} = \frac{1}{\mathfrak{k}^2}$$

wodurch zwei der Hauptbrechungsexponenten bekannt werden. Für einaxige Mittel genügen somit eine Beobachtung an der Endfläche und eine an dem sechsseitigen Prisma, wenn die Einfallsebene beidesmal durch die Hauptaxe gelegt ist, um die Werthe von $\omega$ und $\varepsilon$ zu ermitteln. Für zweiaxige Mittel müssen hingegen noch zwei weitere Beobachtungen hinzutreten.

Aus 226 ersieht man ferner, dass wenn $\mathfrak{h} = \mathfrak{k}$ wird, wie diess der Fall, wenn bei einaxigen Medien die Einfallsebene senkrecht auf der Hauptaxe steht, dass dann

(227) $$\operatorname{tang} J = \omega$$

wird, ein Fall, wo die Gesetze der doppelbrechenden Medien mit jenen der Isophanen coincidiren.

Die Bestimmung der Hauptpolarisationswinkel selbst wird nach folgenden Principien durchgeführt werden müssen, welche bei Anwendung eines verticalen Goniometers oder eines Goniometers mit horizontalem Limbus gleich bleiben. (Vergl. Fig. 52 und 53.) Zuerst erfolgt die genaue krystallographische Einstellung des Krystalles, welches so orientirt wird, dass die gewünschte krystallographische Zone parallel dem Limbus wird. Hierdurch wird diese Zone die Einfallsebene und es ist somit diese letztgenannte festgestellt. Die Werthe von $HKL$ folgen aus der früheren krystallographischen und wenn nöthig stauroskopischen Beobachtungen. Um nun auf dieser bestimmten Fläche und für diese orientirte Einfallsebene den Hauptpolarisationswinkel zu suchen, darf man nur jene Stelle des reflec-

tirten Strahles aufsuchen, wo $L_p$ oder $L_p'$ Null wird. Man wird zu diesem Zwecke das mit dem Limbus gleichzeitig verschiebbare Beobachtungsfernrohr mit einem Nicol'schen Prisma oder einem anderen doppelbrechenden Prisma versehen.

Diese beiden erwähnten Prismen dienen dazu, das Minimum der Intensität für die nahe parallel der Einfallsebene sich vollziehenden Schwingungen $L_p$ oder $L_p'$ bei dem Hauptreflexionswinkel anzuzeigen. Trägt das Beobachtungsfernrohr noch einen getheilten Kreis, (vergl. Fig. 53 *CD*, *GH*) welcher mit dem doppelbrechenden Prisma gleichzeitig drehbar ist, so kann derselbe zur Bestimmung des Azimuth $p_L$ benützt werden, unter welchem die Schwingungen des reflectirten Strahles $L_p'$ ein Minimum werden. Der Reflexionswinkel wird analog den in §. 85 angewendeten Verfahren bestimmt. Zuerst wird am Limbus jene Stelle $a^0$ bestimmt, wo Collimator und Beobachtungsfernrohr parallel sind; dieses Azimuth des einfallenden Lichtstrahles bestimmt für die spätere Messung den Nullpunkt. Dann sucht man den von der Krystallfläche reflectirten Strahl auf und liest bei jener Stellung $b^0$, wo das Minimum von $L_p$ eintritt, am Limbus ab. Um diess zu beobachten, wird man daher continuirlich die doppelten separaten Bewegungen von Krystall und Beobachtungsfernrohr vornehmen müssen, indem der Gang des Fernrohrs immer das Doppelte von jenem des Krystalls ist. Hat man die Stelle erreicht, wo die Vibrationen, welche nahe parallel der Einfallsebene vor sich gehen, das Minimum der Helligkeit im doppeltbrechenden Prisma geben, so wird am Limbus abgelesen.

Die Grade dieser Ablesung weniger dem Werthe des früher bestimmten Nullpunktes sind gleich $180^0 - 2J$. Hierdurch ist also der Hauptpolarisationswinkel gegeben und es erübrigt zur Ableitung der Brechungsexponenten nur eine schickliche Wahl der reflectirenden Flächen und der Einfallsebenen, um die Gleichung 224—227 möglichst einfach aufzulösen.

§. 93. Elliptische Polarisation. Neumann suchte den Hauptpolarisationswinkel als Function der Werthe der Elasticitätsaxen, in deren Ebene die Einfallsebene liegt, zu bestimmen. Um hierbei zu einfachen Formeln zu gelangen, ist es nöthig, bezüglich der Polarisation des reflectirten Strahles die complicirte Hypothese einer elliptischen Polarisation zu vermeiden. Man begeht hierdurch einen Fehler höherer Ordnung, indem man die Vibrationscomponente parallel der Einfallsebene direct Null setzt, statt den Grenzwerth Limite Null anzunehmen. Handelt es sich um die Bestimmung der Brechungsexponenten von Substanzen, deren $\mu > 2{\cdot}0$ ist, so kann jedoch dieser Fehler merkbar werden und es müssen die Verhältnisse der

elliptischen Polarisation berüchsichtigt werden. Letztere sind wohl durch Cauchy und Jamin untersucht worden (vergl. §. 48, 49), doch nur insoweit dieselben isophane Körper betreffen. Die elliptische Reflexion an Krystallen entbehrt trotz der Arbeit von Senarmont[1]) noch einer genaueren Bestimmung der Verhältnisse und so wird man um für diese letzteren die Werthe der Hauptbrechungsexponenten zu finden, als erste Annäherung immer das Neumann'sche Verfahren anwenden und die so gewonnenen Resultate mittelst der Formeln der elliptischen Polarisation corrigiren müssen.

Die bei der elliptischen Polarisation geltenden Formeln sind in (91—93) zusammengestellt, worin die namentlich zu berücksichtigenden Grössen sind: der Ellipticitätscoefficient $E$, die Phasenverschiebung $\varDelta$ und das Verhältniss der beiden Vibrationsexponenten $L_p : L_s$, wodurch auch das Azimuth des reflectirten Strahles bestimmt wird.

Die Phasenverschiebung $\varDelta$ wird mittelst des Babinet'schen Compensators bestimmt, indem man (vergl. §. 49) mittelst desselben $\varDelta$ immer zu $^1/_2\,\lambda$ ergänzt, wodurch sich aus $L_s$ $L_p$ eine geradlinige Vibration zusammensetzt. Ist hierdurch $\varDelta$ bekannt, so wird man das Azimuth $p_L$ des Nicols im Beobachtungsfernrohr aufsuchen müssen, welche diese compensirt lineare Vibration auslöscht und Dunkelheit erzeugt[2]). Die getheilten Kreise an den Fernröhren dienen nämlich hierzu, den Azimuth der Vibration des einfallenden ($p_i$) und reflectirt ($p_L$) linearen polarisirten Strahles mittelst eines Nicols oder sonstigen doppelbrechenden Prisma zu finden (vergl. Fig. 53).

Aus den Werthen der beiden Vibrationsazimuthe vor und nach der Reflexion ist es aber möglich, das Intensitätsverhältniss $K = \frac{L_p}{L_s}$ der beiden Vibrationscomponenten nach (90) abzuleiten.

Der Werth von $K$ kann ziemlich genau bestimmt werden, denn man kann immer eine genügende Wahl von $p_i$ treffen, so dass die Fehler in $p_L$ nur Differenzen höherer Ordnung bilden.

Die Formel (93), welche die Abhängigkeit der Phasendifferenz von $E$, $i$, $r$ angibt, erhält einen singularen Fall von $\varDelta = {}^3/_2\pi$, wenn die durch die Reflexion hervorgebrachte Verzögerung einer Componente $^1/_4\lambda$

---

[1]) Senarmont. Ann. de Chim. III. Ser. vol. 20 über Reflexion und Doppelbrechung an metallischen undurchsichtigen Krystallen.

[2]) Jamin wendet in seinen Untersuchungen zahlreiche Methoden an, das Polarisationsazimuth zu finden, welches die Intensität $L_p = 0$ oder $L_p = L_s$ macht. Sie kommen im Wesentlichen auf obiges Princip zurück.

beträgt. Für diesen Fall, den Jamin Hauptincidenzwinkel $J_e$ nennt, muss wie aus (93) ersichtlich, auch sein

$$\text{cotang}\,(J_e + r) = E^2 \sin^2 J_e \,\text{tang}\,(J_e - r) \tag{228}$$

Der durch 228 bestimmte Hauptincidenzwinkel $J_e$ ist immer etwas kleiner als der Hauptpolarisationswinkel $J$, dessen Tangente dem Brechungsexponenten gleich (vergl. frühern Paragraph), aber selbst bei einem Brechungsexponenten von 2·4 erreichte nach Jamin's Beobachtungen die Differenz beider Winkel erst den Werth von 18 Minuten. Es ist somit eine experimentelle Trennung beider Winkel kaum möglich.

Die Gleichung 228 ermöglicht auch ferner die Ableitung des Brechungsexponenten aus der Kenntniss von $J_e$ und $K$. Substituirt man nämlich in die durch 91 angegebene Gleichung für $\frac{L_p^2}{L_s^2} = K^2$ den Werth von $E^2 \sin^2 J_e$ aus 228, so folgt[1])

$$\begin{aligned} K^2 &= \frac{\sin J_e + r}{\sin J_e - r} \quad \frac{\cos J_e + r}{\sin J_e - r} \\ \frac{K^2 - 1}{K^2 + 1} &= \frac{\text{tang}^2 r}{\text{tang}^2 J_e} \end{aligned} \tag{229}$$

Nachdem durch die Azimuthalbeobachtung $K$ nach (90) bestimmbar ist; ferners mittelst des Babinet'schen Compensators ein Incidenzwinkel $J_e$, dessen Phasenverschiebung $^1/_4$ oder $^3/_4\lambda$ beträgt und der nahe an einen Werth ($J = \text{Arctang}\,\mu$) kommt, gefunden wird; so kann 229 dazu dienen, aus diesen Werthen $r$ und aus $\sin i = \mu \sin r$ den Brechungsexponenten zu berechnen. Der Ellipticitätscoefficient folgt aus 228.

Es dürfte hier nicht unwichtig sein, nochmals zu erwähnen, dass die auf diesem Wege gefundenen Brechungsexponenten, so lange sie kleiner als ($\mu = 2{\cdot}0$) sind, fast vollständig mit jenen Werthen übereinstimmen, die nach Neumann's Methode sich ergeben. Nur für höhere Brechungsexponenten, wo das Verhältniss $K$ grösser ist, (bei Selen

---

[1]) Aus den eben angekündigten Untersuchungen von Cornu (pag. 197) erhellt, dass derselbe für zweiaxige Medien analoge Gleichungen zur Bestimmung von $\mu$ benützt:

$$K\,\text{tang}\,(J - r) = \text{tang}\,(J + r) \qquad \text{tang}\,(p_L - \eta) = K\,\text{tang}\,(p_l - \xi) \tag{229a}$$

Hierin bedeuten $p_l$ $p_L$ die Azimuthe, welche dem Erlöschen des reflectirten Strahles entsprechen. $\eta$, $\xi$ sind hingegen die Hauptazimuthe, welche dem Gesetze der Rechtwinkeligkeit entsprechen, so dass, wenn $p_l = \xi$ odes $\xi + 90^0$, auch $p_L = \eta$ oder $\eta + 90^0$ wird. $\xi$ und $\eta$ sind nur wenige Grade gegen die Einfallsebene geneigt, und sind für letztere und $J$ experimentell zu bestimmen.

$\mu = 2{\cdot}6$ erreicht $K$ den Werth 0·17) ist die Anwendung der Formeln der elliptischen Polarisation nothwendig.

Für Metalle sollen schliesslich die Formeln von Cauchy 84, 85 angewendet werden. Um diese zur Bestimmung des Exstinctionscoefficienten und Brechungsexponenten zu benützen, gibt Cauchy[1]) folgendes Verfahren an. Man suche den Hauptincidenzwinkel auf, für welchen der Unterschied der Phase $\pm 45^0$ wird, also $\delta = 45^0$, wenn mit einem Azimuth $\varphi = 45^0$ polarisirtes Licht einfällt. Es werden dann in (95a)

$$(230) \qquad \delta = \omega = \frac{\pi}{4} \qquad u = \sin J \operatorname{tang} J \qquad v = 2\psi$$

wo $\psi$ das Azimuth des reflectirten Strahles bedeutet. Hierdurch wird

$$(231) \qquad \begin{gathered} \operatorname{tang}(2\varepsilon - v) = \operatorname{tang} v \cos(\pi - 2J) \\ \Theta^2 \sin 2\varepsilon = u^2 \sin 2v \qquad \Theta \cos \varepsilon = \mu \end{gathered}$$

Obgleich diese Methode durch Jamin geprüft eine genügende Uebereinstimmung bezüglich der Polarisationsverhältnisse gegeben hat, so erheben sich doch manche Bedenken gegen die durch sie angezeigte Ableitungsmethode für die Brechungsexponenten. Den wichtigsten Einwand veranlassen die für einige Metalle hiernach gerechneten Brechungsexponenten, welche, da sie kleiner als Eins sind, für diese Metalle eine Lichtfortpflanzung grösser als in der Luft erfordern. Und doch zeigen die gewöhnlichen Refractionsbeobachtungen an metallischen Vebindungen, wenn sie in Ausnahmsfällen durchsichtig sind, einen sehr hohen Brechungsexponenten an. So fand Fizeau für $Cu_2O$ $\mu_\rho = 2{\cdot}89$, für Pyragyrit ($Ag_3$ Sb $S_3$) $\mu_\rho = 2{\cdot}88$, $\mu'_\rho = 3{\cdot}08$. Hierzu kommt noch, dass mich die Theorie des Refractionsvermögens (vergl. meine Studien pag. 228) analog Lorenz zu der Annahme einer äusseren Schichte der Metalle geführt hat, eine Schichte, die mit der Molekularconstitution des Stoffes in seiner gasförmigen Gestalt übereinstimmt.

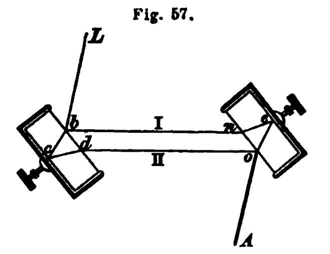
§. 94. **Bestimmung der Brechungsexponenten mittelst Interferenz linear polarisirter Strahlen.** Wie im §. 34 erörtert ward, können interferirende Schwingungen gleicher Polarisationsrichtung, aber ungleicher Phase sich aufheben, wodurch Dunkelheit entsteht. Sind die zwei Strahlen von einer Lichtquelle ausgesendet, und haben dieselben daher ursprünglich gleiche Phase, so werden durch Interferenz derselben nur dann dunkle Streifen entstehen, wenn einer der beiden Strahlen eine Verzögerung gegen den anderen erleidet. Eine solche Verzögerung bewirkt, dass die ursprünglich gleichen Phasen zu verschiedenen Zeiten die Interferenzpunkte passiren.

---

[1]) Cauchy. Pogg. Ann. vol. 74, pg. 544.

Man kann diess erreichen, wenn man entweder einen Strahl durch Reflexion einen längeren Weg zurückzulegen zwingt, oder wenn man seine Geschwindigkeit durch ein eingeschobenes dichtes Medium verzögert. Diese zweite Methode kann zur Bestimmung der Brechungsexponenten dienen. Hierzu eignet sich namentlich die Anwendung der Jamin'schen Spiegel, welche Fig. 57 den einfallenden Strahl durch doppelte Reflexion an Vorder- (*b*) und Hinter- (*c*) Fläche in zwei Strahlen I II zerlegen, welche jedoch wieder durch doppelte Reflexion in einen Strahl vereinigt werden. Die durch die Reflexion entstandene Phasendifferenz von I II bleibt constant und ist daher zu vernachlässigen.

Fig. 57.




Setzen zwei Strahlen einer Lichtquelle und gleicher Phase ihre Wege in verschiedenen Medien fort, so wird deren Differenz nach gleicher Zeit ausgedrückt durch

$$\Delta = \mathrm{d}\left(\frac{\cos\alpha}{v} - \frac{\cos\alpha'}{v'}\right) = \frac{2n+1}{2}\lambda \qquad (232)$$

wo d die Dicke der durchlaufenen Schichte, $v$, $v'$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, $\alpha$, $\alpha'$ die Richtung der Fortpflanzung darstellen. Bekanntlich entstehen dunkle Stellen im Interferenzspectrum, wenn diese Differenz $\Delta$ einen solchen Werth erlangt, dass sie den aliquoten Theil einer Wellenlänge $\frac{2n+1\,\lambda}{2}$ $\lambda$ erreicht.

Bringt man nun einen Strahl, der bloss durch die Luft gegangen, mit einem anderen zum Interferiren, welcher durch eine Platte eines dichteren Mediums gegangen ist, so kann man in 232 $\alpha'$ durch den Incidenzwinkel und $\alpha$ durch den Brechungswinkel ersetzen, wodurch man leicht zur Relation gelangt

$$\Delta = \mathrm{d}\left(\sqrt{(\mu^2 - \sin^2 i)} - \cos i\right) = \frac{2n+1}{2}\lambda \qquad (233)$$

Da diese Gleichung bei senkrechter Incidenz sich auf

$$\mu - 1 = \frac{2n+1}{2\mathrm{d}}\lambda \qquad (234)$$

reducirt, so wäre bereits hiermit eine Relation zwischen Brechungsexponenten und $\lambda$ gegeben. Solche Bestimmungen leiden jedoch Mangel an einer genügend fixirten Mittellinie. Denn wendet man successive verschiedenfärbiges ($\lambda$) Licht an, so ist die Lage der Mitte des Central-

streifens mit dem Gangunterschiede Null wegen der Dispersion für die verschiedenen Farben nicht constant[1]).

Aus dieser Gleichung erkennt man, dass bei senkrechter Incidenz $\Delta$ und daher auch $\lambda$ in (233) das Minimum erreicht und somit für dasselbe auch irgend ein im Spectrum erzeugter dunkler Interferenzstreifen näher an Violett liegen muss, als wenn der Incidenzwinkel steigt. Dreht man also die Platte, oder verschiebt dieselbe, wenn sie keilförmig ist, vom dünneren zum dickeren Ende, so werden durch einen bestimmten Punkt des Spectrums sich die Interferenzstreifen vom violetten zum rothen Ende hin verschieben, denn mit der Zunahme von $\Delta$ wächst auch gleichzeitig die entsprechende Wellenlänge. Man kann diess leicht an den Talbot'schen Interferenzlinien prüfen, welche bei Betrachtung eines Spectrums entstehen, wenn man vor die Hälfte des Auges ein dünnes Plättchen in der Richtung von Violett nach Roth hin einschiebt.

Diese Variation von $\Delta$ mit $i$, auf welche Fizeau und Foucault aufmerksam gemacht, gewährt die Möglichkeit, auf eine genaue und zweckmässige Weise zur Kenntniss des Brechungsexponenten $\mu$ der eingeschalteten Platte zu gelangen. Je nach Variation von d und $i$ wird sich $\Delta$ in $\Delta'$ verwandeln, und die Anzahl $x$ jener Interferenzstreifen, die bei Aenderung dieser Werthe eine bestimmte Farbe des Spectrums, also auch eine bestimmte Wellenlänge, z. B. $\lambda_D$ passirt, ist hiervon abhängig, denn

$$x\lambda = \Delta' - \Delta \tag{235}$$

Ist $\Delta' > \Delta$, so wandern die Linien nach Roth, ist $\Delta > \Delta'$, so wandern dieselben nach Violett.

Da die Variation der Dicke[2]) einer Platte wegen der genauen Messung derselben immer mit einigen Unbequemlichkeiten verbunden sein dürfte, so eignet sich die Variation des Incidenzwinkels um so mehr[3]).

Fig. 58.




Man bringt die Platte zuerst senkrecht gegen Richtung des Strahles in derselben, wodurch $i = 0$ wird. Man erkennt diese Stellung an dem Minimum der Deviation der Interferenzstreifen. Geht man zu $i'$ über, so wird dann die Gleichung für $\mu$

---

1) Stokes. Institut 1850, pag. 320.

2) Zur Messung der Dicke solcher Platten wendet man am zweckmässigsten ein Sphärometer an (Fig. 58), welches die Dicke bis auf Tausendstel Millimeter anzugeben vermag. Man findet die Dicke, wenn man die bekannte Höhe eines Ganges der Schraube $s$ mit der Anzahl der ganzen Umdrehungen oder deren Bruchtheile multiplicirt, welche nöthig sind, um von der Ebene $c$ zur Ebene der Platte überzugehen.

3) Stefan. Sitzungsber. der Wiener Acad. LIII. 2. Abth. 526. 1866.

$$\frac{\Delta' - \Delta}{d} = \frac{x\lambda}{d} = \{[\sqrt{(\mu^2 - \sin^2 i')}] - \cos i\} \div \{\mu - 1\} \qquad (235a)$$

Ist der Incidenzwinkel $i'$ nicht gross, $< 15^0$, so kann man von $\sin^4 i$ und daher von der quadratischen Gleichung für $\mu$, welche aus 235a folgt, absehen und $\mu$ bestimmen durch

$$\mu = \frac{\sin i}{2\left(1 - \cos i - \frac{x\lambda}{d}\right)} \qquad (236)$$

Wir erhalten also den gesuchten Brechungsexponenten als Function des Incidenzwinkels und $x$, d und $\lambda$. Die Beobachtung muss diese Grössen geben, und kann daher in folgender Weise gemacht werden. Die Platte wird auf einen Goniometer gebracht, welcher, wie früher erwähnt, den Reflexionswinkel direct zu messen gestattet, oder man kann, von der Minimumstellung $i = 0$ ausgehend, einmal nach rechts, dann nach links die Platte drehend, bis beidesmal eine gleiche Anzahl $x$ der Interferenzstreifen verschoben ist; liest man beidesmal am Limbus ab, so ist die Differenz der Ablesung $2i$.

Man wird diese Interferenzstreifen gut beobachten können, wenn man den Strahl nach seiner Interferenz prismatisch zerlegt. Da die Anzahl der Interferenzstreifen mit der Dicke der Platte wächst, so wird auch proportional hiermit die prismatische Zerlegung immer vollkommener sein müssen. Während für dünne Plättchen ein Prisma genügt, wird für 2 bis 3 Linien dicke Platten ein Spectralapparat anzuwenden sein [1]). Wäre die Platte selbst doppelbrechend, so lässt man entweder nur polarisirtes Licht einfallen, oder man zerlegt den interferirten Strahl, indem man ihn durch ein doppelbrechendes Prisma gehen lasst.

§. 95. **Differenzbestimmungen.** Die im Vorhergehenden angedeutete Methode der Bestimmung des Brechungsexponenten zeigt sich aber namentlich dort sehr empfindlich, wenn sich der Brechungsexponent der Platte selbst während der Beobachtung durch äussere Einflüsse, z. B. Erwärmung ändert. Geschieht diess bei senkrechter Incidenz, so wird man aus (235) leicht erkennen, dass

$$x\lambda = d'(\mu' - 1) - d(\mu - 1) \qquad (237)$$

Ist hierin der Brechungsexponent $\mu$ und d die Dicke der Platte bekannt, so können die variirten Werthe $\mu_1$ $d_1$ derselben hierdurch gefunden werden. Zu berücksichtigen ist, dass bei Aenderungen durch Wärme, wenn $l$ der lineare Ausdehnungscoefficient der Substanz ist, $\mu'$ sich nach

---

[1]) Jamin. Ann. de chim. LII. 166, 175. Pogg. Ann. vol. 98, pag. 345. Vergl. Ketteler. Ueber Interferentialrefractoren. Dissertation. Berlin 1860.

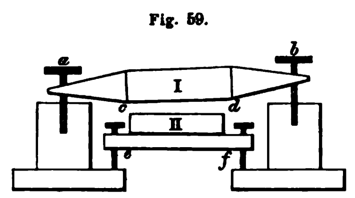
den Gesetzen des Refractionsvermögens (109) mit der Dichte $D$ ändert. Die variirten Grössen berechnen sich aus dem Ausdehnungscoefficienten nach

$$(238)\quad d' = d\,(1 + lt) \qquad \frac{1}{D_1} = \frac{1}{D}\,(1 + 3lt) \qquad \mu_1^2 = 1 + D_1\left(\frac{\mu^2 - 1}{D}\right)$$

Man wird hieraus erkennen, dass, um die Gleichung 237 wirksam zu machen, nöthig ist eine dicke Platte anzuwenden, indem nur in diesem Falle die positive Variation der Plattendicke die negative des Brechungsexponenten überwiegt. Zu bemerken ist, dass ein positiver Werth von $x$ in 237 ein Wandern der Streifen gegen Roth hin andeutet.

Das bisher besprochene Verfahren ist übersichtlich, einfach und lässt in keinem Punkte einen Zweifel an der Bedeutung der Grössen zu; trotzdem hat Fizeau[1]) bei Untersuchung des Einflusses der Wärme auf Platten ein anderes Verfahren eingeschlagen, welches sich auf die Newton'schen Farbenringe gründet.

Fig. 59.




Bekanntlich erzeugen sich diese kreisförmigen oder linearen Streifen durch Interferenz jener Strahlen, die an den je ersten Flächen zweier geneigt übereinander liegenden planplanen Platten I und II oder planconvexe Linsen reflectirt werden. Der zweite Strahl hat eine Verzögerung gegen den ersten, welche entspricht dem Wege in der Schichte Luft zwischen den beiden Platten. An der Berührungsstelle herrscht bei Beleuchtung von oben Dunkelheit und parallel derselben entweder kreisförmig oder linear folgen sich die Interferenzstreifen. Markirt man auf der obern Platte einen Punkt, so gehen die Streifen durch diesen Punkt centripetal nach den Berührungsstellen, wenn die Platten sich entfernen, hingegen centrifugal von derselben weg, wenn die Platten sich einander nähern. Man kann somit auch die Anzahl der verschobenen Streifen analog wie bei der obigen Methode zählen. Fizeau nimmt diese Anzahl bei centripetaler Bewegung der Streifen mit negativen Vorzeichen.

Aendert sich durch Erwärmung die gegenseitige Distanz der Platten *I II*, so werden auch die Fransen wandern. Die Anzahl dieser verschobenen Streifen hängt von der — sowohl durch die Ausdehnung des Apparates *a*, *b* als auch der Platte *II* — geänderten Distanz der Platten ab. Letztere Distanz oder der Weg in der Luftschichte ist es nämlich, um

---

[1]) Fizeau. Pogg. Ann. vol. 128, pag. 564. Compt. rend. 1866, LXII. 1001, 1133. Compt. rend. 1867. LXIX pag. 317.

deren doppelten Betrag der Strahl, welcher von *II* reflectirt wird, hinter dem von *I* reflectirten zurückbleibt.

Sucht man die Anzahl der verschobenen Platten als Function der Dicke d der Platte *II*, der doppelten Dicke $d_L$ der Luftschichte zwischen *I II*, des Ausdehnungscoefficienten $l$ der Platte, des Ausdehnungscoefficienten $l_m$ des Metalls des Apparates auszudrücken, so erhält man leicht

$$\frac{x\lambda}{2} = l\mathrm{d}\,(t' - t) - l_m\,(\mathrm{d} + \mathrm{d}_L)\,(t' - t) \qquad (239)$$

wo $t$ die Anfangs-, $t'$ die Endtemperatur ist.

Die Zahl $x$ bedarf einer Correctur wegen der Aenderung des Brechungsexponenten der Luft $\mu_L$ in Folge der Aenderung der Dichte der Luft durch die Wärme, und zwar ist wegen der doppelten Wege

$$\frac{x'\lambda}{2} = \mathrm{d}_L\,(\mu_L - \mu_L') \qquad X = x - x' \qquad (240)$$

wo $X$ dann die beobachtete Anzahl der verschobenen Fransen darstellt. $\mu_L'$ lässt sich aus der für $t'$ bekannten Luftdichte nach 238 berechnen.

Ausser dieser Methode wendet Fizeau noch ein anderes Verfahren an, welches gestattet, die Aenderung der Fransen bei der Erwärmung nicht bloss von der Ausdehnung, sondern auch von den Aenderungen der Brechungsexponenten abhängig zu machen[1]).

Es entstehen nämlich analog wie oben Interferenzfransen, wenn man die Strahlen combinirt, welche an der obern und untern Seite einer einzigen nicht allzudicken (1 — 6 Millm.) Platte reflectirt werden. Wären beide Ebenen planparallel, so wäre das Gesichtsfeld gleichmässig gefärbt, jedoch ist diess fast nie der Fall. Wird die Platte erwärmt, so beginnen die Fransen zu wandern. Fizeau nennt jenen Sinn positiv, welcher einer Verminderung der Dicke der Platte entspricht und dieser muss mittelst des Sphärometers festgestellt werden.

Um nun diese Anzahl der verschobenen Streifen von $\mu$ und der Plattendicke d, welche der verzögerte Strahl zweimal durchläuft, abhängig zu machen, stellt er mit Vernachlässung der variablen Zwischenräume die Gleichungen auf.

$$x\lambda = 2\,(\mathrm{d}'\mu' - \mathrm{d}\mu) \qquad (241)$$

wo die Buchstaben dieselbe Bedeutung wie früher haben, $\lambda$ bedeutet die Wellenlänge des homogenen Lichtes, womit die Platten von oben beleuchtet werden. Die Beobachtung erfolgt ebenfalls von oben. Auch

[1]) Fizeau, Pogg. Ann. vol. 119. pag. 95.

diese Gleichung erlaubt, je nachdem man in der ersten Annäherung entweder $\mu' = \mu$ oder $d' = d$ setzt, die Aenderung der Plattendicke oder der Brechungsexponenten zu rechnen. Fizeau hat auf diese Weise gefunden, dass die Brechungsexponenten der Glassorten mit der Zunahme der Temperatur wachsen und bestimmte $\mu' - \mu = 0{\cdot}000063$ für dieselben. In den nachfolgenden Kapiteln XVII und XX wird diese Methode nochmals ihre Anwendung finden.

§. 96. Interferenzbeobachtungen an doppelbrechenden Körpern. Ist es die Aufgabe, die Brechungsexponenten eines anisophanen Krystalles durch die Methoden der Interferenz zu bestimmen, so kann das durch Satz 234, 236 angedeutete Verfahren angewendet werden, doch darf nicht wie bei den isophanen Körpern unpolarisirtes Licht verwendet werden. Ebenso ist auch die Lage der Elasticitätsaxen gegen die Plattennormale vorerst zu bestimmen. Es erfordert daher die leichte Durchführbarkeit dieser Aufgabe die Herstellung von Platten, welche der Ebene zweier Elasticitätsaxen parallel laufen. Lässt man auf solche Platten linearpolarisirtes Licht einfallen, dessen Schwingungen parallel einer Elasticitätsaxe sind, so wird für senkrechte Incidenz $\mu$ (234) den Werth eines Hauptbrechungsexponenten erhalten, hingegen bei geneigter Incidenz hiervon bedeutend abweichen und zwischen zwei Hauptbrechungsexponenten variiren. Besitzt der Krystall keine allzustarke Doppelbrechung, so wird diese Differenz bei kleinem Incidenzwinkel höherer Ordnung sein und man vermag zur Bestimmung eines solchen Hauptbrechungsexponenten $\mu$ die Gleichung 236 benützen. Dieselbe Methode mit entgegengesetzt polarisirtem Licht durchgeführt, liefert dann den Brechungsexponenten $\mu_2$ parallel der andern in der Plattenebene liegenden Elasticitätsaxe.

Da beide Rechnungen wegen des Incidenzwinkels mit einem kleinen Fehler behaftet sind, so lässt sich auch die Differenz $\mu_2 - \mu_1$ unabhängig von $i$ bei senkrechter Incidenz berechnen. Lässt man nämlich bei letzterer ($i = 0$) linearpolarisirtes Licht einfallen, parallel den Schwingungen des Strahles $\mu_1$ und dreht während der Beobachtung die Polarisationsebene bis sie parallel $\mu_2$ wird, und combinirt jedesmal mit dem durch die Krystallplatte gedrungenen Strahl einen Lichtstrahl, welcher keine Verzögerung erlitten hat, so entstehen Interferenzstreifen, und beim Uebergange von $\mu_1$ zu $\mu_2$ wandern ebenfalls $x$ Interferenzstreifen nach der Gleichung

$$\frac{x\lambda}{d} = \mu_2 - \mu_1 \tag{242}$$

welche Formel den genauen Werth der Doppelbrechung angibt.

Man vermag jedoch auch die beiden Strahlen[1]), welche durch Doppelbrechung in der Krystallplatte entstehen, zur Interferenz zu benützen. Hierbei mag wieder vorausgesetzt sein, dass zwei Elasticitätsaxen in der Ebene der Platten liegen. Man lässt Licht einfallen, das polarisirt im Azimuth 45° gegen eine Elasticitätsaxe ist, bringt die beiden austretenden Strahlen durch ein vorgesetztes Nicol im Azimuth 45° auf gleiche Schwingungsrichtung, und daher zur Interferenz. Die Interferenzstreifen werden wieder bei einer prismatischen Zerlegung des Strahles sichtbar.

Die Phasendifferenz, welche die beiden Strahlen haben, ist durch

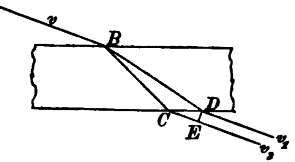
$$\Delta = \mathrm{d}\left(\frac{\cos\alpha}{v} - \frac{\cos\alpha'}{v'}\right) = \frac{2n+1}{2}\lambda \tag{232}$$

ausdrückbar, worin $\alpha$ $\alpha'$ die Richtung der gebrochenen Wellen andeutet. Man gelangt zu dieser Gleichung, wenn man bedenkt, dass die Differenz der beiden Strahlen als Function der Undulationsdauer $\tau$

$$\Delta = \left(\frac{CE}{v} + \frac{BC}{v_1} - \frac{BD}{v_2}\right)\frac{1}{\tau}$$

ist. $BD$, $BC$ sind die Richtungen der Strahlen (vergl. Fig. 60), dieselben lassen sich jedoch, sowie auch $CE$ (mittelst Gleichung 143) als Functionen der gebrochenen Wellen darstellen, wodurch man zur Gleichung 232 gelangt.

Fig. 60.




Begnügt man sich mit einer ersten Annäherung, so kann die Variation des Hauptbrechungsexponenten mit dem Incidenzwinkel innerhalb gewisser Grenzen dieses letzteren vernachlässiget werden und wir können für diesen Fall statt 232 schreiben

$$\Delta = \mathrm{d}\left(\sqrt{\mu^2_1 - \sin^2 i} - \sqrt{\mu^2_2 - \sin^2 i}\right) \tag{243}$$

Geht man wieder von der Incidenz Null zu einem andern nicht allzugrossen Winkel $i$ über, so werden sich wieder $x$ Interferenzstreifen verschieben. Es wird sich durch dieses Verfahren die Differenz $\mu_2 - \mu_1$ ergeben zu

$$\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} = \frac{2x\lambda}{\mathrm{d}\sin^2 i} \tag{244}$$

in welcher Gleichung $\sin^4 i$ in Folge der obigen Bedingung über die Grösse

[1]) Stefan. Sitzungsber. der Wien. Acad. 1866. LIII. 2. Abth. pag. 526.

von $i$ vernachlässiget ist. Ueber die relative Grösse von $\mu_2$ und $\mu_1$ entscheidet der positive oder negative Werth von $x$, d. i. das Wandern der Fransen nach dem Roth oder Violett.

§. 97. Interferenzerscheinungen an circularpolarisirenden Medien. Die Interferenzstreifen, welche entstehen durch Verzögerung eines Theiles des ursprünglichen Strahles durch eine eingeschobene Platte und die mittelst des Spectroskops sichtbar werden, vertheilen sich gleichmässig über das ganze Spectrum, wenn die angewendete Substanz linear doppelbrechend ist. Bei circularpolarisirenden rechts oder links drehenden Substanzen treten diese Streifen nur bei einzelnen Partien, variabel mit der Dicke der Platte auf. Es hängt diess von der mit der Dicke der Platte zunehmenden Drehung der Polarisationsebene ab, welche (vergl. 191) beispielsweise für eine Quarzplatte von 3 Millimeter Dicke für $B$ 46°, für $E$ 82°, für $H$ 153° beträgt. Man erkennt hieraus, dass die in Mitte $E$ des Spectrums liegenden Strahlen gegen die ursprüngliche Polarisationsebene eine Drehung von 90° erhalten haben und daher nicht mehr mit dem andern ungeänderten Theil des ursprünglichen Strahles zur Interferenz gebracht werden können. Gegen beide Enden des Spectrums nähern sich die Polarisationsebenen und die Streifen treten hervor.

Es wird diese Thatsache von Stefan[1]) als Beweis für die Existenz geradliniger Schwingungen im unpolarisirten Lichte, so wie zur Bestimmung der relativen Geschwindigkeit der rechts und links circularpolarisirten Strahlen im Quarze benützt. Letzteres gelingt, indem man mittelst eines Fresnel'schen Parallelepipeds circularpolarisirtes Licht einfallen lässt. Variirt man den Sinn der Drehung des einfallenden Strahles von rechts nach links, so wandern bei einer rechtsdrehenden Platte die Streifen nach roth hin, bei einer eingeschaltenen linksdrehenden Platte nach violett hin. Hierdurch (vergl. §. 94) ist der Beweis geliefert, dass in einer rechtsdrehenden Platte der links circularpolarisirte Strahl sich mit geringerer Geschwindigkeit fortpflanzt als der rechtspolarisirte und entgegengesetzt bei einer linksdrehenden Platte.

Dieser Unterschied der Brechungsexponenten der beiden circularpolarisirten Strahlen längs der Axe kann nach Fresnel[2]) als Function des Drehungswinkel angegeben werden durch

$$\mu_2 - \mu_1 = \frac{\lambda}{\pi}\,\vartheta \tag{245}$$

---

[1]) Stefan. Sitzungsber. der Wien. Acad. 1864. L. 2. Abtheil. 383.

[2]) Fresnel. Mém. de l'Institut VII, 45 Pogg. Ann. vol. 21, pag. 284. Pogg. Ann. vol. 28, pag. 167. Pogg. Ann. vol. 38, pag. 190. Stefan l. c.

und die Doppelbrechung für Quarz ($1^{mm}$) würde in Folge (191) betragen

| | *B* | *C* | *D* | *E* | *F* | *G* | *H* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0·000 | 059 | 063 | 070 | 080 | 088 | 101 | 111 |

Für dieses Gesetz hat Stefan[1]) eine einfache Ableitung gegeben. Setzt man nämlich den Drehungswinkel $\vartheta x$ proportional einer linearen Function $\vartheta$ der Substanz und der Dicke $x$ der durchlaufenen Schichte, so lässt sich der circularpolarisirte Strahl zerlegen in seine primären Componenten

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t-\frac{x}{v}\right) \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t-\frac{x}{v}+90\right)=\cos \frac{2\pi}{\tau}\left(t-\frac{x}{v}\right)\right\}$$

welche, nach der ursprünglichen Polarisationsebene mittelst des Winkels $\vartheta$ zerlegt, successive die Componenten geben nach

$$Y \quad \cos(\vartheta x-45) \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t-\frac{x}{v}\right)-\sin(\vartheta x-45) \cos \frac{2\pi}{\tau}\left(t-\frac{x}{v}\right)$$

$$X \quad \cos(\vartheta x-45) \cos \frac{2\pi}{\tau}\left(t-\frac{x}{v}\right)+\sin(\vartheta x+45) \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t-\frac{x}{v}\right)$$

wofür man schreiben kann nach

$$Y \quad \sin \frac{2\pi}{\tau}\left[\left(t-\frac{\tau}{8}\right)-x\left(\frac{1}{v}-\frac{\vartheta\tau}{2\pi}\right)\right]$$

$$X \quad \sin \frac{2\pi}{\tau}\left[\left(t-\frac{\tau}{8}\right)-x\left(\frac{1}{v}-\frac{\vartheta\tau}{2\pi}\right)\right]$$

Der circularpolarisirte Strahl setzt sich somit bezogen auf $Y$, $X$ aus zwei Strahlen zusammen, deren Phase gleichzeitig von der Variable $\vartheta x$ abhängt. Da der eingeklammerte Ausdruck $\left(\frac{1}{v}-\frac{\vartheta\tau}{2\pi}\right)$ die Vibrationsgeschwindigkeit bedingt, so kann derselbe als Ausdruck für die drehende Geschwindigkeit betrachtet werden. Im vorliegenden rechts drehenden Fall erhält man

$$\frac{1}{v_r}=\frac{1}{v}-\frac{\vartheta\tau}{2\pi} \tag{246a}$$

bei einem links drehenden Strahl würden wir aus den Componenten erhalten

$$\frac{1}{v_L}=\frac{1}{v}+\frac{\vartheta\tau}{2\pi} \tag{246b}$$

---

[1]) Stefan. Sitzungsber. der Wien. Acad. LIII. 2. Abtheil. 551.

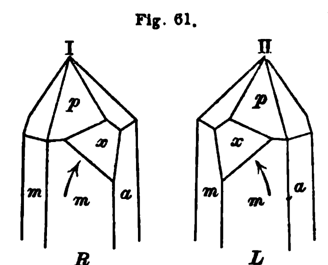
Diese beiden Gleichungen führen unmittelbar zur Gleichung 245 und lehren, dass je nachdem $\vartheta$ negativ oder positiv ist, der durch Combination von (246a, b) entstehende Strahl links oder rechts drehend sein muss. Diese beiden Gleichungen stehen auch in einfacher Beziehung zu der pag 209 aufgestellten Gleichung

$$\mathfrak{r}^2 = \mathfrak{a}^2 \pm \mathfrak{C}^2 \frac{\lambda}{2\pi} \tag{197}$$

worin $\mathfrak{C}$ der die Circularpolarisation bedingende Factor war.

Die Circularpolarisation ist schliesslich eine Function der Materie, indem wie bereits früher erwähnt, mit der rechts oder links hemiedrischen Ausbildung der zwölfseitigen Pyramide am Quarz (Fig. 61) der Sinn der Drehung der Polarisationsebene übereinstimmt. So entspricht der krystallographischen Symmetrie von Fig. 61 I eine Drehung nach rechts, dem Krystall Fig. 61 II hingegen eine Drehung der Polarisationsebene nach links.

Fig. 61.




Durch die in den vorhergehenden Zeilen angegebenen Methoden gewähren also die Interferenzbeobachtungen auch die Möglichkeit, selbst die Werthe der Fortpflanzungsgeschwindigkeit circularpolarisirter Strahlen zu bestimmen. Die Methode der Interferenz zeigt sich überhaupt am geeignetsten zur Ermittlung geringer Variationen. Zur Bestimmung der absoluten Werthe der Brechungsexponenten mögen wohl die directen Refractionsbestimmungen die zweckmässigsten sein, da die Methoden der Reflexion nur mehr oder minder genäherte Zahlen geben. Nie darf aber vergessen werden, dass ein Krystall nur dann als wahrhaft optisch bestimmt gelten kann, wenn die Werthe seiner drei Hauptbrechungsexponenten bekannt sind. Diese Kenntniss allein gibt über den Einfluss der Materie Aufschluss und ist bei jeder Untersuchung immer anzustreben.

2) Im durchgelassenen gebrochenen Lichte

$$S_r = acf\,[\sin(vt - x) + f^2 \sin(vt - x - \varDelta') + f^4 \sin(vt - x - 2\varDelta')]$$

$$= acf\,\frac{\sin(vt - x) - f^2 \sin(vt - x - \varDelta')}{1 - 2f^2 \cos\varDelta' + f^4}$$

In beiden Fällen wird sich die Phase und Intensität nach der bekannten Formel $J = a + a' + 2aa' \cos \varDelta$ als Function des Phasenunterschiedes ableiten lassen.

Der Phasenunterschied, ist im ersten Falle $\mu(bc + cd) - bO = \varDelta$, im zweiten Falle Fig. 62 hingegen $\mu\,(cd + de) - cS = \varDelta'$. Führt man alle diese Werthe als Functionen von $i$ und $r$ ein, so erhält man

$$\varDelta = \varDelta' = 2\mu d \cos r = 2d\sqrt{\mu^2 - \sin^2 i}. \tag{247}$$

Zu demselben Resultat führt auch die allgemeine Gleichung $[illegible] = d\left(\frac{\cos r'}{v^1} - \frac{\cos i}{v}\right)$, wenn man bedenkt, dass hier Interferenzen eintreten, weil der erste Strahl einen weiteren Weg zurückzulegen hat, bis er mit einem eben aus- oder eintretenden zweiten Strahle zusammentrifft.

Aus 247 ergebe sich, dass der Phasenunterschied $\varDelta = \varDelta'$ wäre, unter der Voraussetzung, dass bei der Reflexion keine Phasenverschiebung eintritt. Nimmt man jedoch auf die Fresnel'sche Formel [illegible] Rücksicht, so sehen wir, dass für jeden Fall, wo $i > r$ eine [illegible] der Zeichen oder eine Phasenverschiebung um $\frac{\lambda}{2}$ eintreten [illegible]

Diess ist also im reflectirten Lichte bei $c$, im durchgelassenen bei $c$ und $d$ der Fall.

[illegible] $\varDelta + \frac{\lambda}{2}$ und $\nabla' = \varDelta + \lambda$, daher erhalten wir

[illegible] $\frac{\lambda}{2}\Big) = -\,2aa' \cos \frac{2\pi}{\lambda}\varDelta$

[illegible] $a' \cos \frac{2\pi}{\lambda}\varDelta$ (248)

[illegible] ar, dass die Intensität [illegible] müsse, wenn jene [illegible] gekehrt.

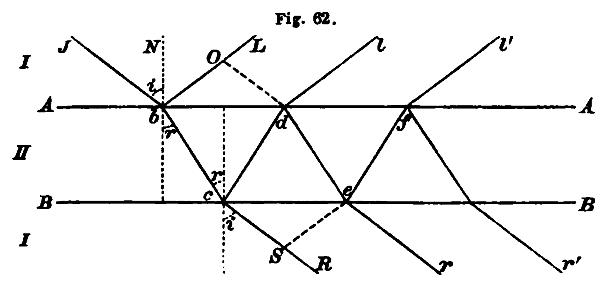
[illegible] nach 247 und 248

[illegible] $\frac{3\lambda}{2}$ . . .

[illegible] $2\lambda$ . . .

Intensität. Anders hingegen bei den sehr dünnen Platten, wo die Summe aller möglichen Reflexionen zu beachten ist, da die Absorption der Lichtintensität bei der stattfindenden Brechung und Reflexion nur unbedeutend ist.

Fig. 62.




Das Phänomen der Farben dünner Plättchen erzeuget sich sowohl in der eingeschlossenen Luftschichte zwischen zwei festen Körpern, analog dem Newton'schen Farbenglas, als auch in einer Platte eines festen Körpers.

In Fig. 62 ist der Brechungsexponent des Mediums II grösser als der des Mediums I; es stellt daher den Fall einer dünnen Körperplatte in Luft vor und in Uebereinstimmung hiermit ist auch $i > r$ $r' < i'$.

Sei nun die Phase des einfallenden Strahles $a \sin (vt - x)$ und seien die Absorptionscoefficienten für die Reflexion $bL$ zu bezeichnen mit $b$, für den gebrochenen Strahl $bc$ mit $c$, für jede Reflexion an der Trennungsschichte bei $c\ d\ e\ f$ mit $f$, so können die Phasen

des Strahles $bL$ mit $ab \sin (vt - x)$
des Strahles $cR$ mit $ac \sin (vt - x)$
des Strahles $dl$ mit $acf \sin (vt - x - \Delta)$
des Strahles $er$ mit $acf^2 \sin (vt - x - \Delta')$

bezeichnet werden, worin $\Delta$ und $\Delta'$ den Phasenunterschied bedeutet.

Man erhält daher für die Phase $S_L$ oder $S_r$ dieser interferirenden Strahlen [1]), da wegen der geringen Dicke der Platte die höheren Potenzen von $f$ nicht vernachlässigt werden dürfen, nachstehende Summen.

1) Im reflectirten Lichte

$$S_L = ab \sin (vt - x) + acf\left[\sin (vt - x - \Delta) + f^2 \sin (vt - x - 2\Delta) + f^4 \sin (vt - x - 3\Delta) \ldots\right]$$

$$= ab \sin (vt - x) + \frac{\sin (vt - x - \Delta) - f^2 \sin (vt - x)}{1 - 2f^2 \cos \Delta + f^4}$$

1) Bezüglich der Integration dieser Summen verweise ich auf die ausführlicheren Behandlungen desselben Problems von Airy Mathem. Tracts. 2. Ed. I. pag. 301. Wilde. Pogg. Ann. vol. 82, pag. 198, welche sich auf Euler, Introd. in anal. inf. I pag. 181 stützen. In Airy Abhandl. Pogg. Ann. 41, pag. 514 entstellt ein Druckfehler die analoge Formel.

2) Im durchgelassenen gebrochenen Lichte

$$S_r = acf\,[\sin(vt-x) + f^2 \sin(vt-x-\Delta') + f^4 \sin(vt-x-2\Delta')]$$
$$= acf\,\frac{\sin(vt-x) - f^2 \sin(vt-x-\Delta')}{1-2f^2\cos\Delta' + f^4}$$

In beiden Fällen wird sich die Phase und Intensität nach der bekannten Formel $J = a + a' + 2aa' \cos \Delta$ als Function des Phasenunterschiedes ableiten lassen.

Der Phasenunterschied, ist im ersten Falle $\mu(bc+cd) - bO = \Delta$, im zweiten Falle Fig. 62 hingegen $\mu\,(cd+de) - cS = \Delta'$. Führt man alle diese Werthe als Functionen von $i$ und $r$ ein, so erhält man

$$\Delta = \Delta' = 2\mu d \cos r = 2d\sqrt{\mu^2 - \sin^2 i}. \tag{247}$$

Zu demselben Resultat führt auch die allgemeine Gleichung $\nabla = d\left(\frac{\cos r'}{v^1} - \frac{\cos i}{v}\right)$, wenn man bedenkt, dass hier Interferenzen auftreten, weil der erste Strahl einen weiteren Weg zurückzulegen hat, bis er mit einem eben aus- oder eintretenden zweiten Strahle zusammentrifft.

Aus 247 ergebe sich, dass der Phasenunterschied $\Delta = \Delta'$ wäre, unter der Voraussetzung, dass bei der Reflexion keine Phasenverschiebung eintritt. Nimmt man jedoch auf die Fresnel'sche Formel $\frac{f(i-r)}{f(i+r)}$ Rücksicht, so sehen wir, dass für jeden Fall, wo $i > r$ eine Aenderung der Zeichen oder eine Phasenverschiebung um $\frac{\lambda}{2}$ eintreten muss. Diess ist also im reflectirten Lichte bei $c$, im durchgelassenen Lichte bei $c$ und $d$ der Fall.

Es ist somit $\nabla = \Delta + \frac{\lambda}{2}$ und $\nabla' = \Delta + \lambda$, daher erhalten wir für das reflectirte Licht

$$J_L - a - a' = 2aa' \cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\Delta + \frac{\lambda}{2}\right) = -\,2aa' \cos\frac{2\pi}{\lambda}\Delta$$

für das durchgelassene Licht

$$J_r - a - a' = 2aa' \cos\frac{2\pi}{\lambda}(\Delta + \lambda) = 2aa' \cos\frac{2\pi}{\lambda}\Delta \tag{248}$$

Aus der Gleichung 248 ersieht man unmittelbar, dass die Intensität des reflectirten Strahles sein Maximum haben müsse, wenn jene des durchgelassenen Lichtes ein Minimum ist und umgekehrt.

Es treten ferner die Maxima der Intensität ein nach 247 und 248

im reflectirten Strahle, wenn $2\mu d \cos r = \frac{\lambda}{2}, \quad \frac{3\lambda}{2} \ldots$

im gebrochenen Strahle, wenn $2\mu d \cos r = \lambda, \quad 2\lambda \ldots$

Die Minima der Intensität

im reflectirten Strahle, wenn $2\mu d \cos r = \lambda, \quad 2\lambda \ldots$

im gebrochenen Strahle, wenn $2\mu d \cos r = \frac{\lambda}{2}, \quad \frac{3\lambda}{2} \ldots$

Man ersieht daraus, dass, wenn die Dicke der Platte mit der Wellenlänge im commensurablen Verhältnisse steht, das Minimum oder Maximum der Intensität nur für eine bestimmte Wellenlänge erfolgen könne, und dass daher das durch Interferenz entstehende Licht gefärbt sein muss. Ist die Dicke der Platte für alle Theile derselben gleich, so erscheint dieselbe gleichmässig gefärbt und jedem Wechsel der Dicke entspricht auch ein Wechsel der Farbe. Die Farben, welche eine Platte im durchgelassenen und reflectirten Lichte zeigt, sind complementär.

Die Intensität selbst berechnet sich für den reflectirten Strahl $J_L$ aus dem früheren zu

$$J_L = \frac{4a^2 f^2 \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} \varDelta}{(1 - f^2)^2 + 4f^2 \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} \varDelta} \tag{248a}$$

für das durchfallende Licht zu $J_r = 1 - J_L$.

§. 99. Platten doppelt brechender Medien. A) Farben dünner anisophaner Plättchen. Die Erscheinungen, welche Platten doppelt brechender Krystalle im polarisirten, parallel einfallenden Lichte zeigen, sind Folge der Interferenz jener zwei Strahlen, die in der Platte selbst entstehen und bilden ihrem Wesen nach wieder zwei Hauptgruppen: die Farben dünner anisophaner Plättchen [1]) und die um die Hauptaxe orientirten Farbenringe.

Beide Erscheinungen können aber nur dann sichtbar werden, wenn die beiden aus dem Krystalle austretenden, senkrecht zu einander schwingenden Strahlen durch einen Analyseur auf ein gemeinschaftliches Azimuth der Polarisation gebracht, und dann in Folge ihrer Schwingungsrichtung sich gegenseitig schwächen und stärken können.

Wir haben daher bei der Betrachtung der zwei interferirenden Strahlen zu bedenken, erstens das Polarisationsazimuth $\beta$ des aus der Krystallplatte austretenden Lichtstrahles gegen den Hauptschnitt des analysirenden Nicols, dann den Winkel $\alpha$ zwischen den Hauptschnitten des polarisirenden und analysirenden Nicols. Sei nun der Phasenunterschied der beiden durch Doppelbrechung entstandenen Strahlen $\varDelta$, so ersieht man, dass für dieselben nach dem Austritt aus der Platte die Gleichung im allgemeinen gilt

[1]) Vergl. Fresnel. Pogg. Ann. vol. 12, pag. 380. Airy. Pogg. Ann. vol. 23, pag. 207.

$$s \sin (vt - x) \cos (\alpha - \beta)$$
$$s \sin (vt - x - \Delta) \sin (\alpha - \beta)$$

und nach der Zerlegung mit dem analysirenden Nicol

$$s \sin (vt - x) \cos (\alpha - \beta) \cos \beta$$
$$s \sin (vt - x - \Delta) \sin (\alpha - \beta) \sin \beta$$

Diese beiden Strahlen werden sich vereinen nach der bekannten Interferenzformel (56) zu einem Strahle, dessen Intensität durch das nachstehende Quadrat der Amplitude gemessen werden kann.

$$J_r = s^2 \left[\cos^2\beta \cos^2(\alpha\ \beta) + \sin^2\beta \sin^2(\alpha-\beta) + 2\sin\beta\cos\beta\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta)\cos\frac{2\pi}{\lambda}\Delta\right] \quad (249)$$

addirt man zum zweiten Theile dieser Gleichung einmal mit positiven, einmal mit negativen Zeichen, $2 \sin\beta \cos\beta \sin(\alpha - \beta) \cos(x - \beta)$, so geben die zwei ersten Glieder dann ein vollständiges Quadrat, das dritte Glied wird der Coefficient von $\left(\cos \frac{2\pi}{\lambda} \Delta - 1\right)$

Reducirt man diese Ausdrücke, so erhält man

$$J_r = S^2 = s^2 \left(\cos^2 a - \sin 2\beta \sin 2(\alpha - \beta) \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta\right) \quad (249\text{a})$$

Wird der obere Nicol um 90° aus seiner Stellung gedreht, so ändert sich $\beta$ in $(90 + \beta)$, $\alpha$ in $(90 + \alpha)$ und wir erhalten

$$J'_r = S_1^2 = s^2 \left[\sin^2 \alpha + \sin 2\beta \sin 2(\alpha - \beta) \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta\right] \quad (249\text{b})$$

Durch Vergleichung dieser beiden Formeln erkennt man unmittelbar, dass die Intensitäten und daher auch die Farbenerscheinungen für je zwei zu einander senkrechte Stellungen des analysirenden oder auch des polarisirenden Nicols complementär werden.

Für $\alpha = o$ wird

$$J_r = s^2 \left(1 + \sin^2 2\beta \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta\right) \qquad J'_r = s^2 \left(- \sin 2\beta \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta\right) \quad (249\text{c})$$

Das Maximum der Intensität und Färbung tritt auf, wenn $\alpha = o$ und $\beta = 45$ ist, dann wird

$$J_r = s^2 \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta \qquad J'_r = - s^2 \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta \quad (249\text{d})$$

Geht man nun zur Ermittlung der Werthe $\Delta$ über, so erkennt man aus dem früheren 232, dass $\Delta = d \left(\frac{\cos r'}{v'} - \frac{\cos r}{v}\right)$, wo unter $v$ und

$v'$ die Geschwindigkeit der beiden doppelt gebrochenen, entgegengesetzt polarisirten Strahlen zu verstehen ist. Nur für den Fall, dass die Doppelbrechung nicht bedeutend, ferner der Incidenzwinkel klein ist, kann hiefür als Annäherung gesetzt werden

(243) $$\Delta = d\,(\sqrt{\mu^2 - \sin^2 i} - \sqrt{\mu_1^2 - \sin^2 i_1})$$

worin mit $\mu$ und $\mu_1$ die Werthe der Brechungsexponenten für die in der Plattenebene liegenden Hauptschwingungsrichtungen bedeuten.

Für den Fall, dass diese Differenz der Wellenlänge proportional wird

(250) $$\Delta = \lambda,\quad 2\lambda,\quad 3\lambda$$

wird für J das Maximum der Intensität eintreten.

Wir gelangen somit hier zu denselben Bedingungen, wie im vorhergehenden Paragraphe. Ist für das ganze einfallende Lichtbündel der Winkel $i$ constant, also parallel einfallendes Licht vorhanden, so bleibt auch der Werth $\Delta$ in 243 constant und es tritt die Dicke der Platte mit der Wellenlänge in unmittelbare Abhängigkeit, und die Farben dünner Plättchen erscheinen.

Ist die Platte an allen Punkten gleich dick, so erscheint dieselbe bei senkrecht einfallendem Lichte ($i = o$) gleichmässig gefärbt und zwar in jenen Farben, für welche am nächsten ist

(250a) $$d = \frac{\lambda}{\mu - \mu'} \ldots \frac{2\lambda}{\mu - \mu'} \ldots \frac{x\lambda}{\mu - \mu'}$$

Das Minimum der Intensität muss dann eintreten, wenn (vergl. 249) unabhängig von dem Werthe von $\Delta$, die Neigung der Schwingungsebenen von Nicol und Plättchen Null sind, also $\beta = 0$ oder $\alpha = \beta$. Es wird somit bei zwei zu einander senkrechten Stellungen des Plättchens Dunkelheit eintreten.

§. 100. B) Farbenringe der Krystallplatten. In Vorhergehendem ward die Anwendung von parallel einfallendem Lichte vorausgesetzt, die Erscheinungen der Interferenzfarben in Krystallplatten ändern jedoch ihren Charakter, wenn ein conischer Lichtbüschel einfällt, für dessen einzelne Partien somit der Incidenzwinkel variirt. Aus der Discussion der obigen Gleichung 243, 250 erkennt man, dass für jedes Theilchen wegen der Variation von $i$ auch $\Delta$ sich ändert, und dass somit selbst bei gleichbleibender Dicke der Platte, letztere nicht mehr einfärbig erscheinen kann. Die Farben werden mit dem Incidenzwinkel variiren und jede einzelne Farbe wird so oft auftreten und sich wiederholen können, als die (vergl. 243) annähernde Gleichung erfüllt ist

(251) $$\frac{\sin^2 i}{2} = \frac{x\lambda - d(\mu - \mu')}{d\left(\frac{1}{\mu'} - \frac{1}{\mu}\right)}$$

worin $x$ die Reihe der fortlaufenden Zahlen von 1 . . . bedeutet.

Bereits aus dieser Gleichung ersieht man, dass bei conisch einfallendem Lichte dieselbe Farbe, welche in der Mitte der Platte herrscht, noch mehrmals und zwar in einer krummen Linie auftreten muss, für welche das Einfallsloth der Coordinatenmittelpunkt ist.

Weiters ist in

$$\frac{x\lambda}{\mathrm{d}} = (\mu - \mu') + \frac{\sin^2 i}{2}\left(\frac{1}{\mu'} - \frac{1}{\mu}\right) \tag{252}$$

die Constanz von $\lambda$ die Bedingung einer isochromatischen Curve. Führt man nun in der Gleichung 252 statt $\mu$ $\mu'$ die richtigen, dem jedesmaligen Werthe von $i$ entsprechenden Zahlen $v$ $v'$ ein, welche bekanntlich nach 123 Functionen von $i$ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sind, so kann man $\lambda$ abhängig von den Constanten der Platte und der Lage der Wellennormale darstellen.

Zur vollständigen Gleichung der isochromatischen Curve gelangt man durch zwei Methoden. Man kann einerseits die Gleichung der Curve suchen, bezogen auf das Einfallsloth des Coordinatenmittelpunktes und erhält $\lambda$ als Function von sin $i$, sin $\Pi$, cos $\Pi$ (vide 143c) oder zweitens man kann die Curve auf die optischen Axen als Leitpunkt beziehen und die Gleichung als Function der Distanz jedes Curvenpunktes von den beiden optischen Axen angeben. Für den ersten Fall, welcher die allgemeine Lösung enthält, ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu} = \frac{v_2^2 - v^2}{v_2 + v_1} &= \frac{1}{2\mathfrak{b}} \left\{ {}^1/_2(\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{c}^2)[\cos(\psi_2 - \psi_2'') - \cos(\psi_1' + \psi_1'')] \right\} \\ \mu - \mu' &= \frac{1}{2\mathfrak{abc}} \left\{ {}^1/_2(\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{c}^2)[\cos(\psi_2 - \psi_2'') - \cos(\psi_1' + \psi_1'')] \right\} \end{aligned} \tag{253}$$

Ist der Unterschied zwischen den Brechungswinkeln $r_1$ $r_2$ beider Wellen nicht zu vernachlässigen, so muss $(\psi_1 - \psi_1'')$ und $(\psi_2' - \psi_2'')$ ausgewerthet werden. Diess erfordert, dass aus (159) die Sinusse $\psi_1 .. \psi_2$ ermittelt werden, wobei in erster Annäherung statt $\sin r' = \mathfrak{a} \sin i$, statt $\sin r'' = \mathfrak{c} \sin i$ gesetzt werden kann. Dadurch folgt als allgemeine Function

$$\lambda = f(\mathfrak{abc}\, \Psi \Psi' \Delta)\, F(\sin^m i)\, F_1(\pm \cos^n \Pi)\, F_2(\mp \sin^p \Pi)$$

als Gleichung für die Wellenlänge: bezogen auf das Einfallsloth als Coordinatenmittelpunkt und die Halbirungslinie des Winkels $2\Delta$ (welcher von den Ebenen (Fig. 36) zwischen den beiden Axen und dem Einfallslothe gebildet wird) als Coordinatenaxe. Man kann hierin sin $i$ annähernd als Radius vector $R$, cos $^2\Pi$ als $y$, sin $^2\Pi$ als $x$ bezeichnen, wodurch die Gestalt der Curve auf rechtwinkelige Coordinaten $x\,y$ bezogen erscheint. Bei dieser Untersuchung wird das Einfallsloth immer

als Centralpunkt der Curve betrachtet. Diese Methode muss jedenfalls dann [1] angewendet werden, wenn die aus dem Einen Incidenzwinkel $i$ entstehenden Werthe der Brechungswinkel $r_1$ $r_2$ der beiden Strahlen sich von einander sehr unterscheiden, also für grosse Doppelbrechung.

Etwas einfacher und durchsichtiger gestaltet sich die Gleichung der Curve, wenn man dieselbe unter Voraussetzung einer geringen Doppelbrechung von dem Brechungswinkel und den Distanzen der gebrochenen Wellennormale zu den optischen Axen abhängig macht.

Ist es nämlich möglich als erste Annäherung $\sin r_1 = \sin r_2 = \mathfrak{b} \sin i$ zu setzen, eben so auch $\psi_1$; $\psi_1'' = \psi_2'$; $\psi_2''$, so gibt die Gleichung für die Wellenlänge aus 252 und 253.

$$\frac{x\lambda}{\mathfrak{d}} = \frac{\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{c}^2}{2\mathfrak{b}} \sin \psi_1 \sin \psi''' \left(\frac{1}{2\mathfrak{a}\mathfrak{c}} + \frac{\sin^2 r}{2\mathfrak{b}^2}\right) \tag{254}$$

Man könnte in dieser Gleichung noch weiters $\sin r$ nach 158 als Function von $\psi_1$ $\psi_2$, $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ darstellen, doch mag selbst die Discussion der Gleichungen genügen, um die isochromatische Curve als Function der Lage der interferirenden Wellennormale auf der Krystallplatte zu finden. Unabhängig von der Discussion von $\psi'$ $\psi''$ $r$ lässt die obige Gleichung bereits erkennen, dass die Anzahl der auftretenden Curven desto grösser, oder ihre Radiusvectoren $R$ um so kleiner sind, je grösser die Dicke der Platte, je grösser die Doppelbrechung $(\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{c}^2)$ und je kleiner die mittlere Brechung $\mathfrak{b}$ ist. Man erkennt diess, wenn man zwei Platten bezüglich der auftretenden Anzahl der Farbencurven vergleicht, unter der Voraussetzung, dass die Grenzcurve beiderseits unter den gleichen Winkeln $\psi_1$ $\psi_2''$ $r$ gebildet wird. Es verhalten sich dann

$$x\lambda : x\lambda = \frac{\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{c}^2}{2\mathfrak{b}}\, \mathfrak{d} : \frac{\mathfrak{a}_1^2 - \mathfrak{c}_1^2}{2\mathfrak{b}_1}\, \mathfrak{d}' \tag{255}$$

worin $xx'$ die Anzahl der von der Grenzcurve umschlossenen isochromatischen Curven angibt. Verkehrt proportional der Anzahl der Curven muss jedoch ihre gegenseitige Distanz sein, woraus folgt, dass der Radiusvector $R$ der Curven ebenfalls ihrer Anzahl verkehrt proportional ist. Man erhält daher; setzt man statt $\sin \psi''$ $\sin \psi'''$ die Radienvectoren $R'$ $R''$ vom Curvenpunkte zu den optischen Axen; bei Vergleich zweier Platten

$$\frac{\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{c}^2}{2\mathfrak{b}}\, \mathfrak{d} : \frac{\mathfrak{a}_1^2 - \mathfrak{c}_1^2}{2\mathfrak{b}_1}\, \mathfrak{d} = R_1' R_1'' : R' R'' \tag{256}$$

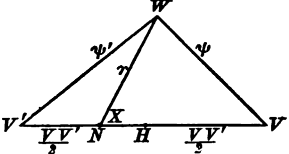
als erste Annäherung.

§. 101. Die isochromatischen Curven. Die Beobachtung der Gleichungen 256 und 256 genügt, um die Form der isochromatischen Curven

[1] Für mehrere specielle Fälle, wo bedeutende Vereinfachungen möglich, hat Radicke Optik. vol. I. 8. Abschn. diese Methode befolgt.

annähernd zu erkennen. Würden in Gleichung 254 die Winkel $\psi_1\, \psi'' r$ solche Werthe haben, dass man sin $r$ vernachlässigen und statt sin $\psi_1$ sin $\psi_2$ die Winkel setzen dürfte, so würde die ($\lambda$ = Constanz) Constanz des Productes der Radiusvectoren $\psi_1\ \psi_1''$ (vergl. 256) die isochromatische Curve als eine Lemniscate bezeichnen, für welche die optischen Axen ebenfalls die Leitpunkte bilden. Hiervon weicht die Gestalt der Curve um so mehr ab, je grösser $r_1$, d. h. je näher die Curve dem Rande des Gesichtsfeldes und je grösser $\psi\psi$, d. h. je grösser die Nummer $x$ der beobachteten Curve in der Reihenfolge ist; doch ist der Grundzug der Curve durch die Constanz des Productes sin $\psi'$ sin $\psi''$ bedingt[1]).

Fig. 63.



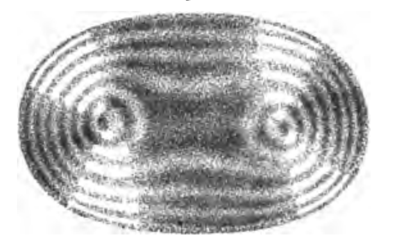

Vorerst mögen die für die practische Beobachtung wichtigsten Fälle hervorgehoben werden. Sei die **zweiaxige** Krystallplatte so geschnitten, dass das Einfallsloth in die Axenebene fällt. Sei Fig. 63 $\frac{VV'}{2}$ die halben Axenwinkel, $X$ die Distanz des Einfallslothes $N$ von dem Halbirungspunkte $H$ des Axenwinkels, so ist, wie leicht ersichtlich

$$\sin^2 r = 1 - \cos^2 r = 1 - \left( \frac{\cos\psi}{2\cos\left[\frac{VV'}{2} + X\right]} + \frac{\cos\psi'}{2\cos\left[\frac{VV'}{2} - X\right]} \right)^2 \qquad (257)$$

Substituirt man diess in 254, so sieht man die Form der Lemniscate am reinsten dargestellt, wenn $X = 0$ und die Limite von $\cos\frac{VV}{2} = 1$, d. h. wenn das Einfallsloth in die Mitte des Axenwinkels fällt und letzterer nicht gross ist[2]). In diesem Falle nun treten die bekannten Farbenringe der zweiaxigen Krystalle auf, welche die untenstehende Figur 64 zeigt.

Von dieser Gestalt weichen die auftretenden Farbenringe um so mehr ab, je mehr das Einfallsloth $N$ sich von dem Halbirungspunkte $H$ des Axenwinkels entfernt und einer optischen Axe $V$ nähert. Die Curven werden elliptisch und für den Fall, dass das Einfallsloth mit einer optischen Axe wirklich zusammenfällt, kreisförmig. Letzteres erkennt man auch aus 254

Fig. 64.



[1]) Die vollständige Gleichung der Lemniscaten ist $(x^2 + y^2 + a^2)^2 = a^2 (b^2 + 4x^2)$ und ihre Gestalt ähnlich Fig. 64. Für sie ist das Product der Radien zu den beiden Leitpunkten constant.

[2]) Die Abweichung der isochromatischen Curven selbst für den Fall $X = 0$ sind bei grossem Axenwinkel beträchtlich. Vergl. Zech. Pogg. Ann. vol. 102, pag. 361.

Denn ist die Plattenebene senkrecht gegen eine Axe, fällt also $N$ mit $V^1$, zusammen, so kann statt sin $r_1$ gesetzt werden sin $\psi'$ und für grössere Werthe von $VV'$ und kleine Werthe von $\psi'$ auch sin $\psi'' =$ sin $VV' =$ sin $\psi'$, wodurch $\lambda$ eine Function von $\psi'$ wird, d. h. die Curven nahe um die Axe $V$ als Kreise erscheinen. Die in der Reihenfolge $x$ höheren Curven werden, namentlich für kleine Axenwinkel $VV'$ sich rasch der elliptischen Form nähern.

Sei nun zweitens das Einfallsloth $N$ gegen die Ebene der optischen Axen um den Winkel $N$ geneigt, so fällt das Glied sin $r$ je nach der Lage des Einfallslothes in's Gewicht, denn hier wird annähernd sein

$$r = N \pm \frac{\psi + \psi'}{2} \tag{258}$$

wo das positive Zeichen für die Wellennormale jenseits der Axenebene, das Minuszeichen für die Wellenebene, welche diesseits der Axenebene, zwischen dieser und dem Einfallslothe liegt, Geltung hat.

Aus (258) und (254) erkennt man, dass die Abweichung der isochromatischen Curve (immer noch auf die optischen Axen als ihre Leitpunkte bezogen) um so grösser sein wird, je grösser $N$, d. h. je mehr die Plattennormale gegen die Axenebene geneigt ist. Ferner lehrt 258, dass die Curve 254 auf beiden Seiten der Axenebene nicht mehr symmetrisch ist, sondern sich auf der dem Einfallslothe abgewendeten Seite dem flach elliptischen, auf der dem Einfallslothe zugewendeten Seite hingegen dem hyperbolischen nähert. Der Krümmungsmittelpunkt dieser Curven liegt jedoch immer in den optischen Axen. Je grösser $N$ und je grösser also auch $\psi'$ $\psi''$, desto mehr verflachen sich auch die dem Einfallslothe näher liegenden Curven und gehen successive in Parabeln und sehr flach gekrümmte, selbst gerade Linien über. Letzteres für den Fall, dass das Einfallsloth senkrecht auf der Axenebene steht.

Betrachtet man einaxige Krystalle, wo $\psi^1 = \psi''$, so ist die Grundform der isochromatischen Curven der Kreis. Der Fall, dass das Einfallsloth in der Axenebene liegt, reducirt sich auf die Bedingung, die Platte sei senkrecht gegen die optische Axe geschnitten. Für diese Voraussetzung ist $r = \psi$ und die isochromatische Curve bildet einen Kreis, dessen Centrum in der optischen Axe liegt. Weicht die Plattennormale von der optischen Axe ab, so bleibt wohl letztere noch immer Krümmungsmittelpunkt, doch da wie oben (258), $r = N \pm \psi$, so wird die Curve für die jenseits der Axe liegenden Wellennormalpunkte elliptisch, für die dem Einfallsloth zugewendete Wellennormale hingegen hyperbolisch werden. Diese letztgenannten hyperbolischen Curven verflachen sich immer mehr, je grösser die Neigung der Einfallslothe zu den optischen Axen wird, und gehen daher für $\psi = 90^0$ $N = 90^0$, d. h. für

Platten, die parallel der optischen Axe geschnitten sind, in gerade Linien über. Das Centrum einer solchen Platte, für welche Lim. $\psi = 90^0$ $r = 0$, wird einfach gefärbt erscheinen, und diese Orte homogener Färbung werden sich um so weiter vom Centrum aus ausbreiten, je weniger convergent das einfallende Licht und je paralleler die Platte der optischen Axe ist [1]). Hiermit sind die für die Zwecke der angewandten Physik nöthigsten Fälle erörtert [2]) unter der Voraussetzung linearer Doppelbrechung in der Platte. Hat die Platte hingegen circulare Polarisation, so ändern sich die Erscheinungen theilweise, wie wir später sehen werden.

§. 102. **Die Intensitätsverhältnisse isochromatischer Curven.** Die Lage der relativ helleren und dunkleren Stellen in den isochromatischen Curven (Fig. 64) erhält man durch Discussion [3]) der für die Intensität im Allgemeinen geltenden Formel (249a). Aus letzterer Formel erhellt nämlich, dass die Intensität aller jener Punkte, für welche gilt

$$\sin 2\beta \sin 2(\alpha - \beta) \sin \frac{2\pi}{\lambda} \varDelta = 0 \tag{259}$$

mit jener Intensität übereinstimmen wird, die die gekreuzten Nicol ohne die dazwischen liegende Platte zeigen würden. Diess Product wird Null, wenn $\varDelta = 0$, also in den Axenpunkten, oder zweitens wenn $\beta = 0$, oder wenn $\alpha = \beta$. Diese letztere Bedingung lehrt, dass die Minima der Intensität für jene Fälle eintreten, wo die Schwingungsrichtung des oberen Nicols mit der Hauptschwingungsrichtung der Platte zusammenfällt oder auf derselben senkrecht steht, $\beta = 0$ oder $\beta = 90^0$; oder wenn mit der letztgenannten Richtung die Schwingungsrichtung des unteren Nicols (denn diess ist durch $\alpha = \beta$ angezeigt), übereinstimmt.

---

[1]) Man kann also die Form dieser isochromatischen Curven im convergenten Lichte als ein Charakteristikon benützen, um zu erkennen, ob eine einaxige Krystallplatte der Axe parallel geschnitten ist. Lässt man den Lichtstrahl nach seinem Durchgange durch die Platte reflectiren und nach der Reflexion mit einem Gangunterschiede von $\frac{1}{4}\lambda$ wieder durch die Platte gehen, so wird das Resultat dieser doppelten Interferenz für den Fall, dass $N = 90$, (258) eine gleichmässige Färbung der Platte sein; für $N < 90$ treten hingegen Interferenzcurven auf. Diess Mittel, ob Curven bei doppeltem Gange des Lichtstrahles auftreten oder nicht, benützt Soleil (C. r. XLI. 669. Pogg. Ann. vol. 97, 155), um Quarzplatten parallel der Axe zu schneiden und zu prüfen. Eine Theorie hierfür gibt Senarmont in Ann. de Chim. Phys. 1856, vol. XLVI.

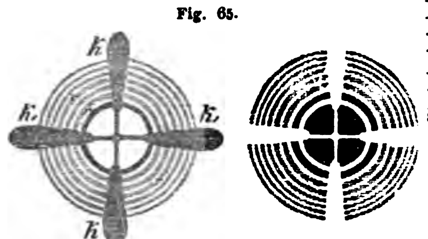
[2]) Ueber die wohl nur für die theoretische Optik wichtige Ableitung der wahren Gleichung der Farbenringe ein und zweiaxiger Krystalle existiren mehrere Ableitungen. Vergl. Brewster. Philos Transactions. London 1818. Biot. Mém. l'Institut 1818. Airy. Pogg. Ann. vol. 23, pag. 211. Neumann. Pogg. Ann. vol. 33, pag. 257. Müller J. Pogg. Ann. vol. 33, pag. 282, vol. 44, pag. 273. Langberg. Pogg. Ann. Ergänzungsb. 51a pag. 435. Ohm. Abhandl. Münchner Acad. 1851, II. Ser. vol. 7, pag. 43 und 265. Zech. Pogg. Ann. vol. 97, pag, 129. vol. 102, pag. 354. Lommel. Pogg. Ann. vol. 120. Die allgemeinsten Formeln gibt Zech.

[3]) Vergl. Lommel. Pogg. Ann. 1863. vol. 120, pag. 82.

Es hängt somit die Curve der Intensitätsmaxima und Minima von der Lage der Hauptpolarisationsrichtungen in der Platte ab. Betrachtet man im Nachfolgenden nur die senkrecht zur Axenebene geschnittenen Platten, so wird, um diese Intensitätscurven darzustellen, vorerst die Lage der Hauptschwingungsrichtungen bestimmt werden müssen.

In einaxigen Platten sind alle Richtungen senkrecht gegen die Hauptaxe äquivalent, daher die Maxima und Minima der Intensität parallel den Schwingungsrichtungen des Analyseur und Polariseur liegen. Sie bilden daher ein rechtwinkeliges Kreuz (Fig. 65), welches die concentrischen Farbenringe durchschneidet. Je nachdem die beiden Nicols parallel oder senkrecht zu einander sind, entsteht ein helles oder dunkles Kreuz.

Fig. 65.



Analoge Verhältnisse herrschen bei den zweiaxigen Krystallen, doch liegen die Punkte der grössten Dunkelheit nicht senkrecht gekreuzt, sondern in einer Hyperbel (Fig. 66). Der Grund dieser Erscheinung ist darin zu suchen, dass die Schwingungsrichtung jedes Strahles den Winkel zwischen Wellennormale und beiden optischen Axen halbiren muss. Es könne also gleichzeitig nur an jenen Punkten Dunkelheit eintreten, für welche die Schwingungsrichtungen sowohl obiger Bedingung entsprechen oder auch selbst immer in einerlei Richtung ($\sphericalangle a$) gegen die Axenebene gleich geneigt bleiben.

Fig. 66.

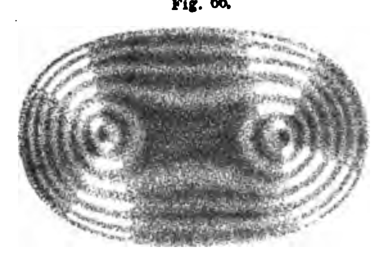
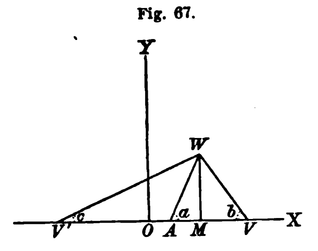


Fig. 67.




In dem Dreiecke (Fig. 67) zwischen Wellennormale und beiden optischen Axen sieht man, dass wenn $AWV' = AWV$, auch $180 + c - b = 2a$, wenn nun $WM$ als $y$, $OM$ als $x$ bezeichnet wird, so ist

$$\text{tang } c = \frac{y}{\frac{VV'}{2} + x} \qquad \text{tang } b = \frac{y}{\frac{VV'}{2} - x}$$

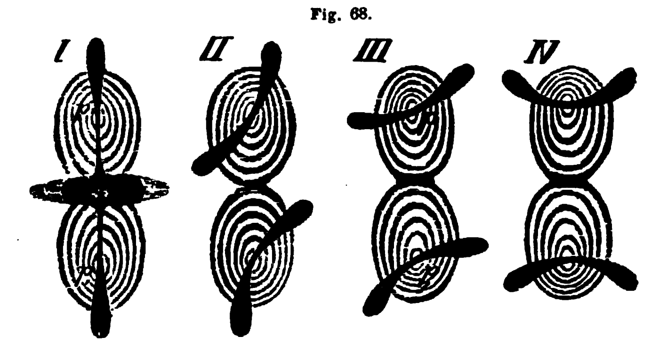
folglich

$$\text{tang } (b - c) = \text{tang } 2a = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - \left(\frac{VV'}{2}\right)^2} \tag{260}$$

was die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel darstellt, die wegen des constanten Gliedes $\left(\frac{VV}{2}\right)^2$ in 260 durch die optischen Axen gehen muss. Für lim. $VV = 0$ geht die Hyperbel nahe in eine gerade Linie (Kreuz Fig. 65) über.

Die Lage der Asymptoten dieser Hyperbeln (Fig. 66) wird durch die Neigung $\beta$ der Polarisationsebene des Nicols gegen die Axenebene der Platte bestimmt. Sei $\beta = 0$ in 258, und fallen diese beiden Vibrationsrichtungen zusammen, so sind die Asymptoten der Hyperbel die Axenebene und deren Normale. Ist noch weiters der Winkel der optischen Axen gering, so stossen die beiden Hyperbeläste an einander und bilden ein Kreuz (vide Fig. 68 I). Ist aber die Polarisationsrichtung des Nicols gegen die

Fig. 68.




Axenebene geneigt, so öffnet sich das Kreuz, die Hyperbeläste öffnen sich immer mehr, Fig. 68 II, III und erlangen für den Werth $\beta = 45$ die Stellung von IV, bei welcher Stellung die kleinste Distanz beider Hyperbeln (da letztere durch die Axen gehen müssen) mit der Distanz der optischen Axe zusammenfällt. Letztere $pp_1$ bilden, wie man ersieht, die Mitte der beiden kreisförmigen innersten ($x = 1$) isochromatischen Curven, und durch sie gehen die beiden Hyperbeläste.

§. 103. Einfluss der Circularpolarisation auf die Gestalt der isochromatischen Curven. Um den Einfluss der Circularpolarisation auf die isochromatischen Curven zu bestimmen, ist es nur nöthig, an den Formeln 249 jene Glieder hinzuzufügen, welche die constante Verzögerung um $\frac{\lambda}{4}$ einer der Componenten des circular polarisirten Strahles ausdrückt.

Es ist nun möglich, dass auf eine linear polarisirende Krystallplatte circular polarisirtes Licht auffällt oder die Platte selbst kann circular polarisirend sein. Ich werde für diese Fälle, da die Rechnungen bloss in Addition und Subtraction von Sinus und Cosinus be-

stehen, bloss ihre Methode angeben, und verweise auf die Ausführung von Airy[1]).

a) Würde eine linear polarisirende Platte angewendet und zwischen Polariseur und Platte ein circular polarisirendes Medium gebracht, so ist ausser auf die Werthe von $\alpha$, $\beta$ noch Rücksicht zu nehmen auf den Hauptschnitt des circular polarisirenden Mediums (sei es eine Viertelundulationsglimmerplatte oder ein Fresnel'sches Parallelepiped) und dessen Winkel $\varrho$ zu dem Hauptschnitte des Polariseur. Es ist nämlich der circular polarisirte Lichtstrahl zu zerlegen in die zwei Componenten $a \sin \varrho$, $a \cos \varrho$, von welchen die zweite um $\frac{\lambda}{4}$ zurückbleibt. Es werden daher im Krystalle die beiden Schwingungen erregt

$$\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}vt-x\right) \text{ und } \sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(vt-x+\frac{\lambda}{4}\right)=\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(vt-x\right)$$

und daher folgt statt 229

$$s\cos\beta\left[\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt-x)\sin\varrho\sin\{\varrho+(\alpha-\beta)\}+\cos\frac{2\pi}{\lambda}(vt-x)\cos\varrho\cos\{\varrho+(\alpha-\beta)\}\right]$$

$$+s\sin\beta\left[\cos\frac{2\pi}{\lambda}(vt-x+\Theta)\cos\varrho\sin\{\varrho+(\alpha-\beta)\}-\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt-x+\Theta)\sin\varrho\cos\{\varrho+(\alpha-\beta)\}\right]$$

Die Intensität folgt hieraus zu

$$(261)\; J_t = \frac{s^2}{2}\Big[1+\cos 2\varrho\cos 2\beta\cos 2\{\varrho+(\alpha-\beta)\}+\cos\frac{2\pi}{\lambda}\Theta\sin 2\varrho\sin 2\beta\sin 2\{\varrho+(\alpha-\beta)\}- \sin\frac{2\pi}{\lambda}\Theta\sin 2\varrho\sin 2\beta\Big]$$

welcher Ausdruck für circularpolarisirtes Licht, wo $\varrho = 45^0$, $\cos 2\varrho = 0$ sich auf das 1. und letzte Glied reducirt.

b) Sei nun aber die Platte selbst elliptisch polarisirend, wobei das Verhältniss der Ellipsenaxe $1 : E$ sei, und zwar für rechtsdrehende sei $E$ positiv, für linksdrehende negativ genommen, so müssen, wenn auch linearpolarisirtes Licht einfällt, doch in 249 statt der beiden circularen Strahlen ihre linearen Componenten wieder gesetzt werden, also $\sin \xi$ und $\sin \xi + \frac{\lambda}{4} = \cos \xi$, wir erhalten daher nach der Zerlegung mit dem Analyseur folgende Schwingungen (wobei $\xi$ statt $\frac{2\pi}{\lambda}[vt - x]$ gesetzt ist)

---

[1]) Airy. Cambridge. Phil. Transact. vol. IV. Pogg. Ann. vol. 23, pag. 264.

$$S = \frac{s}{1+E^2} \cos\beta \left\{ \cos(\alpha-\beta) \left[ \sin\xi + E^2 \sin\left(\xi + \frac{2\pi\Theta}{\lambda}\right)\right] + E \sin(\alpha-\beta) \left[\cos\xi - \cos\left(\xi + \frac{2\pi\Theta}{\lambda}\right)\right]\right\}$$
$$+ \frac{s}{1+E^2} \sin\beta \left\{ \sin(\alpha-\beta) \left[E^2 \sin\xi + \sin\left(\xi + \frac{2\pi\Theta}{\lambda}\right)\right] - E\cos(\alpha-\beta)\left[\cos\xi - \cos\left(\xi+\frac{2\pi\Theta}{\lambda}\right)\right]\right\}$$

Reducirt man diess, so erhält man nach **Airy** für die Intensität

$$J_r = s^2 \left(\frac{1-E^2}{1+E^2}\right)^2 \cos^2(\alpha - 2\beta) \sin^2\frac{\pi\Theta}{\lambda} + s^2 \left(\cos\alpha \cos\frac{\pi\Theta}{\lambda} + \frac{2E}{1+E^2} \sin\alpha \sin\frac{\pi\Theta}{\lambda}\right)^2 \tag{262}$$

und wenn $\alpha = 90$, d. h. wenn die beiden Nicols senkrecht gegen einander auf ihr Minimum der Intensität eingestellt sind

$$J_r = s^2 \left(\frac{1-E^2}{1+E^2} \sin^2 2\beta + \frac{4E^2}{(1+E^2)^2}\right) \sin\frac{2\pi\Theta}{\lambda} \tag{263}$$

Die Gleichung gibt gleichzeitig die Intensität und die isochromatische Curve an, indem sie eine Function von $\Theta$ und $\lambda$ ist.

Was $\Theta$ betrifft, so wird diese Phasendifferenz nicht bloss wie $\Delta$ 243 von $\cos r \cos r' \mu \mu'$ abhängen, sondern auch ein bloss von Circularpolarisation abhängiges Differenzglied enthalten müssen. Die Bestimmung des letzteren ist für die bisher bekannten Fälle der Circularpolarisation, die sich auf wenige rhomboedrische Krystalle bei parallelem Durchgang des Lichtes mit der optischen Axe beschränken, möglich, indem wir bereits gesehen, dass dieser Unterschied der beiden circularpolarisirten Strahlen durch $(\mu' - \mu)\,\pi = \vartheta\lambda$ gegeben ist. Wir erhalten somit für die Phasendifferenz bei circularpolarisirenden Medien

$$\Theta = d\left(\frac{\cos r}{v} - \frac{\cos r'}{v'}\right) + \frac{d\vartheta\lambda}{\pi} \tag{264}$$

Da bei den einaxigen Medien die dem Quarz oder Zinnober für die Circularpolarisation bekannt, letztere nur in der Richtung der Axe bedeutend, so sind auch nur Platten senkrecht zur optischen Axe zu bemerken.

Wir erhalten aus 263 wegen $J = 0$ für $\frac{\pi\Theta}{\lambda} = 0, = \pi = 2\pi$ die Nachweisung dunkler isochromatischer Kreise. Die Mitte zeigt keine dunklen Flecken, sondern vielmehr jene Farbe, die der Dicke der circu-

larpolarisirenden Platte entspricht. Es existirt somit nicht wie bei den gewöhnlichen einaxigen Krystallen ein Kreuz.

Spuren eines solchen treten vom Centrum entfernter [wo die Circularpolarisation (196a) geringer] auf (vgl. Fig. 69), und zwar wird dieses Minimum der Intensität für $\beta = 0 = 90$ eintreten, was die Existenz senkrechter Aeste bedeutet.

Fig. 69.

c) Schliesslich ist noch der Fall zu erörtern, dass auf circularpolarisirende Platten selbst circular polarisirtes Licht einfällt, und nach dem Austritt aus der Platte durch den linearpolarisirenden Nicol betrachtet wird.

Die vollständige Entwicklung würde zu einer Combination führen von 261, 262; nimmt man jedoch den einfachsten Fall an, dass $\varrho = 45^0$, so erhält man nach dem Durchgang durch die rechtsdrehende Krystallplatte, wenn man $\left[\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) - 45\right] = \xi$ setzt, für die Vibrationen

$$\begin{array}{ll} O_{o1} & (1 - E)\cos(\xi - [\alpha + \beta]) \\ O_{o2} & E(1 - E)\sin(\xi - [\alpha + \beta]) \\ E_{e1} & E(1 + E)\cos(\xi - [\alpha + \beta]) \\ E_{e2} & -(1 + E)\sin(\xi - [\alpha + \beta]) \end{array}$$

Der analysirende Nicol combinirt nur

$$(O_{o1} + E_{e1})\cos\beta + (O_{o2} + E_{e2})\sin\beta$$

woraus man nach Airy für die Intensität erhält

$$J_r = \frac{s^2}{2}\left[1 - \frac{2E(1-E^2)}{(1+E^2)^2}\cos 2\beta + \frac{1-E^2}{1+E^2}\left(\frac{2E}{1+E^2}\cos 2\beta\cos\frac{2\pi\Theta}{\lambda} + \sin 2\beta\sin\frac{2\pi\Theta}{\lambda}\right)\right]$$

Der zweite Factor lässt sich, wenn man einführt

$$2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$$

und

$$\tan\beta' = \frac{1 + E^2}{2E}\tan 2\beta \tag{265}$$

verwandeln und man erhält für die Intensität

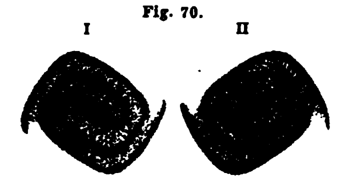
$$J_r = \frac{s^2}{2}\left(1 - \frac{2E(1-E^2)}{(1+E^2)^2}\cos 2\beta - \left[\frac{1-E^2}{1+E^2}\sqrt{\left(\frac{4E^2}{1+E^2}\cos^2 2\beta + \sin^2 2\beta\right)}\left\{1 - 2\cos^2\left(\frac{\pi\Theta}{\lambda} + \frac{\beta'}{2}\right)\right\}\right]\right) \tag{266}$$

Die Form der isochromatischen Curven bestimmt das letzte Glied, aus welchen für das Minimum die Bedingung folgt, $\cos^2\left(\frac{\pi\Theta}{\lambda} + \frac{\beta'}{2}\right) = 0$. Da $\beta'$ nahe proportional $\beta$ ist, so kann man für das Minimum sagen

$$\frac{\pi\Theta}{\lambda} = \frac{\pi}{2} - \beta; \quad . \quad . \quad . \qquad (266a)$$

$\Theta$ und daher auch der Incidenzwinkel nimmt immer zu, wenn $\beta$ abnimmt, das zeigt, dass die Curve eine Spirale ist und zwar in negativer Richtung gedreht. Im vorliegenden rechtsdrehenden Falle ist $E$ positiv, folglich die Spirale links gewunden (Fig. 70 I), würde ein linksdrehender Krystall untersucht, so wäre $E$ negativ und die Spirale rechts (Fig. 70 II) gedreht.

Fig. 70.




Wäre hingegen nicht wie oben betrachtet, das circularpolarisirende Mittel zwischen Polariseur und Krystallplatte, sondern dem Auge zugewandt, also zwischen Platte und linearen Analyseur, so kehrt sich die Ordnung der Spiralen um und der Sinn der Drehung wird im Krystall und in der Spirale gleich.

Man kann diesen Versuch zur Verification mittelst der Turmalinzange und einer Viertelundulations-Glimmerplatte anstellen. Bei einer Stellung, die entspricht der Anordnung Viertelundulation, Quarz, Auge entstehen Spiralen entgegengesetzter Drehung, dreht man die Turmalinzange, also auch die Ordnung um, Platte, Viertelundulation, Auge, so entstehen Spiralen gleicher Drehung.

§. 104. **Combination zweier Platten.** 1) Sind zwei oder mehrere linearpolarisirende Krystallplatten über einander combinirt und deren isochromatische Curven zu bestimmen, so ist nebst der Orientirung der ersten Platte $\alpha, \beta$, auch noch $\gamma$ für den Winkel des Hauptschnittes der zweiten Platte zum analysirenden Nicol zu bestimmen und $\psi$ für den Winkel, welchen die Hauptschnitte beider Platten machen. Seien zwei Platten, so wird der einfallende Strahl durch sie in 4 Strahlen gebrochen, deren Amplituden [1]) sind:

$$\begin{array}{ll} O_o & s \cos(\alpha + \beta) \cos\psi \sin\xi \\ O_e & s \cos(\alpha + \beta) \sin\psi \sin(\xi + \Delta') \\ E_o & -s \sin(\alpha + \beta) \sin\psi \sin(\xi + \Delta) \\ E_e & +s \sin(\alpha + \beta) \cos\psi \sin(\xi + \Delta + \Delta') \end{array}$$

worin $\Delta$ die Phasendifferenz in der ersten, $\Delta'$ die Phasendifferenz der beiden Strahlen in der zweiten Platte bedeutet.

---

[1]) Langberg. Pogg. Ann. Ergänzungsband 51 a.

Durch den analysirenden Nicol werden wieder die Strahlen

$$(O_e + E_o) \cos \gamma + (O_e + E_e) \sin \gamma$$

combinirt, woraus sich die Intensität berechnet zu

$$\begin{aligned} J_r = s^2 \{ & \sin^2 \psi (\sin^2 (\alpha + \beta) \cos^2 \gamma + \cos^2 (\alpha + \beta) \sin^2 \gamma) \\ & + \cos^2 \psi (\sin^2 (\alpha + \beta) \sin^2 \gamma + \cos^2 (\alpha + \beta) \cos^2 \gamma) \\ & + \tfrac{1}{2} \sin 2\psi \sin 2\gamma (\cos^2 (\alpha + \beta) - \sin^2 (\alpha + \beta)) \cos 2\pi\Delta' \\ & + \tfrac{1}{2} \sin 2\psi \sin 2(\alpha + \beta)(\sin^2 \psi - \cos^2 \gamma) \cos 2\pi\Delta \\ & + \tfrac{1}{2} \sin (\alpha + \beta) \sin 2\gamma [\cos^2 \psi \cos 2\pi(\Delta + \Delta') - \sin^2 \psi \cos 2\pi(\Delta - \Delta')] \} \end{aligned} \tag{267}$$

Auf die zahlreichen möglichen Combinationen kann hier nicht eingegangen werden, zu bemerken ist nur, dass die totale Phasendifferenz nach dem Durchgang durch zwei Platten sich leicht ergibt zu

$$\nabla = \frac{v}{\lambda} \left[ d \left( \frac{\cos r'}{v'} - \frac{\cos r''}{v''} \right) + d_1 \left( \frac{\cos r_1'}{v_1'} - \frac{\cos r_1''}{v_1''} \right) \right] \tag{268}$$

Diese Gleichung für die totale Phasendifferenz genügt ebenfalls, um die isochromatische Curve zu bestimmen, wenn die Werthe für $v$ und $r$ der Lage der Einfallsebene entsprechend substituirt werden. Im Allgemeinen wird man erkennen, dass durch das Hinzutreten der zweiten Platte, je nachdem für diese letztere die Phasendifferenz $v_1' - v_1''$ positiv oder negativ ist, die ursprüngliche Differenz in der ersten Platte vermehrt oder vermindert werden kann. Ersteres entspricht einer Vergrösserung, das zweite einer Verminderung der Dicke einer Platte und ersteres gibt daher eine Verengerung der isochromatischen Curven, letzteres eine Erweiterung (vergl. 256).

2) Wären die combinirten Platten nicht linearpolarisirend, sondern circularpolarisirend, so müssten die vier aus der ersten Platte austretenden Componenten der Strahlen noch der Einwirkung der zweiten Platte unterworfen werden. Nach dem Austritt aus der zweiten Platte müssen dann vier Componenten vorhanden sein, deren jede aber aus zwei Gliedern bestehen muss.

Unter der Voraussetzung, dass $\alpha = 90$, d. h. die beiden Nicols gekreuzt, weiters, dass die dem Auge näher liegende Platte linksdrehend, die entferntere rechtsdrehend sei, fand Airy[1]) für die Intensität

$$J_r = s \frac{(1 - E^2)^2}{(1 + E^2)^4} \left\{ [16 E^2 \cos^2 2\beta + 4 (1 + E^2)^2 \sin^2 2\beta] \left[ \sin^2 \frac{\pi\Theta}{\lambda} \sin^2 \left( \frac{\pi\Theta}{\lambda} - \beta \right) \right] \right\} \tag{269}$$

wo $\beta'$ durch 265 bestimmt ist.

[1]) Airy. Pogg. Ann. vol. 23, pag. 270.

Die Discussion lehrt wieder, dass das Minimum der Intensität auftreten kann, wenn

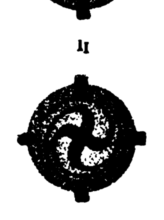
$$\frac{\pi \Theta}{\lambda} = 0 + \beta' = \pi + \beta' \ldots \tag{269a}$$

wodurch eine rechtsgedrehte Spirale angezeigt wird (Fig. 71 I).

Würde hingegen von beiden circularpolarisirenden Platten die rechtsdrehende Platte dem Auge näher sein, so wäre das Verhältniss zu verwechseln und die Spirale würde links gedreht erscheinen (Fig. 71 II).

Fig. 71.

I



II

Man kann diese sogenannten Airy'schen Spiralen aber nicht bloss durch zwei Platten erzeugen, sondern hierzu genügt auch eine Platte, wenn man den Lichtstrahl durch dieselbe zweimal in verschiedenen Richtungen gehen lässt. Diess lässt sich bewerkstelligen mit Zuhilfenahme eines unter 45° gegen die Lichtstrahlen geneigten planparallelen Glases, welches den Lichtstrahl von der Seite empfängt, reflectirt und nach abwärts durch die Krystallplatten schickt. Hinter der Krystallplatte ist wieder ein reflectirender Spiegel, dieser sendet den bereits circularpolarisirten Strahl nochmals durch die Platte in das Auge des Beobachters. Für solche und ähnliche Fälle genügt das ursprüngliche einfache Nörrenberg'sche Polarisationsinstrument, wenn man die Platte auf den unteren Spiegel legt.

§. 105. Beobachtung der isochromatischen Curve. Polarisationsinstrumente. Epoptische Figuren. Die bisher betrachteten isochromatischen Curven verdanken der Zerlegung des linearpolarisirten Lichtes ihr Dasein, und zu ihrer Betrachtung müssen daher im einfachsten Falle zwei Nicols genügende Dienste leisten. Letztere wendet man dann auch für die einfachen Farben dünner Plättchen an, für dickere Krystallplatten ist hingegen ihr Gesichtsfeld zu klein. Um letzteren Fall zu verbessern und namentlich die Axenplatten zweiaxiger Krystalle übersehen zu können, hat man mehrere Apparate gebaut. Ich will hier nur die wichtigsten und zweckmässigsten hervorheben.

Ist die Platte dick und gross, so genügt die Combination zweier Turmalinplatten, die parallel der Axe geschnitten sind.

Bekanntlich wird das senkrecht zur Hauptaxe des Turmalin schwingende Licht fast vollständig absorbirt, es bleiben somit nur die Schwingungen parallel der Axe wirksam[1]. Ueberdiess besitzen die Turmalinplatten

[1] Statt den Turmalin- wurden auch Herapathitplatten (schwefels. Jodchininkrystall) verwendet. Vergl. Herapath. Pogg. Ann. vol. 90, 616. Haidinger. Pogg. Ann. vol. 89, pag. 250.

ein grösseres Gesichtsfeld als die Nicols, und der einzige Nachtheil besteht in der meist grünen Färbung der Bilder. Sie werden zangenähnlich gefasst (vergl. Fig. 72) und die zu untersuchende Platte zwischen *ed*, nachdem die Schwingungsrichtungen von *e* und *d* senkrecht zu einander gestellt sind, gebracht. Ist das Axenbild des zweiaxigen Krystalls weit ausgedehnt, so vermag man dasselbe zu übersehen, wenn man die Turmalinzange nach rechts und links seitwärts dreht, wodurch die beiden Axenpunkte in's Gesichtsfeld kommen.

Fig. 72.

Für kleine Platten ist jedoch diese Methode unbrauchbar und man ist gezwungen für dieselben polarisirende Combinationen, die Mikroskopen ähnlich sind, zu verwenden. Das Princip aller dieser Instrumente ist im wesentlichen darin begründet, die aus der Platte divergent austretenden Strahlen mit einer Linse zusammenzufassen und etwas weniger divergent zu machen, um hierdurch eine grössere Partie des Gesichtsfeldes, der aus der Platte austretenden Strahlen, auf einmal übersehen zu können. In früherer Zeit waren die Apparate von Nörrenberg (ältere Art), Dove, Soleil-Dubosq im Gebrauch, jetzt wendet man sich mit Vorliebe entweder den von Nörrenberg[1]) oder von Decloizeaux[2]) angegebenen Principien zu.

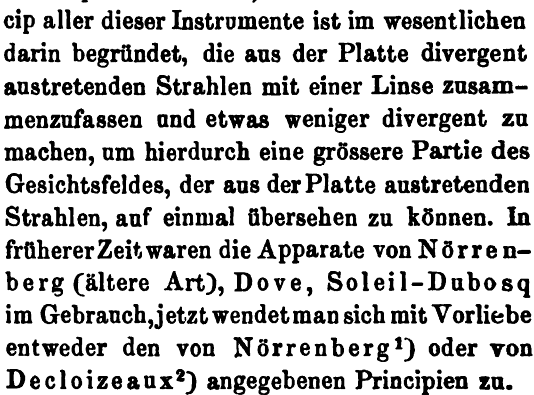
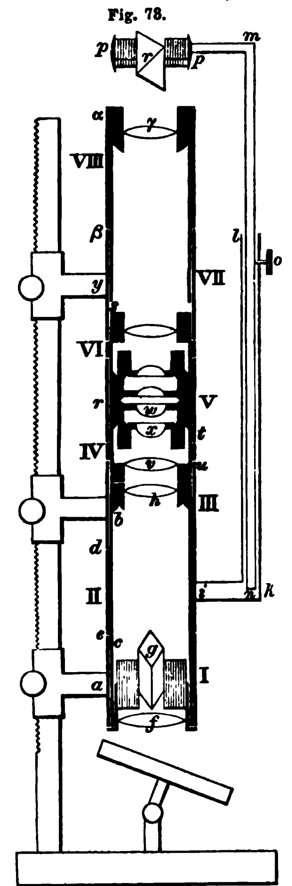


Fig. 73.



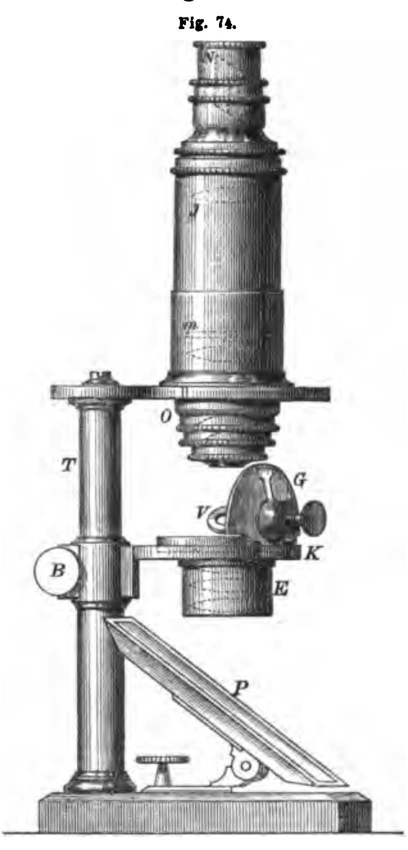
Beistehende Fig. 73 stellt einen solchen Nörrenberg'schen Apparat nach Brezina[3]) dar. Der Apparat besteht aus zwei symmetrischen Hälften II, III, IV und VI, VII, VIII, welche vermittelst des Triebwerkes einander genähert oder entfernt werden können. V ist ein Mittelstück, welches fremdes Licht abhält. I hält die Beleuchtungslinse und den polarisirenden Nicol und ist frei von den übrigen auf und abschiebbar. IV und VI sind gleich gebaut. Geht man genau auf die in der Zeichnung angegebenen Verbindungen ein, namentlich wie die einzelnen Theile als Träger wirken, so erkennt man, dass die beiden Nicols *r* und *g* unabhängig von den übrigen Theilen des In-

[1]) Vergl. Grailich. Preisschrift. I. Theil. pag. 43.
[2]) Descloizeaux. Mineralogie. Atlas. Livr. I. Fig. 1. 1862. Paris.
[3]) Brezina. Pogg. Ann. vol. 128, pag. 446.

trumentes um die Axe des Instrumentes gedreht werden können. Es ist diess wichtig, um die Reihenfolge I—IV der isochromatischen Figur (Fig. 68) hervortreten zu lassen, welche dann (in IV) zur Erkenntniss der Axenebene führt.

Dieser Apparat wirkt ferner wie ein schwaches Mikroskop, und lässt, wenn IV und VI nicht unmittelbar auf einander lagern, auch gleichzeitig alle inneren Unregelmässigkeiten der Platte sehen, ermöglicht somit nur die homogensten Partien zur Untersuchung zu wählen. Die zu untersuchende Platte wird auf die Linse *w* gelegt und der obere Theil mittelst des Triebwerkes *y* so lange genähert, bis die Farbenringe zum Vorschein kommen[1]). Die Grösse des Gesichtsfeldes hängt von der Wahl der Linsencombination ab. Im vorliegenden Nörrenberg'schen Apparat (auf 1/3 der Grösse reducirt) ist das Gesichtsfeld 120 — 130°. Will man noch Partien ausserhalb dessen zur Erscheinung bringen, so muss die Platte nicht horizontal, sondern mittelst keilförmiger Unterlagen geneigt auf *w* gelegt werden. Die Linsen *v x w* haben nach der Reihenfolge die Brennpunkte 45mm., 25mm., 20mm.. Die richtige Einstellung der Linsen ist bei der Anordnung vorliegender Apparate selbst für den Beobachter immer leicht. Der Deutlichkeit halber sind in Fig. 73 die Linsen *x* und *w* mehr von einander entfernt gezeichnet worden, als ihrer Brennweite entspricht.

Fig. 74.




Von theilweise anderer Anordnung ist Descloizeaux's Instrument (Fig. 74), welches gleichzeitig als Stauroskop und Axenmessapparat gebraucht werden kann. Die Polarisation des einfallenden Lichtes geschieht durch eine Combination mehrerer Glasplatten *P*, die von einem vorliegenden Spiegel ihr Licht empfangen. Der obere

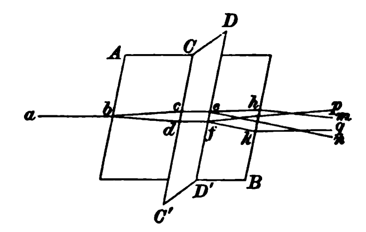
[1]) Es wird hier mit Vortheil ein Krystallträger analog dem unten beschriebenen von Descloizeaux angewendet.

Theil des Instrumentes ist einem Mikroskope (die drei Linsen bei *O* haben 24, 33, 67 Millimeter Brennweiten) analog gebaut und trägt bei *N* einen Nicol. Der Krystallträger *V* ist horizontal und vertical beweglich und seine Drehungen an den getheilten Kreisen *K* und *G* ablesbar. Das Gesichtsfeld ist gross und umfasst, da der Krystall *V* gedreht werden kann, fast vollständig 180°. Bei *m* ist ein getheilter Glasmikrometer. Statt desselben kann bei *m* eine Kalkspathplatte eingeschoben werden, wesshalb auch das Instrument als Stauroskop dienen kann. Aehnlich würde sich auch Nörrenberg's Instrument anwenden lassen, doch sprechen manche Gründe der Zweckmässigkeit für den Gebrauch eines speciell construirten Stauroskopes.

Es darf hier schliesslich nicht unerörtert bleiben, dass diese isochromatischen Curven in manchen Fällen auch ohne ein Polarisationsinstrument an einer Krystallplatte gesehen werden. Man pflegt sie dann epoptische Figuren eines idiocyclophanen Krystalls zu nennen, welche Ermann[1]) an einigen Arragonitplatten entdeckt hat.

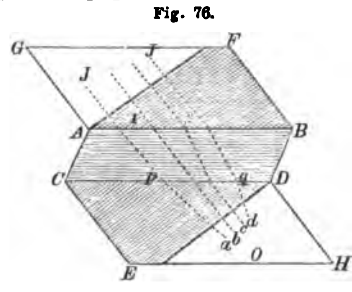
Die Ursache[2]) des Auftretens derselben ist nur darin begründet, dass ein Krystallplättchen zwischen zwei anderen Krystallprismen sich befindet, wie diess schon Fig. 75 zeigte. Die beiden seitlichen Prismen wirken wie Polariseur und Analyseur und es können daher Farbenringe sichtbar werden, doch werden mehrere Systeme gleichzeitig auftreten müssen.

Fig. 75.




Müller[3]) benützte diess, um durch künstliche Combination mehrerer Kalkspathe epoptische Figuren zu erzeugen. Die nebenstehende Zeichnung (Fig. 76) gibt von der Anordnung des sogenannten Müller'schen Glases genügende Aufklärung. *ABCD*, *ABF*, *CDE* sind drei auf einander gekittete Kalkspathrhomboeder. An den beiden äusseren wird ein Schnitt senkrecht zur optischen Axe geführt, *AF* und *ED*. Hierdurch erhält man ein Planparallelepiped, welches so orientirt ist, dass ein senkrecht auf *AF* auffallender Strahl *J* alle drei Prismen nahe parallel der Axe durchlauft. Er wird jedoch mehrfach gebrochen,

Fig. 76.




[1]) Ermann. Pogg. Ann. vol. XXVI, 302. Dove. Pogg. Ann. vol. 35, pag. 579.
[2]) Ueber Theorie vergl.: Wilde. Pogg. Ann. vol. 88, pag. 99. vol. 89, pag. 234, 402.
[3]) Müller. Pogg. Ann. vol. 41, 110.

kann man die geringe Doppelbrechung durch das meist dünne Plättchen *ABCD* vernachlässigen, so hat man beim Austritt aus *ED* vier Strahlen zu berücksichtigen, von welchen die beiden innersten *b*, *c* einerlei Schwingungsrichtung haben und sich daher in ein Bild vereinen. Die beiden Strahlen *a* und *d* geben jede für sich ebenfalls das Bild einer isochromatischen Curve. Da die Schwingungen der Strahlen von *a*, *d* senkrecht zu jenen von *bc* sind, so zeigen sich bei *ad* isochromatische Curven mit dunklem Kreuze, bei *bc* hingegen mit lichtem Kreuze (vergl. Fig. 65). Aehnliche Verhältnisse vermögen durch die wechselnde Combination der polarisirenden Platten die Zwillinge mancher Minerale, namentlich aber Arragonit zu erzeugen.

Durch diese bisher erörterte Combination von polarisirenden Mitteln mit der zu untersuchenden Platte vermag die isochromatische Curve sichtbar zu werden.

Die Betrachtung solcher isochromatischer Curven gibt nun nicht nur Aufschluss über die Lage der Elasticitätsaxen, sondern auch über Winkel und Lage der optischen Axen und die relative Grösse der Elasticitätsaxe, und bildet daher ein seit langem übliches Mittel, den optischen Charakter eines Krystalles auf kurzem Wege zu ermitteln, ohne die Bestimmung der Brechungsexponenten nöthig zu haben.

# XVI. Kapitel.

## Bestimmung des optischen Charakters und der Lage der Axen. Beziehung der Orientirung der optischen Eigenschaften zur Krystallform. Aufstellungsmethode.

§. 106. Die planplanen Krystallplatten, welche im polarisirten Lichte die isochromatischen Curven zeigen, dienen gleichzeitig zur Feststellung mehrerer den optischen Charakter des untersuchten Körpers bestimmenden Kennzeichen. Es sind diess namentlich die Lage der optischen Axen und die Grösse ihrer gegenseitigen Neigung, welche, wie aus dem §. 71 des Kapitels XII. erhellt, für die weitere Berechnung der Lage der gebrochenen Wellen von Nothwendigkeit ist. Wohl ergeben sich diese Daten durch Rechnung aus den drei Brechungsexponenten, allein sind diese unbekannt, so genügt auch die Untersuchung einer sogenannten Axenplatte, um die Kenntniss dieser Werthe zu erlangen. Man hat sich aber auch gewöhnt, diese Erforschung der — ich will sagen qualitativen — Doppelbrechung als genügend zu betrachten, und in den meisten Fällen das ungleich wichtigere Element, die Ermittlung der Quantität der Doppelbrechung, die der Brechungsexponenten, vernachlässigt. Und doch hätte eine einfache Ueberlegung gelehrt, dass ersteres ungenügend sei, indem ja eine Aenderung der Brechungsexponenten um 0·001 genügt, um die Lage und die Grösse der optischen Axen auf das empfindlichste zu stören.

Im früheren Kapitel XIV. wurden so vielfache Methoden angegeben, zur Kenntniss der Brechungsexponenten zu gelangen, dass deren Ermittlung in den meisten Fällen möglich ist. Eine Controle für die Werthe der Brechungsexponenten und der aus ihnen nach (127) gerechneten Axenwinkel gibt dann die Beobachtung der Axenplatten.

Aus dem Kapitel XII. ist ersichtlich, dass bezüglich der Grösse und Lage der optischen Axen die Krystalle in drei Hauptgruppen (§. 43)

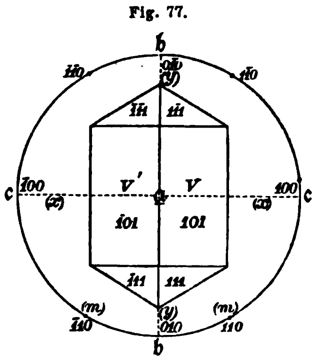
unterschieden werden: 1) die drei Brechungsexponenten $\mu_b$, $\mu_b$, $\mu_c$ sind gleich, keine optischen Axen vorhanden: tesserale Krystalle. 2) Zwei der Brechungsexponenten sind gleich $\mu_a = \mu_b$ und eine optische Axe vorhanden, welche mit der Krystallaxe *c* dieser pyramidalen und hexagonalen Systeme zusammenfällt. 3) Es sind in den prismatischen und klinischen Krystallen zwei optische Axen vorhanden, deren Lage im ersteren Systeme bloss von der Grösse, in dem letzteren aber auch von der Lage der Hauptschwingungsaxen (vergl. §. 76) abhängt.

Handelt es sich also vorerst um die Bestimmung der Lage der Ebene der optischen Axen und die Orientirung derselben gegen die Krystallaxen, so ersieht man, dass dieselben in den beiden ersten Fällen unzweideutig bestimmt sind.

1) Jede planplane Platte, welche senkrecht gegen die verticale Krystallaxe *c* im pyramidalen und hexagonalen Systeme geschnitten ist, zeigt im polarisirten Lichte die isochromatischen Kreise mit dem dunklen Kreuze (Fig. 65) in der Mitte des Gesichtsfeldes.

Es zeigt diess, dass die Plattennormale, also die Krystallaxe *c*, mit der Einen optischen Axe zusammenfällt. Ist die Platte schief gegen die Krystallaxe geschnitten, so liegt das Centrum der Farbenringe nicht in der Mitte des Gesichtsfeldes, und wendet sich bei einer horizontalen Drehung der Platte, ebenso sind die isochromatischen Curven von der Kreisform abweichend.

Fig. 77.




2) Bei den Krystallen der prismatischen Systeme hängt die Lage der optischen Axen bloss von der relativen Grösse der Werthe $\mu_a$ $\mu_b$ $\mu_c$ ab. Die optischen Axen müssen jedoch immer in einer der Coordinatenebenen liegen. Es genügt somit, zwei der den Pinacoiden 001, 010, 100 parallelen Platten zu untersuchen, indem die Erscheinungen der dritten Platte nur eine Folge sind von der Anordnung in den beiden ersten, und höchstens zur Controle dienen.

Projicirt man nebst den Flächen der Krystallplatten auch die Lage der optischen Axen, sowie auch die übrigen Elasticitätsaxen, soweit dieselben ihrer Grösse nach durch die Brechungsexponenten und Lage der optischen Axen bekannt sind, so erhält man eine (Fig. 77 für Arragonit) schematische Figur. Um die Orientirung der Elasticitätsaxen gegen die Krystallaxen bezeichnen zu können, empfiehlt sich die von Grailich[1])

[1]) Grailich und Lang. Sitzungsber. der Wien. Acad. 1857. XXVII, 3.

vorgeschlagene schematische Bezeichnung, die Elasticitätsaxen in der Reihenfolge aufzuschreiben, wie sie den Krystallaxen a, b, c [(100), (100), (001)] entsprechen, und, je nachdem a oder c die erste Mittellinie ist, a̲ oder ç im Symbol zu schreiben. Für die (Fig. 77) wäre das Schema cba̲; da c mit 100, b mit 010, a̲ mit 100 übereinstimmt. Je nach der Orientirung der Elasticitätsaxen sind die anderen Fälle möglich.

Zu bemerken ist, dass man bei Anwendung dieses Schema von zwei Voraussetzungen ausgehen könnte. 1) Es ist möglich, die Reihenfolge der Krystallaxen *abc* nur von ihrer relativen Grösse abhängig zu machen, wodurch die Wahl der Grundpyramide eigentlich der bestimmende Factor wird oder man kann 2) die Normale auf 100 immer mit a, die auf 010 mit b, die auf 001 mit c zu bezeichnen und ebenso durchwegs die Reihenfolge abc unabhängig von der Grösse beizubehalten.

Aus mehreren später entwickelten Grundsätzen (§. 115) halte ich es für zweckmässig, die erste Mittellinie immer mit der Axe c zusammenfallen zu lassen. Man hat daher nur die Combinationen abç, baç, bca̲, cba̲ zu unterscheiden. Bezüglich der Krystallaxen a und b mag weiters immer vorausgesetzt sein, dass a sich auf den ersten, b auf den zweiten Platz bezieht, und dass a der Normale auf 100, b der Normale auf 010 entspricht. Um noch weiters jede Zweideutigkeit zu vermeiden, wird es zweckdienlich sein, eine solche Wahl der Grundpyramide zu treffen, dass immer a $>$ b und wenn leicht möglich auch b $>$ c wird.

Als Beispiele für diese schematische Bezeichnung erwähne ich nachfolgende prismatische häufig in Anwendung kommende Mineralien. Die Factoren der eingeklammerten Axenbuchstaben deuten an, welche Aenderung in der Wahl der Grundpyramide gegenüber den Angaben anderer Autoren (a′b′c′) angenommen wurden.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Arragonit . . . . . | (cba̲) | a:b:c | [½ c′] | = 1·5896 : 1 : 0·5727 |
| Cerussit . . . . . . | (bca̲) | a:b:c | [½ c′] | = 1·6394 : 1 : 0·5910 |
| Kalisalpeter . . . . | (cba̲) | a:b:c | [½ c′] | = 1·8115 : 1 : 0·6014 |
| Kieselgalmei . . . . | (abç) | a:b:c | | = 1·2776 : 1 : 0·6171 |
| Topas . . . . . . | (baç) | a:b:c | | = 1·8922 : 1 : 0·9024 |
| Brookit . . . . . . | (a̲ᵨbç) | a:b:c | | = 1·0591 : 1 : 0·9499 |
| Melliths. Ammoniak . | (bçᵨa̲) | a:b:c | | = 1·5475 : 1 : 0·5511 |
| Anhydrit . . . . . | (abç) | a:b:c | | = 1·0058 : 1 : 0·8946 |
| Baryt . . . . . . . | (abç) | a:b:c | | = 1·3120 : 1 : 0·8145 |
| Schwefel . . . . . | (baç) | a:b:c | [⅓ a′] | = 1·2301 : 1 : 0·7776 |

3) Bei den Krystallen des monoklinischen Systemes ist die Lage der zwei Hauptschwingungsrichtungen in der Zone der Symmetrie vorerst

durch das Stauroskop zu untersuchen. Ist deren Lage sichergestellt, so müssen (wenn nicht schon die Stauroskopplatte [010] die Axen zeigt) eine oder beide Platten senkrecht zu den in der Zone der Symmetrie liegenden Hauptschwingungsaxen geschnitten werden.

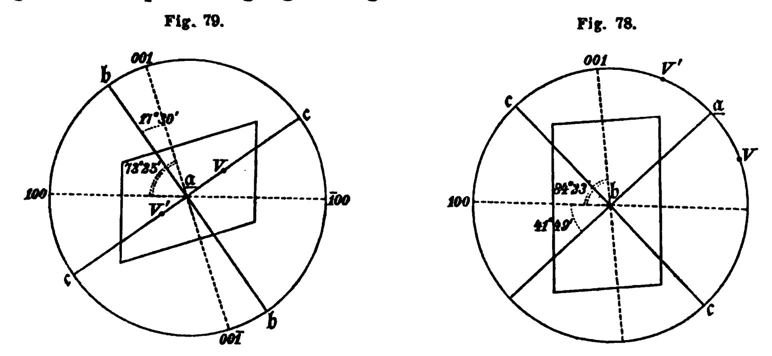



Fig. 79. Fig. 78.

Die Lage der optischen Axen kann also entweder in der Symmetrieebene oder in der zu derselben senkrechten Ebene liegen. Ersteren Fall nenne ich eine parallelsymmetrische (Fig. 78), den zweiten eine normalsymmetrische (Fig. 79) Axenlage. Analog wie beim prismatischen Systeme kann man eine abgekürzte Bezeichnung für [1]), die Orientirung der Elasticitätsaxen gegen die Krystallaxen 100, 001, 010 einführen, wobei es jedoch, sowie auch zur Zeichnung der Figuren 78 und 79 zweckmässig erscheint, die Symmetrieebene als Projectionsebene anzunehmen. Da ferner die Hauptschwingungsaxen nicht mit den Krystallaxen zusammenfallen, so muss der Winkel zwischen beiden Systemen ebenfalls angegeben werden. Man kann diesen Winkel in den Quadranten (100) (001) als positiv, hingegen in (001) ($\bar{1}00$) oder (100) ($00\bar{1}$) als negativ bezeichnen. Nach dieser Vorerörterung wird man erkennen, dass Fig. 78 (Essigsaure Magnesia) durch das Symbol (100) b$\underline{a}$ = —41° 49': Fig. 79 (Borax) durch (100) $\underline{a}$b = 55° 55' bezeichnet werden kann. Je nach der variablen Lage von $\underline{a}$, b, $\underline{c}$ wird das Symbol variiren, so wie man auch bei der Bezeichnung des Winkels von (001) ausgehen könnte.

Als Beispiele will ich einige wichtigere Mineralien anführen:

| | | |
|---|---|---|
| Amphibol | (100) b$\underline{a}$ | = 15° |
| Augit | (100) b$\underline{c}$ | = 51° 30' |
| Feldspath | (100) c$\underline{a}$ | = —22° 30' |
| Gyps | (100) b$\underline{c}$ | = 38° 20' |

4) Beim triklinischen Systeme wird die Herstellung der Stauroskopplatten unmittelbar auch die Platten liefern, welche die optischen

[1]) Murmann und Rotter. Sitzungsber. der Wien. Acad. 1859. XXXIV, 135.

Axen zeigen. Letztere sind in diesem System an keine krystallographische Symmetrie gebunden und daher keine einfache schematische Beziehung wie oben möglich. Wollte man für einen zonenreichen Krystall dennoch die Lage der Elasticitätsaxen zweifellos bestimmen, so würde man die Indices jener Flächen angeben müssen, mit deren Normalen die Elasticitätsaxen parallel sind; also $\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{b}$ normal auf $(hkl)$ $(pqr)$ $(mno)$. Für Albit wäre $\mathfrak{c}$ nahe normal zu (041).

§. 107. **Bestimmung der Winkel der optischen Axen für verschiedene Farben.** Die durch das obige Verfahren gewonnenen Axenplatten zeigen, wenn der innere Axenwinkel ($VV'$) nicht bedeutend ist, im Polarisationsmikroskop das vollständige Bild (Fig. 80) des äusseren Axenwinkels $EE'$.

Fig. 80.

Zu bemerken ist, dass die Distanz $EE'$, wie sie im Polarisationsmikroskop erscheint, den Winkel jener Strahlen angibt, welche den Krystall in der Richtung der Wellenaxen durchlaufen, und bei dem Austritte in die Luft noch weiter vom Einfallsloth weggebrochen werden. An diesem scheinbaren Axenwinkel $EE'$ lässt sich jedoch der innere wahre Winkel $VV'$ berechnen, denn (Fig. 80) ist II die Axenplatte, $i$ der Incidenzwinkel jenes Strahles, der in der Platte in der Richtung der wahren Axen gebrochen wird, so ist auch $\frac{VV}{2} = r$ und $\frac{EE'}{2} = i$, und daraus folgt

$$\mu_2 \sin r = \beta \sin \frac{VV'}{2} = \mu_1 \sin i = \mu_1 \sin \frac{EE'}{2}. \tag{270}$$

Für den Fall, dass das Axenbild in Luft austritt, ist $\mu_1 = 1$, für die andern Fälle muss für $\mu_1$ der Brechungsexponent des die Axenplatte umgebenden Mittels angewendet werden. Die Betrachtung dieser Gleichung lehrt daher weiters, dass der äussere scheinbare Axenwinkel um so grösser werden wird, je kleiner $\mu_1$ ist, hingegen dass für $\mu_1 > \beta$, selbst $EE' < VV'$ sein kann. Für jene Fälle, wo das Axenbild in Luft betrachtet wird, also $\mu_1 = 1$, wird $EE' > 180^0$ und der Axenstrahl somit nicht austreten, wenn $\beta \sin \frac{VV'}{2} > 1$ ist. In solchen Fällen, wo selbst die wahre Axenplatte im Polarisationsmikroskop kein Bild zeigt, ist die Untersuchung der Platte in einem andern umgebenden, stärker brechenden Mittel nothwendig [1]).

[1]) Man wendet als solche die Platte umgebende Mittel meist Mandelöl, $\mu_1 = 1{\cdot}47$—$1{\cdot}48$ oder Schwefelkohlenstoff $\mu_1 = 1{\cdot}62$—$1{\cdot}72$ an.

Aus dem einen in Luft oder einem andern Mittel beobachteten Axenwinkel $EE'$ ist die Ableitung des wahren inneren Axenwinkels (271) und hierdurch (127) die Controle der Brechungsexponenten möglich. Zu bemerken ist, dass vorzugsweise in der Axenebene nur der spitze Winkel ($VV' < 90^0$) der optischen Axen um die sogenannte erste Mittellinie (Bissetrix) in Betracht kommt und als sogenannter Axenwinkel immer nur dieser Winkel (pag. 189) verstanden wird.

Den Winkel der optischen Axen um die erste Mittellinie berechnet man, wenn $\underset{-}{a}$ die erste Mittellinie ist zu

$$\tan\frac{VV'}{2}=\frac{\gamma}{\alpha}\sqrt{\frac{\alpha-\beta^2}{\beta^2-\gamma^2}}; \qquad (271)$$

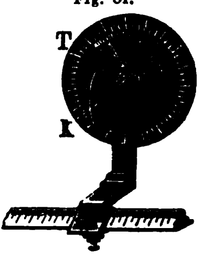
wenn $\underset{-}{c}$ die erste Mittellinie ist, zu

$$\tan\frac{VV'}{2}=\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{\frac{\beta^2-\gamma^2}{\alpha^2-\gamma^2}}, \qquad (272)$$

welche Formeln mit jenen von (127) identisch sind [1]). Es kann aber auch eine zur zweiten Mittellinie ($2m$) senkrecht geschnittene Platte benützt werden, wenn man nur bemerkt, dass der aus dem stumpfen Axenwinkel $(EE')_{2m}$ gerechnete Werth $(VV')_{2m}$ das Supplement zu dem spitzen Winkel $(VV')_{1m}$ oder $VV'_{1m} = 180 - (VV')_{2m}$ ist.

Um den scheinbaren Axenwinkel $EE'$ zu messen ist es nothwendig, dass im Gesichtsfeld des Polarisationsapparates ein Fadenkreuz gespannt sei, mit welchem durch successives Drehen der Krystallplatten um eine zur Axenebene senkrechte Axe erst der eine Axenpunkt $E$, dann der zweite Axenpunkt $E'$ zur Coincidenz gebracht wird. Der Drehungswinkel wird am Kreise abgelesen. (Vgl. Fig. 81). Der wahre Axenpunkt ist die Mitte des innersten Kreises, durch welche auch die dunkle Hyperbel läuft, in der Stellung (vide Fig. 80), wo die Axenebene um $45^0$ gegen die beiden Nicols gekreuzt ist.

Fig. 81.




Treten die Axen noch in Luft aus, so kann der Winkelmessapparat mit dem Polarisationsmikroskop verbunden sein [2]). Würde

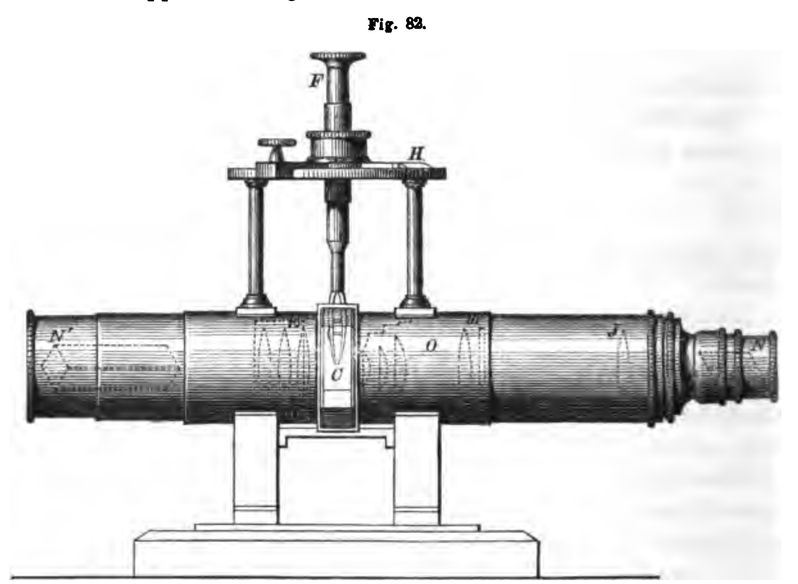
[1]) Grailich versuchte (Sitzungsber. der Wien. Acad. 1852. IX. 934) aus der gemessenen Grösse der Durchmesser der Lemniscaten die Distanz der Axen der Lemniscaten (d. i. $VV'$) zu berechnen. Ferner rechnet Descloizeaux aus den zwei beobachteten scheinbaren Axenwinkeln um die erste 1m und um die zweite 2m Mittellinie ohne Kenntniss von $\beta$ den inneren Axenwinkel, da

$$\tan\frac{VV'}{2}=\frac{\sin\,(EE')_{1m}}{\sin\,(EE)_{2m}}. \text{ (Ann. de Min. 1864.)} \qquad (273)$$

[2]) Steht kein Messapparat zu Gebote, so leistet die Vergleichung des zu bestimmenden Axenwinkels mit schon bekannten Axenwinkeln anderer Stoffe genügende Hilfe, wozu man in den Polarisationsapparat einen Glasmikrometer einlegt, welcher die horizontale Distanz beider Axen zu vergleichen ermöglicht.

jedoch der Axenwinkel zu gross sein, um in Luft austreten zu können, so muss die Krystallplatte in ein Oelgefäss, von planplanen Glasplatten gebildet, gebracht werden, in welches Oelgefäss *c* dann die Linsen des Polarisationsapparates eingeführt werden können (vrgl. Fig. 82)[1]. Der

Fig. 82.




Apparat erhält eine horizontale Lage und der getheilte Kreis bei *H* erlaubt die Drehung der Platte messen, welche nöthig ist, um successive beide Axenpunkte durch die Mitte des Gesichtsfeldes zu führen.

Diese Messung des Axenwinkels hat aber nicht bloss für eine Farbe zu geschehen, sondern für alle, namentlich für die beiden äussersten Farben[2]. Da nämlich der Axenwinkel noch 127 von $\alpha^2$ $\beta^2$ $\gamma^2$ absteigt, so ergiebt sich unmittelbar, dass je nach der Grösse der Dispersion der Brechungsexponenten auch der Axenwinkel mehr oder minder variiren muss. Wäre selbst der innere Axenwinkel $VV'$ constant, so müsste doch der äussere Axenwinkel wegen $\beta_v > \beta_\rho$, dann $EE'_\rho < EE'_v$ sein.

Aber auch der innere Axenwinkel variirt, wie selbst die Beobachtungen lehren, indem für manche Substanzen $VV'_\rho < VV'_v$ oder $VV'_\rho > VV'_v$ ist. Der letztere Fall wirkt der normalen Dispersion der

---

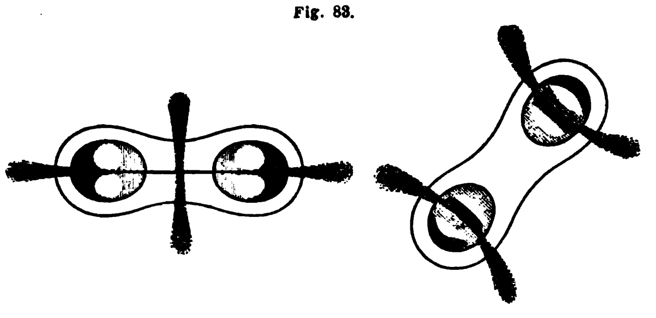
[1]) Grailich. Preisschrift 1857. Lang. Sitzungsber. der Wien. Acad. 1862. XLV. 587. 185? vol. LV. Descloizeaux. Ann. de Min. Tom. VI. 1864. Pogg. Ann. 125.

[2]) Die Messung des Axenwinkels hat im isochromatischen Lichte zu geschehen. Hierüber vergleiche Kap. XV, §. 80. Um die Farben des einfallenden Lichtes schnell variiren zu können, empfiehlt sich für grosse Platten das Dove'sche Dichroskop (Pogg. Ann. vol. 110, pag. 265), welches aus einem Glasplatteneinsatze besteht und das seitwärts einfallende blaue Licht durch Reflexion, das senkrecht einfallende rothe Licht hingegen durch Lamellarpolarisation polarisirt.

äusseren Axen $\varrho < v$ entgegen, daher es möglich ist, dass manchmal die durch äussere Dispersion, die wahre innere unkennbar gemacht ist. Man kann daher nur für den Fall, dass $EE'_{\varrho} > EE'_{v}$ ist, mit Sicherheit auf eine gleiche Dispersion der inneren Axen schliessen; der Fall $EE'_{\varrho} < EE'_{v}$ schliesst hingegen den Fall $VV'_{\varrho} \gtrless VV'_{v}$ nicht unbedingt aus. Man pflegt den Charakter der Dispersion des optischen Axenwinkels abgekürzt durch $\varrho \gtrless v$ zu bezeichnen.

Die Beobachtung dieser Dispersion erfolgt entweder im monochromatischen Lichte, oder auch durch Beurtheilung der isochromatischen Farbenringe [1]) im weissen Lichte. Der innere Centralring zeigt nämlich die Farben roth und blau, ebenso auch sind die Hyperbeln durch Farbensäume begrenzt. Für den Fall (vrgl. Fig. 83), dass das Roth sowohl die innerste Stelle im isochromatischen Kreise einnimmt, als auch die äussere concave Seite der Hyperbeln begrenzt, so ist hierdurch $\varrho < v$ bezeichnet. In

Fig. 83.



nebenstehender Figur ist $\varrho < v$, wenn die rothe Farbe durch Punkte, die blaue durch Striche angegeben ist; würden hingegen Striche und Punkte in der Figur ihre Bedeutung vertauschen, so dass also Blau den äusseren Saum der Hyperbel bildete, so würde hieraus folgern, dass der Axenwinkel Blau kleiner als für Roth ist.

Bei dieser Beobachtungsweise ist der Achromatismus der Linsen des Mikroskops nothwendig, um die Farbensäume ungestört [2]) zu sehen, namentlich, wenn die Dispersion schwach ist.

§. 108. **Bestimmung der Axenebenen für verschiedene Farben.** Im prismatischen Systeme ist wegen der Coincidenz von Elasticitäts- und Hauptschwingungsrichtungen die Axenebene immer mit einer der drei Coordinatenebenen zusammenfallend. Für die gewöhnlichen Vorkomnisse ändert sich auch bei verschiedenem farbigen Lichte die Lage der Axenebene nicht, und die Bedingung einer solchen Constanz ist, dass $\alpha_{\varrho} > \beta_{\varrho} > \gamma_{\varrho}$ und $\alpha_{v} > \beta_{v} > \gamma_{v}$, also dass die Brechungsexponenten durch die farbige Dispersion nicht in ihrem relativen Grössenverhältnisse

[1]) Vergl. Descloizeaux An. d. Min. 1864, vol. 6. Pogg. Ann. vol. 126, pag. 387.

[2]) Vergl. über solche Störungen Descloizeaux. Mém. II. Annal. de Min 1859. Tom. XIV, 343.

gestört werden. Für einige wenige Fälle, wo zwei der Brechungsexponenten nahe gleich sind, also der Krystall nahe dem einaxigen kommt, tritt jedoch eine Aenderung der Axenebenen für verschiedene Farben ein, wenn durch die Dispersion die relative Grösse der beiden nahegleichen Brechungsexponenten geändert wird. Ein solcher Fall tritt bei mellithsaurem Ammoniak ein, welches in nahe sechsseitige Säulen {(110), (100)} krystallisirt. Die erste Mittellinie a ist normal zur Fläche (001), während die Brechungsexponenten $\alpha$, $\beta$, welche den Diagonalen der Prismen (110) entsprechen, nahe gleich sind. Nun ist in Folge der verschiedenen Dispersion von $\alpha$ und $\beta$ für Roth $\alpha_{\rho} > \beta_{\rho}$; für Grün $\alpha_{\gamma\rho} = \beta_{\gamma\rho}$; für Blau $\alpha_{\beta\lambda} > \beta_{\beta\lambda}$; daher das Axenbild successive die Schemata $bca_{\rho}$; $bba_{\gamma\rho}$; $cba_{\beta\lambda}$ (*abc* in Fig. 84) darstellt. Ein analoges Verhalten zeigt Brookit, $abc_{\rho}$ und $bac_{v}$.

Fig. 84.

Während im prismatischen Systeme nur in seltensten Fällen eine solche Aenderung der Axenebene in Folge der ungewöhnlichen Dispersion der Brechungsexponenten eintritt, ist hingegen im monoklinischen und triklinischen Systeme in Folge der Abhängigkeit der Hauptschwingungsaxen von der Wellenlänge die Lage der ersten Mittellinie der optischen Axen ebenfalls von der Wellenlänge abhängig und variirt mit der Farbe (vergl. Fig. 76).

Fig. 85.

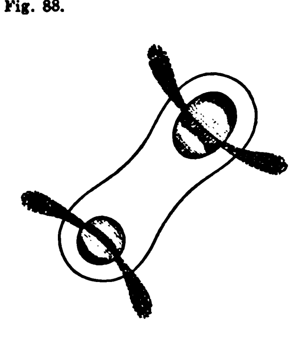
Man unterscheidet im **monoklinischen** Systeme zwei Hauptlagen der Axenebenen:

1) Die **parallelsymmetrische**, wo die Axen in der Symmetrieebene liegen (Fig. 85). Die Mittellinien für Roth und Violett bilden miteinander einen Winkel und die Axenbilder sind gegen einander verschoben (Fig. 86). Betrachtet man die

Fig. 86. Fig. 87.

isochromatischen Curven wie im vorigen Paragraphe, je nachdem $\varrho \gtrless v$, so werden die Farbensäume der Hyperbel asymmetrische Farben zeigen (Fig. 87. Diopsid). Ist die Dispersion der ersten Mittellinie nicht bedeutend, so werden die Farbensäume an der Hyperbel fast symmetrisch[1]. (Fig. 88, Gyps, zeigt $\varrho < v$.) Diese Dispersion nennt Descloizeau geneigt.

Fig. 88.



2) Die normalsymmetrische Axenlage bedingt die Lage der mittleren Elasticitätsaxe $\mathfrak{b}$ in der Symmetrieebene. Man kann hier zwei Fälle unterscheiden.

a) Die erste Mittellinie fällt mit der Axe der Symmetrieebene (010) zusammen. (Fig. 89, Borax.) Betrachtet man die Farbensäume, welche die Hyperbel umgeben, so sind auch, ganz analog mit der Kreuzung (Fig. 90) der Axenebene, die Farben in diesen Säumen kreuzweise vertheilt. (Fig. 91.) Descloizeaux nennt diese Dispersion gekreuzt[2]; sie ward zuerst von Herschel und Nörrenberg beobachtet.

Fig. 89.

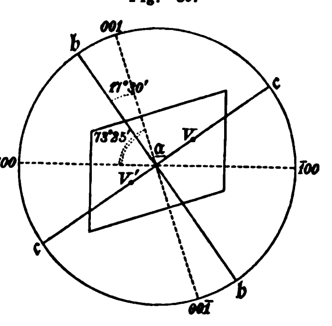



Fig. 90.

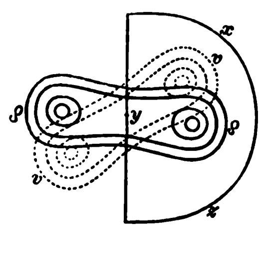
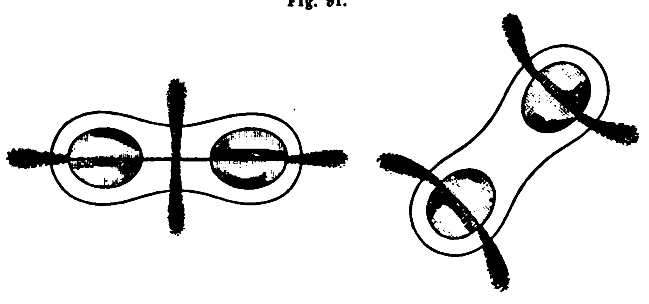



Fig. 91.



b) Der zweite Fall ist eine normalsymmetrische Axenlage, wo jedoch

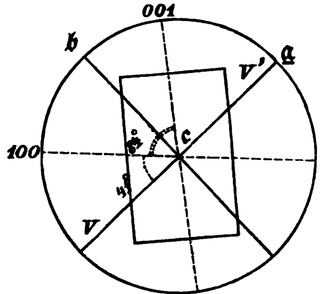
---

[1] Die beiden Farben roth und blau sind in den Holzschnitten durch Punkte oder Striche unterschieden.

[2] Descloizeaux. Ann. des Min. 1859. XIV.

die zweite Mittellinie mit der Axe der Symmetrie (010) zusammenfällt, die erste Mittellinie hingegen in der Zone der Symmetrie $xz$ liegt. (Fig. 92.)

Fig. 92.



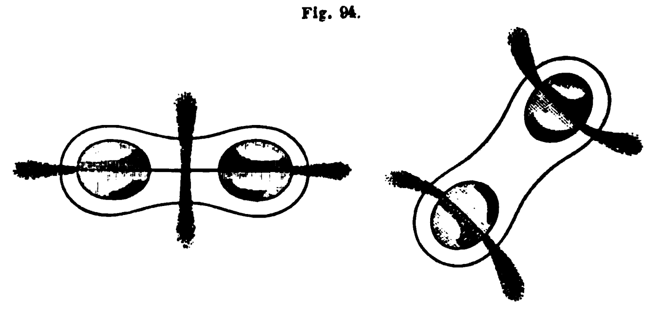

Man kann auch bereits aus der Farbenvertheilung im isochromatischen Bilde diese Dispersion (Fig. 93 Adular) der ersten Mittellinie erkennen, indem die Farbensäume der Hyperbeln analog (Fig. 94) auftreten. Descloizeaux nennt diese Farbenvertheilung im Axenbilde horizontal. Neumann [1]) hat diese Farbenvertheilung zuerst beobachtet. Es sind diese beiden Fälle a) und b) (Fig. 89 und 92) sich ergänzend, indem sie den abwechselnden normalsymmetrischen Lagen erster oder zweiter Mittellinie entsprechen.

Fig. 93.

Im triklinischen Systeme können wegen des Mangels einer Symmetrieebene mehrere dieser Fälle combinirt erscheinen.

§. 109. **Bestimmung der relativen Grösse der Elasticitätsaxen. Positiv und negativ.** Ist durch die Beobachtung einer Axenplatte die Lage der Axenebene und der mittleren Elasticitätsaxe gegeben, so ist noch zur vollständigen Bestimmung des optischen Charakters die Ermittlung nothwendig, ob die erste Mittellinie (Bissectrix) mit der kleinsten $\underline{c}$ oder grössten $\underline{a}$ Elasticitätsaxe zusammenfällt; der Krystall somit nach pag. 189 positiv ($\underline{c}$) oder negativ ($\underline{a}$) zu nennen sei. Die directe Bestimmung beruht auf der Kenntniss der Brechungsexponenten; fehlt diese, so können indirecte Methoden die relative Grösse der in der Platte liegenden Elasticitätsaxen angeben.

Fig. 94.



Diese Methoden beruhen auf der Combination einer Platte von schon bekanntem optischen Charakter mit jener zu untersuchenden, wo-

[1]) Neumann. Pogg. Ann. vol. 35, pag. 205.

durch Interferenzencurven (vergl. voriges Kapitel, §§. 103, 104) entstehen, welche nach dem Charakter der zu untersuchenden Platte variiren.

Das einfachste Verfahren besteht, namentlich für einaxige Krystalle, in der Combination zweier, die optischen Axen zeigenden Platten. Ist der optische Charakter beider Platten gleich, also die Differenzen $v - v^1$ in beiden einerlei Zeichen, so ist in Folge (267) der Effect der Combination einer Vermehrung der Plattendicke gleich, im entgegengesetzten Falle, wenn die Differenzen $v - v'$ in beiden Platten ungleiche Zeichen, also der optische Charakter beider Platten ungleich, so ist der Erfolg einer Verminderung der Plattendicke entsprechend. Ist somit der Charakter der einen Platte bekannt (Calcit a), so wird mit derselben die zu untersuchende Platte einerlei optischen Charakter haben, wenn die Durchmesser der isochromatischen Curven (analog einer Zunahme der Dicke) sich verengern und zahlreichere Curven auftreten. Erweitern sich die Durchmesser der Ringe und vermindert sich deren Anzahl, so haben beide Platten entgegengesetzten Charakter.

So findet man unter anderen positiv c die einaxigen Minerale: Quarz, Rutil, Zirkow, Zinnstein; hingegen negativ a: Calcit, Anatas, Apatit, Vesuvian, Beryle, Cornid, Turmalin.

Statt einer die Axen zeigenden Probeplatte können auch Interferenzplatten angewendet werden, bei welchen die beiden in der Plattenebene schwingenden Strahlen einen Gangunterschied von einigen Wellenlängen zeigen. Als solche werden meist die Spaltungsstücke (Axenplatten) von negativem Glimmer in solcher Dicke ($^1/_{36}$ mm.), dass sie einen Gangunterschied $^1/_4\,\lambda$ erzeugen, oder Quarzplatten, parallel der Axe, verwendet.

Wendet man ein Glimmerblättchen an, so ist der Erfolg dieser Combination, dass der Phasenunterschied in der zu untersuchenden Platte durch die Combination mit der Glimmerplatte um $^1/_4\,\lambda$ geändert wird, und zwar wird, da Glimmer c b a negativ ist, der in Platte und Axenebene des Glimmers liegende Strahl in seiner Geschwindigkeit verzögert, der darauf senkrecht schwingende vermehrt. Hierdurch verändern sich die Durchmesser der Farbenringe in den beiden Quadranten, und zwar parallel oder senkrecht zur Axenebene des Glimmers (dieselbe muss früher ermittelt sein durch Vergleichung mit bereits bekannten Platten), je nachdem die zu prüfende Platte mit Glimmer gleichen oder entgegengesetzten Charakters ist. Ueberdiess erzeugt die Viertelundulationsplatte circularpolarisirtes Licht, und zwar wenn die Axenebene nach rechts oben 45° geneigt ist, rechts circulares, wenn die Axenebene nach links oben liegt, links circularpolarisirtes Licht. Man kann somit auch

die Intensität[1]) der Combination beider Platten durch die Formel (240) berechnen. Letztere Formel lehrt, dass in der Mitte des Gesichtsfeldes in zwei gegenüberliegenden Quadranten Minima der Intensität auftreten, und zwar ist die Phasendifferenz $\varDelta$, also der optische Charakter der Platte dem des Glimmers (a) gleich, so sind die dunklen Flecke parallel der Axenebene des Glimmers liegend (Fig. 96); ist der Phasenunterschied entgegengesetzt, die Platte also positiv ç, so liegen die dunklen Intensitätsminima in einer Linie senkrecht (Fig. 95) gegen die Axenebene des Glimmers.

Fig. 96.



Fig. 96.



Diese Compensationsmethode wird hauptsächlich bei einaxigen oder zweiaxigen Platten mit kleinem Axenwinkel angewendet. Letztere pflegt man in einer Stellung zu untersuchen, wo die Hyperbeln sich zu einem Kreuze vereinen.

Schliesslich ist die Compensation mit nahe parallel der optischen Axe geschnittenen Quarzplatten zu erwähnen, welche für zweiaxige Platten von grossem Axenwinkel oder überhaupt für alle Platten die relative Grösse der beiden Schwingungsrichtungen zu ermitteln erlaubt. Diese Quarzplatten müssen nach der Methode von Biot etwas keilförmig aus dem Krystall geschnitten werden, so dass eine Fläche der Platte vollkommen parallel der optischen und krystallographischen Hauptaxe, die zweite Fläche hingegen um 3 — 4° gegen dieselbe geneigt ist. Hierdurch erhält man gleichsam eine Reihenfolge von verschieden dicken Platten, welche daher die durchgehenden Strahlen um einen Wegunterschied von einer verschiedenen Anzahl von Wellenlängen verzögern. Hat man keine so keilförmig geschnittene Platten zur Verfügung, so leistet dieselben Dienste eine zur Axe planparallel geschnittene Platte, wenn man dieselbe um eine in der Plattenebene liegende, zur Axe senkrechte, Linie nach auf oder abwärts dreht. Es ist diese Drehung einer Veränderung der Dicke der Platte analog. Da die Quarzplatte positiv ist, so ist der parallel der Axe schwingende Strahl um einige Wellenlängen verzögert. Man kann nun mit der Quarzplatte (wenn man dieselbe unter dem Polariseur einführt) einen Effect hervorbringen, der einer Verdünnung der zu untersuchenden Platte gleichkommt (d. h. die Farbenringe werden breiter und wandern vom Centrum zur Peripherie); wenn die Axe des Quarzes und die grössere Elasticitätsaxe in der Platte

---

[1]) Dove. Pogg. Ann. 40. Airy. Pogg. Ann. 23.

gleiche Richtung haben, indem hierdurch die Gangunterschiede $v - v'$ sich gegenseitig vermindern [1]).

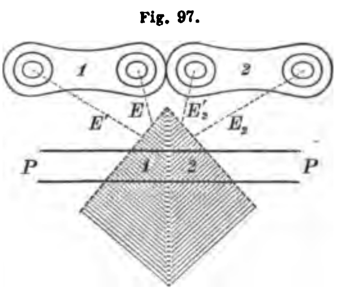
Wären aber Platten senkrecht zur zweiten Mittellinie oder Platten parallel der Axenebene (sowohl bei ein- als zweiaxigen Krystallen) zu untersuchen, welche für sich keine Interferenzcurven zeigen, so lässt die Combination mit Quarzplatten ebenfalls über die relative Grösse der zwei in der Platte liegenden Elasticitätsaxen entscheiden. Man wird nämlich zur Compensation eine oder mehrere Quarzplatten verwenden, bis man eine solche Dicke der Quarzplatte erzielt hat, welche den Gangunterschied der Strahlen in der Probeplatte so weit reducirt, dass Interferenzcurven auftreten. Letztere werden dann zuerst auftreten, wenn die Richtung der optischen Axe $\mathfrak{c}$ im Quarz mit der Richtung der grösseren Elasticität in der Probeplatte zusammenfällt.

Schliesslich ist die Bestimmung der relativen Grösse der Elasticität in sehr dünnen Plättchen zu erwähnen, welche nur die Farben dünner Plättchen zeigen. Man wird mit denselben ebenfalls Glimmer oder Quarz combiniren und erkennt aus dem Sinken oder Steigen der Farbe, d. h. der Wellenlänge, ob durch die Combination der Phasenunterschied der Strahlen (also einer Verdickung der Platte analog) vergrössert oder vermindert wird. Man kann hieraus schliessen, ob in beiden Platten die gleichliegenden Elasticitätsaxen gleiche oder ungleiche relative Grössen haben.

§. 110. Die anormalen Axenbilder können zumeist auf zwei hauptsächliche Ursachen, Zwillingsbildung oder gestörte Molekularlagerung zurückgeführt werden.

a) Die Zwillingsstructur vermag je nach der verschiedenen Zwischenlagerung der Zwillingslamelle variable Erscheinungen hervorzurufen. Sind die Zwillingslamellen so gelagert, dass beide nahe gleich gegen die Normale der Platte *PP* geneigt sind, so werden doppelte Axenbilder sichtbar werden (vrgl. Fig. 97), wo dieselben über einander greifen, wird durch Interferenz ein Theil der Lemniscate gestört und daher eine dunkle Partie entstehen.

Fig. 97.




Sind aber beide Zwillinge nicht gleich gegen die Normale der Platte geneigt, so ist es möglich, dass von einem Zwillingsindividuum

[1]) Man findet hierdurch bei senkrecht zu der ersten Linie geschnittenen Platten, ob die zweite Mittellinie grösser oder kleiner als die mittlere Elasticitätsaxe $\mathfrak{b}$ ist. Ersteres entspricht einem positiven, letzteres einem negativen Krystalle.

beide Axen $EE'$ austreten, während von der andern nur mehr eine Axe $E_2$ sichtbar wird, es erzeugt sich hierdurch ein der Fig. 98 ähnliches Axenbild.

Fig. 98.

b) Als zweite Ursache für die ungewöhnlichen Axenbilder ward die gestörte Molekularlagerung aufgeführt. Es werden unter diesem Begriff die Erscheinungen der lamellaren Polarisation begriffen.

Der Einfluss der Lamellarpolarisation äussert sich dadurch, dass durch den schichtenweisen Aufbau der Krystalle, unabhängig von der Doppelbrechung, ebenfalls eine Polarisation (vergl. Kapitel VIII, §. 46, pag. 117) des durchgehenden Strahles hervorgerufen und dadurch die normale Erscheinung gestört wird.

Die zahlreichen in den einfachbrechenden Krystallen des tesseralen Systeme durch Brewster und Marbach[1]) beobachteten Farbenerscheinungen, welche auf Doppelbrechung hinweisen, wurden von Biot[2]) als durch Lamellarpolarisation entstanden erklärt. Namentlich zeigen Analcim und Alaun solche Farbenerscheinungen (vergl. Fig. 99), welche wohl den einaxigen gleichkommen, jedoch keine regelmässig isochromatischen Curven zeigen. Letzteres ist ein Kennzeichen, dass die wenn auch etwa vorhandene Doppelbrechung nur sehr gering sein kann.

Fig. 99.



Weiters können aber auch in der tesseralen Substanz selbst feine Lamellen eines fremden Minerals verwachsen sein und hierdurch anormale Bilder hervorrufen. So zeigt Borazit die zweiaxigen Erscheinungen in Folge des eingesprengten Parisit[3]); Senarmontit zeigt auf den Würfelflächen eine Axe und nahe den Octaederflächen Lemniscaten.

Bei den einaxigen Krystallen tritt ziemlich häufig[4]) die Erscheinung auf, dass das Kreuz in der Mitte des Gesichtsfeldes nicht geschlossen, sondern sich vielmehr in zwei naheliegende Hyperbeläste auszudehnen scheint. Ist die Ursache hiervon eine Lamellarstructur, so wird die Oeffnung des Kreuzes unabhängig von der Stellung der Platte gegen die Nicols sein und bei horizontaler Drehung der Platte unverändert bleiben. Wäre jedoch wirkliche Zweiaxigkeit vorhanden, so müsste eine Axen-

---

[1]) Brewster. Optics pag. 245. Marbach. Pogg. Ann. vol. 94, 412. vol. 99, 451.

[2]) Biot. Ann. d. chim. III. Sér. XLIV. 48.

[3]) Volger. Monographie des Borazit. 1855. Descloizeaux. Ann. d. Min. 1864.

[4]) Beryll, Turmalin. Apophyllit, Zircon, Mellit, Idocras, Apatit, Corund, Anatas.

ebene existiren und die Oeffnung der Hyperbeln mit der Stellung der Platte gegen die Nicols variiren [1]) und bei einer Lage ihr Maximum erreichen (vergl. Fig. 68 I—IV).

Unumgänglich nothwendig ist, sich zu überzeugen [2]), ob diese Oeffnung des Kreuzes mit der Farbe und der Temperatur variirt, indem eine solche Variation jeden Zweifel an die wahre Zweiaxigkeit der Substanz ausschlösse. Ein Constantbleiben der Axenöffnung bei verschiedener Farbe und Temperatur schliesst hingegen die Zweiaxigkeit nicht unbedingt aus. (Vergl. später.)

Obgleich diese wahre oder scheinbare Zweiaxigkeit einaxiger, namentlich hexagonaler Krystalle, bereits seit langem durch die Untersuchung, namentlich von Senarmont, Silliman, Grailich, Descloizeaux an manchen Substanzen bekannt war, so ist es doch das Verdienst Breithaupt's [3]), wieder auf die Assymetrien hingewiesen zu haben, obgleich die von ihm versuchte Erklärung durch Aufstellung assymetrischer Krystallsysteme keine glückliche zu nennen war.

Betrachtet man nämlich alle diese Anomalien, wie sie sich sowohl im tesseralen als einaxigen Krystall zeigen, so kann ausser der Lamellarpolarisation [4]) auch die Annahme einer gesetzmässigen Doppelbrechung zu Hilfe gezogen werden. Es lässt sich nämlich nicht läugnen, dass die meist angenommene absolute Gleichheit der drei Brechungsexponenten im tesseralen Systeme und von zwei Brechungsexponenten bei einaxigen Krystallen eine theoretische Hypothese ist, und dass es der Beobachtung entspricht, diese Bedingung der Gleichheit als eine Limite zu betrachten, welcher sich die Körper mehr oder minder nähern.

Es ist diess analog den Krystallaxen; sowie diese eine vollständige Reihenfolge in dem von mir aufgestellten Schema bilden, so bilden auch die Brechungsexponenten eine vollständige Reihe von $\alpha = \beta = \gamma$; $\alpha = \beta \gtrless \gamma$; $\alpha \gtrless \beta \gtrless \gamma$. Adoptirt [5]) man eine solche Anschauungsweise, so verlieren alle Anomalien ihre Wichtigkeit. Bewähren sie sich in manchen Fällen als wirklich vorhanden und durch die Lamellarpolarisation nicht genügend erklärbar, so wird eben diess nur eine Verbesserung der ursprünglich nicht genügend bekannten Elemente sein.

---

[1]) Vergl. über die Unterscheidung nahe zweiaxiger Krystalle die Untersuchung von Grailich über Glimmer. Sitzungsber. der Wien. Acad. 1854.

[2]) Fast jede Krystallplatte zeigt inhomogene Partien, wo das Axenbild verschwommen ist. Es ist selbstverständlich, dass man im Polarisationsmikroskope die homogenen Stellen aufsucht, welche auch durch ihre gleichmässige Farbe (Farbe dünner Platten) erkennbar sind.

[3]) Breithaupt in Bornem. und Kerl: Berg- und hüttenmänn. Zeitung. Freiburg, 1860. vol. 19, pag. 98.

[4]) Der Haupteffect der Lamellarpolarisation besteht in der Erhellung der Mitte des Gesichtsfeldes. Jenksch erklärt diese Anomalien durch Verwachsungen mit Polumkehrung (Polestrophie). Berichte der Erfurter Academie 1861 und 1866.

[5]) Vergl. Schrauf. Pogg. Ann. 1861. vol. 114, pag. 121.

Ein tesseraler Krystall wird als pyramidal, ein hexagonaler oder pyramidaler Krystall wird dann als prismatisch zu betrachten sein[1]). Den optischen Abweichungen werden dann auch die krystallographischen analog sein, soweit meine Beobachtungen reichen, obgleich die Differenzen nur sehr gering sind. So hat man den zuerst als hexagonal bestimmten Carnallit später zweiaxig gefunden und daher als prismatisch betrachtet, während wieder anderseits die Krystallmessungen nicht ermöglichen, das optisch zweiaxige schwefelsaure Kali von dem einaxigen (also für hexagonal gehaltenen) schwefelsauren Kali zu trennen[2]).

§. 111. **Die Analogien zwischen hexagonalen und prismatischen Krystallen. Aufstellungsmethode der prismatischen Krystalle.** In vorhergehendem Paragraphe ward schon hervorgehoben, dass manche hexagonale Krystalle sich nur sehr schwierig von prismatischen unterscheiden lassen. Dieser Connex des Krystallsystems[3]) macht noch deutlich erkennen eine Gruppe von prismatischen Krystallen, welche ein natürliches Mittelglied und einen Uebergang zum hexagonalen System zu bilden scheinen. Als solche prismatische Krystalle mit hexagonaler Symmetrie können angeführt werden: Arragonit, Witherit, Strontianit, Cerussit, Chrysoberyll, Chrysolith, Cordierit, Alstonit, Skorodit, Leadhillit; — Topas — mellithsaures Ammoniak — schwefelsaures Kali, Magnesia, Zinkoxyd, Nickeloxyd; — chromsaures Kali, Magnesia; — salpetersaures Kali, Anilin, Harnstoff, Uranoxyd.

Diese Stoffe besitzen eine grosse Wichtigkeit, da dieselben auch optisch untersucht sind. Die Analogie[4]) beider Systeme geht nämlich bei diesen Substanzen noch weiter: Die erste Mittellinie der optischen Axen (gleichbedeutend mit der optischen Hauptaxe einaxiger Krystalle) ist parallel mit den Kanten des Grundprisma von 60° und wie bei den hexagonalen Krystallen steht dieselbe senkrecht auf der sechsseitigen Endfläche. Betrachtet man bei diesen Substanzen ferner jene Brechungsexponenten, welche den Schwingungen parallel der Diagonale des sechsseitigen Prisma entsprechen, so findet man, dass die durch dieselben repräsentirten Elasticitätsaxen (analog dem horizontalen Kreisschnitt von der Wellenfläche der hexagonalen Krystalle) nahezu gleich sind. Die Zahlen von Arragonit, Cerussit, Topas, Salpeter, mellithsaurem Ammoniak, ameisensaurem Strontian, schwefelsaurem Kali, Baryumchlo-

---

[1]) Diess erfordert, dass die Krystallsysteme eine fortlaufende Reihe bilden, in welcher zwischen hexagonal und prismatisch kein Sprung vorkommt.

[2]) Vergl. Schrauf: Erdmann. Journ. für prakt. Chemie. 1861. vol. 83. pag. 360.

[3]) Derselbe führte zur Aufstellung des orthohexagonalen Krystallsystems. Schrauf. Pogg. Ann. 1861. vol. 112, pag. 589. Sitzungsb. d. Wien. Academ. 1863. XLVIII. 250.

[4]) Schrauf in Leonh. und Gein. Jahrb. für Mineralogie. 1865. pag. 46.

rid zeigen zur Genüge, dass die Elasticitätsaxen dieser prismatischen Krystalle so weit von der Krystallgestalt beeinflusst werden, dass einem Verhältniss der Krystallaxen von $\sqrt{3}:1$ (das entspricht den Diagonalen des Grundprisma von 60°) auch eine Gleichung der Elaticitätsaxen — ganz analog dem hexagonalen Systeme — entspricht. Coincidirt die Elasticitätsaxe $\underline{a}$, welche dem Brechungsexponenten $\gamma$ entspricht, mit der verticalen Axe 001, ist sie also parallel den Kanten des Grundprisma (110) von 60°, und entsprechen die Brechungsexponenten $\alpha$ und $\beta$ der Diagonalenebene dieses Prisma (110), so ist für

| | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | |
|---|---|---|---|---|
| Arragonit | 1·680 | 1·676 | 1·527 | (110) $(1\bar{1}0)$ = 63° 50 |
| Cerussit | 2·061 | 2·059 | 1·791 | = 62° 30 |
| Salpeter | 1·499 | 1·498 | 1·332 | = 60° 36 |

Hieraus ist erkennbar, dass mit der Annäherung der Winkel des Grundprisma an 60° auch die Brechungsexponenten $\alpha$ $\beta$ sich immer näher kommen; oder mit anderen Worten, je mehr die Symmetrieverhältnisse sich den hexagonalen nähern, desto gleicher werden auch die entsprechenden Elasticitätsaxen.

Aus diesen Beobachtungen kann man mit einigem Rechte folgern, dass das hexagonale und prismatische System in fortlaufender Reihenfolge sich nahe stehen und fast in einander übergehen. Ein weiterer Beweis für die Möglichkeit des Vorkommens sogenannter Anomalie-Doppelbrechung in hexagonalen Krystallen. (Vergl. vorig. Paragraph.)

Diese Aehnlichkeit der Systeme kann jedoch auch dazu benützt werden, um auf dieselben eine rationale Aufstellungsmethode der prismatischen Krystalle zu begründen. Den monoklinischen und einaxigen Krystallen gab die Symmetriezone die gewünschte Constanz der Aufstellung. Für die Aufstellung prismatischer Krystalle war bisher eigentlich keine Regel feststehend, sondern es galt die Gewohnheit, die Aufstellung des ersten Beobachters beizubehalten.

Die von Grailich und Lang [1]) angewendete Methode, die prismatischen Krystalle nach der absoluten Grösse der Elasticitätsaxen aufzustellen, ist unpraktisch, da die isomorphen Substanzen (vergl. Arragonit und Cerussit) nicht gleiche Stellung erhalten.

Allen diesen Uebelständen entgeht man, wenn [2]) man als die verticale Krystallaxe (001, *c*) jene Richtung im prismatischen Krystalle annimmt, welche der ersten Mittellinie der optischen Axen parallel ist. Nur so ist die Analogie der Aufstellung von hexagonalen und prismatischen Krystallen gewahrt. Die Beobachtungen lehren, dass wenn ein Prisma

[1]) Grailich und Lang, Sitzungsber. der Wien. Acad. 1857. XXVII, 3.

[2]) Diese Methode habe ich in meinem Atlas der Krystallformen begründet.

(110) von 60° vorhanden ist, dieses bei der erwähnten Aufstellungsmethode immer senkrecht aufgestellt erscheinen wird (z. B. Arragonit, Cerussit, Topas); so wie ferner die hemimorphen Substanzen ebenfalls die zweckmässigste Aufstellung (die Zone ihrer Symmetrie horizontal, also oben und unten entgegengesetzt hemimorph) erhalten. Zu bemerken ist, dass für die weitere Orientirung der horizontalen Krystallaxe 100, 010, nicht weiter mehr auf optische Eigenschaften Bezug genommen werden kann; denn wollte man z. B. die Axenebene überall in gleiche Richtung bringen, so würde Arragonit und Cerussit um 90° gegeneinander gedreht erscheinen.

Für die Orientirung und Aufstellung dieser horizontalen Axen kann als allgemeiner Grundsatz nur der gelten: die isomorphen Reihen gleich zu stellen. Dass man überdiess für diese horizontalen Axen die Stellung der früheren Beobachter wenn möglich beibehält und nur aus wichtigen Gründen verlässt, ist selbstverständlich. Um aber die Analogie zwischen dem prismatischen und hexagonalen Systeme nicht zu verwischen, habe ich sowohl in meinem Atlas als auch in meinem Lehrbuch der Krystallphysik die Lage der orthogonalen Krystallaxe $a$ (100) immer von rechts nach links, die von $b$ (010) von vorne nach rückwärts angenommen. Um überdiess für das optische Schema eiue sichere Basis zu erhalten, empfiehlt sich (vergl. §. 106) eine solche Wahl der Grundpyramide, dass hierdurch die relativen Grössen der Krystallaxe dem Gesetze $a > b > c$ entsprechen.

§. 112. **Abhängigkeit des optischen Charakters von der Form.** Sieht man ab von der bekannten Beziehung, dass die tesseralen Krystalle einfach brechen, die pyramidalen und hexagonalen einaxig, die übrigen zweiaxig sind, und sucht zu erforschen, ob eine directe Abhängigkeit der absoluten Werthe der Elasticitätsaxen von der Krystallform stattfindet, beispielsweise dass deren Grösse durch die Grösse der Krystallaxen bedingt würde, so muss sich eine solche Beziehung am ersten und leichtesten durch die Untersuchung der optischen Verhältnisse **isomorpher** Substanzen erkennen lassen. Ein Blick auf die bisherigen Untersuchungen lehrt jedoch, dass in den isomorphen Reihen die gleichnamigen Elasticitätsaxen nicht in allen Gliedern gleichmässig gegen die Krystallform orientirt sind, z. B. Arragonit $\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}\,\underline{\mathfrak{a}}$, Cerussit $\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\underline{\mathfrak{a}}$. Nur in jenen isomorphen Gliedern, wo die Summe der gemeinschaftlichen Bestandtheile jene der wechselnden weitaus überwiegt, ist auch, wie leicht erklärlich, die Orientirung der optischen Eigenschaften analog [1]).

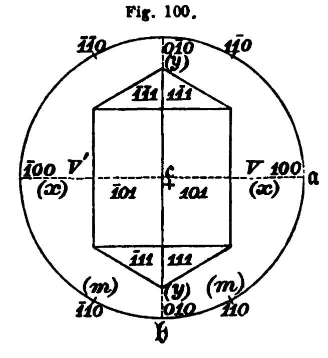
[1]) Bezüglich dieser **negativen** Resultate vergl. die Zusammenstellung von **Grailich** und **Lang**. Sitzungsber. der Wiener Acad. 1858. XXXIII. pag 369.

Es ist jedoch ganz erklärlich, dass mit dem blossen Werthe der Krystallaxen ohne Rücksichtnahme auf die axial verschiedene Lagerung der Materie, die optischen Eigenschaften in keiner directen Beziehung stehen können; denn nach der Molekulartheorie des Lichtes ist sowohl die Krystallgestalt (vergl. Kap. XII), als auch die Doppelbrechung (Kap. XVII) eine Function der Substanz. Da aber bereits im Kap. XII angegeben ward, dass die Lagerung der Atome im Grundmoleküle für isomorphe Stoffe eine symmetrische sein wird, so ist es anderseits wohl begründet, auch eine Symmetrie der optischen Eigenschaften zu erwarten.

Betrachtet man die prismatischen Krystalle, deren optische Orientirung durch die bisherigen Beobachtungen von Descloizeaux, Grailich, Lang bekannt ward, so treten manche Regelmässigkeiten [1]) hervor, wenn sich dieselben auch nie auf die absolute Grösse der Elasticitätsaxen ausdehnen.

Um zur Kenntniss solcher Beziehungen zu gelangen, fand ich es zweckmässig, nicht die Krystallaxen, sondern vielmehr die constanten Elemente der Krystalle, d. i. die Winkel in Betracht zu ziehen, und zwar die Winkel *mm* um die zweite Elasticitätsaxe und die Winkel *xx* und *yy* um die erste Mittellinie (vgl. Fig. 100, wo *VV'* optischen Axen). In nebenstehender Figur fällt zufällig die mittlere Elasticitätsaxe 𝔟 mit der Krystallaxe b (010) zusammen, es erhält daher *mm'* die Indices (110) ($\bar{1}$10); *xx'* = (101) (0$\bar{1}$1) und *yy'* = (011) (0$\bar{1}$1). Würde hingegen die zweite Mittellinie 𝔞 mit der Krystallaxe b (010) zusammenfallen, so entspreche dann *mm'* dem Winkel (110) (1$\bar{1}$0); *xx'* = (011) (0$\bar{1}$1); *yy'* = (101) ($\bar{1}$01).

Fig. 100.




Stellt man die Resultate der Beobachtungen zusammen, geordnet nach der Grösse des Winkels der Normalen von *mm* (die Kante des Prisma der ersten Mittellinie parallel), so erhält man mehrere gut unterscheidbare Gruppen, welche jede zahlreiche Stoffe umfasst.

| | | | |
|---|---|---|---|
| A) $mm' = 60^0$ $(1 : \sqrt{3})$ | Typus | Arragonit | |
| B) $mm' = 120^0$ $(\sqrt{3} : 1)$ | „ | Topas, Cerussit | |
| C) $mm' = 70^0\ 34'\ 5$ $(1 : \sqrt{2})$ | „ | Comtonit | (274) |
| D) $mm' = 109^0\ 25'\ 5$ $(\sqrt{2} : 1)$ | „ | schwefelsaures Ammoniak | |

[1]) Vergl. Schrauf. Pogg. Ann. vol. 112. pag. 588.

E) $mm' = 75^0\ 31'$ ($\sqrt{3}:\sqrt{5}$) „ Baryt
F) $mm' = 104^0\ 29'$ ($\sqrt{5}:\sqrt{3}$) „ Jodsäure
G) $mm' = 78^0\ 27'$ ($\sqrt{2}:\sqrt{3}$) „ Citronensäure
H) $mm' = 101^0\ 31'$ ($\sqrt{3}:\sqrt{2}$ „ Schwefel
I) $mm' = 129^0\ 31'$ ($\sqrt{2}:\sqrt{9}$ „ Asparagin
K) $mm' = 90^0$ (1 : 1) „ Anhydrit

Es bilden sich auf diese Weise gut unterscheidbare Gruppen, die mit wenigen Ausnahmen fast das ganze Beobachtungsmaterial umfassen. Im Gegensatze zu den einfachen Zahlenverhältnissen der Diagonalen des Prisma $mm'$, sind hingegen die Winkel $xx'$ und $yy'$ meist complicirteren Zahlenverhältnissen, z. B. $\sqrt{4}:\sqrt{5}:\sqrt{6}$, angehörend. Kommen weiter an einem Krystalle mehrere Prismen von nahe gleichen einfachen Verhältnissen vor, so ist meist der Winkel, dessen Werth sich am engsten der Limite anschliesst, senkrecht zur ersten Mittellinie, daher auch $mm'$. Zu bemerken ist, dass in dieser Orientirung der optische Charakter, also positiv und negativ, ferner die relative Lage der zweiten Mittellinie keinen Unterschied bildet. Man kann daher sagen, im prismatischen System ist die erste Mittellinie fast in allen Fällen jenem Prisma parallel, dessen Winkel sich am meisten dem Zahlenverhältniss $1:\sqrt{3}:\sqrt{5}$ oder $1:\sqrt{2}:\sqrt{3}:\sqrt{9}$ nähert.

Weiters ist für die Lage der ersten Mittellinie in prismatischen Krystallen zu bemerken, dass sie fast in den meisten Fällen senkrecht zur besten Spaltbarkeit auftritt und bei den hemimorphen Substanzen parallel jener Axe ist, deren positive und negative Enden die Pole der asymmetrischen Ausbildung bilden. Auch diess entspricht den Annahmen der molekularen Bildung der Krystalle, welche, wie schon früher erwähnt, bei den hemimorphen Substanzen in der Aequatorialzone symmetrisch, asymmetrisch jedoch nach oben und unten auftritt.

Die relative Lage der zweiten Mittellinie ist hingegen in keinem Zusammenhange mit der Krystallform, sondern wie später gezeigt wird, nur in einiger Beziehung zur Dispersion der optischen Axen.

§. 113. Abhängigkeit der Dispersion. Während durch diese Erörterung dargelegt ward, dass die Lage der optischen Axenebene von der Krystallform unbeirrt ist, und nur die erste Mittellinie der positiven und negativen Krystalle gleichmässig dem Prisma mit einfachsten Zahlenverhältnissen parallel ist, so zeigt die Dispersion der optischen Axen im prismatischen System eine Abhängigkeit von der Form.

Die Dispersion der optischen Axen $\varrho \gtrless v$ ist nämlich unabhängig von $\pm$ für die holoedrischen Glieder der Gruppen $1:1:\sqrt{3}:\sqrt{5}$

$A \quad mm' = 60^0 \quad \varrho < v \qquad B \quad mm' = 120^0 \quad \varrho > v$
$E \quad mm' = 75^0\,31' \quad \varrho < v \qquad F \quad mm' = 104^0\,29' \quad \varrho > v$
$K_1 \quad mm' < 90 \quad \varrho < v \qquad K_2 \quad mm' > 90 \quad \varrho > v$

für die Gruppen $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{9}$ hingegen

$C \quad mm' = 70^0\,34' \quad \varrho > v \qquad D \quad mm' = 104^0\,29' \quad \varrho < v$
$G \quad mm' = 78^0\,27' \quad \varrho > v \qquad F \quad mm' = 101^0\,31' \quad \varrho < v$
$J_2 \quad mm' = 50^0\,27' \quad \varrho > v \qquad J_1 \quad mm' = 129^0\,91' \quad \varrho < v$

Für die hemiedrischen Glieder dieser Reihen hingegen ist, ebenfalls von $\pm$ unabhängig, die Dispersion gerade entgegengesetzt der in dieser Zusammenstellung angegebenen.

Zu bemerken ist, dass dieser gesetzmässige Gang der Dispersion (vrgl. Fig. 101 und 102) der optischen Axen im prismatischen Systeme durch die Werthe von $xx'$ $yy'$ nicht beinträchtigt zu werden scheint.

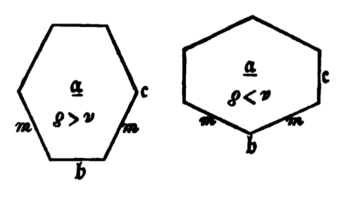


Fig. 101. Fig. 102.

Die obige Aufzählung entspricht auch für die holoedrischen Glieder dem Schema

$$\begin{array}{lll} 1 : \sqrt{3} : \sqrt{5} & mm' < 90 \;\; \varrho < v; & mm' > 90 \;\; \varrho > v \\ 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{9} & mm' < 90 \;\; \varrho > v; & mm' > 90 \;\; \varrho > v \end{array} \qquad (275)$$

Dieser Winkel $mm'$ (der Normalenwinkel) aber, gibt auch das Verhältniss der Krystallaxen $Kr\,A$ an, die mit der mittleren Elasticitätsaxe $\mathfrak{b}$ oder mit der zweiten Mittellinie zusammenfallen, daher kann man sagen (vergl. mein Gesetz Pogg. Ann. vol. 112):

„Die holoedrischen Glieder jener Reihen, deren Krystallaxen „$Kr\,Ax_{\mathfrak{b}} : Kr\,Ax_{2m}$ sich wie $1 : \sqrt{3} : \sqrt{5}$ verhalten, folgen dem Gesetze

$$Kr\,Ax_{\mathfrak{b}} \gtreqless Kr\,Ax_{2m} \quad \varrho \gtreqless v$$

„Die Reihen $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{9}$ folgen dem Satze (276)

$$Kr\,Ax_{\mathfrak{b}} \gtreqless Kr\,Ax_{2m} \quad \varrho \lesseqgtr v$$

„Die hemiedrischen Stoffe jeder dieser Reihen haben einen Sinn der „Dispersion der optischen Axen, welche jenen der holoedrischen Krystalle „gerade entgegengesetzt ist.“ Auch hier verhalten sich die positiven und negativen Krystalle vollkommen gleich. Letzteres mag als Anzeichen dienen, dass die Dispersion des Brechungsexponenten $\beta$ am meisten auf die Dispersion des Winkels der optischen Axen von Einfluss ist. Anderseits zeigen die Gesetze 275 und 276, dass die Krystallgestalt auf die Dispersion von wahrem nachweisbaren Einfluss sei.

---

# XVII. Kapitel.

## Entstehung und Variation der Doppelbrechung durch die Aenderungen der Temperatur und axialen Dichte. Mineralvarietäten. Allotropien und Polymerien. Allomere Körper.

§. 114. Alle bisherigen Beobachtungen lehren einstimmig, dass die Doppelbrechung nur in der nach den drei Dimensionen des Raumes verschiedenen Molekularconstitution ihren Grund haben könne. Wie diese letztere beschaffen sein müsse, ob Elasticität oder Dichte, oder ob beide gleichzeitig variiren, darüber sind die Ansichten getheilt.

Auf Grund der durch die Molekulartheorie (Kap. X) des Lichtes gewonnenen Formeln gelingt es auch hier, für die wichtigsten Erscheinungen die Gesetze aufzufinden und durch Zahlen zu beweisen; letzteren Punkt halte ich für den wichtigsten, indem blosse Theorien auf diesem Gebiete wohl unzählig möglich, aber nicht beweisbar sind.

Die wichtigsten Aufschlüsse über die Genesis der Doppelbrechung liefert vor Allem das Studium jener Verhältnisse, wo eine und dieselbe Materie in verschiedenen Modificationen auftritt und hierbei verschiedene Doppelbrechung zeigt.

Ich zähle hiezu vorerst die Mineralvarietäten [1]), von welchen bekannt ist, dass sie, von verschiedenen Fundorten abstammend, durch ihre variable Dichte, variablen Axenwinkel und verschiedene Brechungsexponenten sich unterscheiden; obgleich die chemische Analyse in den meisten Fällen nur geringe Beimengungen nachzuweisen vermag. Da nun vermöge der Molekulartheorie des Lichtes für eine constant bleibende Materie trotz aller äusseren Einwirkungen das Refractionsvermögen gleich (109) bleiben soll, so liegt die Frage nahe, ob wirklich die Verände-

---

1) Vergl. Schrauf. Pogg. Ann. 1862. vol. 116, pag. 214, vol. 129, pag. 619, sowie Schrauf Physikalische Studien: die gesetzmässigen Beziehungen von Materie und Licht. Wien 1867, pag. 75.

rungen im Brechungsexponenten und die oft grösseren Variationen der Axenwinkel (z. B. bei Glimmer und Topas) nur eine Folge der gleichzeitigen Variation der Dichte sei.

Zu bemerken ist jedoch, dass die beobachtete „mittlere" Dichte eines Krystalls und seine drei Brechungsexponenten nicht homogene Functionen sind. Man muss entweder aus der „mittleren" beobachteten Dichte die „axiale Dichte" nach den drei Dimensionen berechnen oder mit der mittleren Dichte eine mittlere Brechung $(r\mu)$ combiniren. Befolgt man für vorliegenden Fall letzteres, so hat man die Mittelwerthe zu rechnen:

$$\begin{aligned} (r\mu^2) &= \tfrac{1}{3}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \\ (rM) &= \tfrac{1}{3}(M_\alpha + M_\beta + M_\gamma) \\ (rN) &= \tfrac{1}{3}(N_\alpha + N_\beta + N_\gamma) \end{aligned} \tag{277}$$

Combinirt man nun diese Mittelwerthe mit der beobachteten mittleren Dichte $D$, so erkennt man, dass auch die scheinbar abweichenden Mineralvarietäten dem Gesetze der Constanz des Brechungsvermögens folgen, und dass die Variation der Brechungsexponenten und Axenwinkel nur durch die Veränderung der Dichte bedingt ist.

Als Beweise hierfür können alle Beobachtungen dienen, welche um so besser stimmen, je genauer die Beobachtungen sind. Ich erwähne hier aus meinen „Studien" l. c.

1) Topas B) von Brasilien, S) von Schneckenstein.

| | | | |
|---|---|---|---|
| B) | $D = 3{\cdot}5332$ | $(r\mu) = 1{\cdot}61905$ | $(rM) = 0{\cdot}0005933$ |
| S) | $D = 3{\cdot}5582$ | $(r\mu) = 1{\cdot}62221$ | $(rM) = 0{\cdot}0005928$ |

2) Beryll von N) Nertschinsk, E) Elba, Gr) Grao Mogor.

| | | | |
|---|---|---|---|
| N) | $D = 2{\cdot}6843$ | $(r\mu) = 1{\cdot}5536$ | $(rM) = 0{\cdot}0006869$ |
| E) | $D = 2{\cdot}6952$ | $(r\mu) = 1{\cdot}5597$ | $(rM) = 0{\cdot}0006879$ |
| Gr) | $D = 2{\cdot}7255$ | $(r\mu) = 1{\cdot}5631$ | $(rM) = 0{\cdot}0006891$ |

Diese Zahlen beweisen genügend die Constanz der Brechungsvermögen für die verschiedenen Varietäten eines Minerals, die geringen Abweichungen können ebensowohl in Beobachtungsfehlern als in chemischen Beimengungen ihren Grund haben.

Ausser diesen Verificationen lassen diese Untersuchungen aber auch erkennen, dass die Mineralspecies, wie namentlich Glimmer, trotz mancher durch den Fundort hervorgebrachten Variationen in Dichte und Habitus nicht auf Grund optischer Verschiedenheit in Unterabtheilungen zerfällt werden dürfen, indem die stattfindenden Aenderungen der optischen Eigenschaft, wenn auch scheinbar regellos, doch nur Folgen eines bekannten Gesetzes (109) sind.

**§. 115. Allotropien und Polymerien. Allomere Körper.** Ausser den Mineralvarietäten sind für die hier angestrebten Ziele auch noch jene allotropen Minerale von Wichtigkeit, welche, obgleich in verschiedenen Krystallformen vorkommend, doch eine idente Materie enthalten. Glücklicher Weise liegen von dem dimorphen kohlensauren Kalke und der Titansäure Beobachtungen vor.

Rechnet man nach 277 die mittleren Refractions- und Dispersionsvermögen, so erhält man [1]) für Calcit (C) und Arragonit (A):

C) $D = 2{\cdot}73$ $(rM) = 0{\cdot}0007185$ $(rN^2) = 0{\cdot}00914$
A) $D = 2{\cdot}84$ $(rM) = 0{\cdot}0007115$ $(rN^2) = 0{\cdot}00845$

Für Anatas (An) und Rutil (Ru):

An) $D = 3{\cdot}95$ $(r\mu) = 2{\cdot}499$ $(rM) = 0{\cdot}0017167$
Ru) $D = 4{\cdot}20$ $(r\mu) = 2{\cdot}560$ $(rM) = 0{\cdot}0017098$.

Diese Zahlen beweisen die Constanz der Brechungsvermögen für obige allotrope Stoffe und die Abhängigkeit der Variation der Doppelbrechung bloss von den Aenderungen der Dichte.

Es sind jedoch noch weitere Folgerungen möglich, welche über die Molekularconstitution der allotropen und allomeren Stoffe einigen Aufschluss geben. Aus den Untersuchungen der Molekulartheorie des Lichtes folgte nämlich, dass durch das Refractionsvermögen (109) die verzögernde Kraft der Materie dargestellt wird, und dass somit von der Gleichheit der ersteren Function $M$ (in Verbindung mit den chemischen Merkmalen) auf die absolute Identität der Materie und der Atomistik (Zahl und Grösse der Atome, vergl. Kap. XI) geschlossen werden darf.

Wendet man diess auf die Theorie der allotropen Stoffe an, so ist vorauszuschicken, dass, analog wie jeder chemischen Verbindung nur Eine Krystallform angehört, auch jeder Stoff Eine specielle [2]), nur ihm angehörende und denselben charakterisirende chemische molekulare Formel besitzt. Ich habe dieses Gesetz in meinen Studien (pag. 215) mit den Worten aufgestellt: „Jede chemische Verbindung besitzt eine nur ihr eigenthümliche Qualität und Quantität der Grundstoffe. Da also für die obigen allotropen Gruppen die Beobachtung ein identes Refractionsvermögen, (d. i. Einwirkung der Materie auf das Licht) zeigt, so kann man mit Gewissheit voraussetzen, dass die Ursache dieser Allotropien nicht in einer atomistischen Aenderung der Materie, sondern nur in dem Auftreten verschiedener (polymerer) Aequivalente derselben identen Materie zu suchen ist.

---

[1]) Vergl. des Verfassers Studien. Kap. V, pag. 79—80.
[2]) Vergl. des Verfassers Studien. Kap. XIV, pag. 215.

Das Vorkommen von Allotropien beschränkt sich aber nicht auf die anorganische Natur, sondern weit mehr Beispiele, wenn auch unter dem Namen der Isomerie, sind an den organischen Reihen bekannt. Unter diesen kommen Fälle vor, in welchen die Constanz der Brechungsvermögen, ein polymeres Auftreten der identen Materie anzeigt, während bei mehreren höheren Kohlenwasserstoffverbindungen die bedeutende Abweichung der Refractionsäquivalente auch eine Aenderung der Materie selbst anzeigt. Beispiele für das Refractionsäquivalent $\mathfrak{M}$ (113) und Dispersionsäquivalent $\mathfrak{N}$ (115) mögen sein:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A | Valeriansäure | $Ꞓ_5 H_{10} Θ_2$ | $\mathfrak{M} = 0{\cdot}1333$ | $\mathfrak{N} = 13{\cdot}2$ |
| | Propionsaurer Aethyl | $Ꞓ_5 H_{10} Θ_2$ | $\mathfrak{M} = 0{\cdot}1327$ | $\mathfrak{N} = 12{\cdot}1$ |
| B | Cuminsäure | $Ꞓ_{10} H_{12} Θ_2$ | $\mathfrak{M} = 0{\cdot}2482$ | $\mathfrak{N} = 28{\cdot}0$ |
| | Nelkensäure | $Ꞓ_{10} H_{12} Θ_2$ | $\mathfrak{M} = 0{\cdot}2808$ | $\mathfrak{N} = 34{\cdot}5$ |

Zu Folge der Werthe von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ unterscheiden sich somit die Isomerien in zwei Gruppen; sie sind entweder Polymerien einer identen Materie, wie der erste Fall A zeigt, oder sie sind B procentuale Isomerien (möglich auch Polymerien), in welchen jedoch die Materie nicht mehr ident ist, sondern die auftretenden Grundstoffe in ihrer Atomistik bereits Aenderungen erlitten haben. Diesen letzteren Fall, um ihn sowohl von den Allotropien, als auch von den Iso- oder Polymerien einer identen Materie zu trennen, bezeichne ich mit dem Namen Allomerie[1]) Die bisherigen Beobachtungen an den allotropen Mineralien haben das Vorkommen von Allomerien in der Mineralogie noch nicht nachgewiesen; sie scheinen sich auf die höheren Kohlenwasserstoff-Verbindungen zu beschränken.

**§. 116. Axiale Dichte.** In den vorhergehenden Paragraphen wird für den Krystall nur ein mittleres Refractionsvermögen in Rechnung gesetzt und also der Krystall gleich einem isophanen Körper betrachtet. Allein die in dem vorigen Paragraph gewonnene Ueberzeugung der Abhängigkeit des Lichtes von der Dichte auch bei doppelbrechenden Körpern gewährt selbst für die Doppelbrechung einige Aufschlüsse.

Da nämlich durch alle früheren Untersuchungen bewiesen ist, dass die Dichte und Cohäsion eines Krystalls nach den drei Dimensionen des Raumes variirt, ferner die Doppelbrechung von der Dichte abhängt, so ist die Annahme erlaubt, dass die Doppelbrechung selbst in der axialungleichen Dichte ihren Grund haben müsse.

Schwierig ist hier nur die Frage zu entscheiden, welcher Zusammenhang zwischen der Schwingungsrichtung und der orientirten Dichte

---

[1]) Vergl. des Verfassers Physik. Studien. Kap. XI, XIII, XIV und speciell pag. 215—217.

besteht. Bei den isophanen Körpern ist man nämlich nicht genöthigt, eine bestimmte Erklärung darüber zu geben, ob die zur Fortpflanzung des Strahles normale ($D_n$) oder parallele ($D_p$) von Einfluss sei. Diess ist hingegen bei Krystallen im Vorhinein zu erörtern.

Wäre bloss $D_p$ anzunehmen, so wäre für jede Richtung nur eine Dichte wirksam, Doppelbrechung somit ausgeschlossen. Wäre das Product $D_p\,D_n$ wirksam, so ist zu bedenken, dass (vergl. pag. 109)

ein Strahl $\begin{matrix}\parallel \mathfrak{c} \\ \parallel \mathfrak{b}\end{matrix}$ die Geschwindigkeiten $\begin{matrix}\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{b} \\ \mathfrak{a}_2\ \mathfrak{c}\end{matrix}$ hat, und dass somit

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{F}\,(D_a\,D_c) \text{ und } \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{F}\,(D_b\,D_c) \text{ sein,}$$

und daher $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2$ sich unterscheiden müssten. Theoretisch ist wohl diess nicht unmöglich (vergl. Satz 199a), allein man ist gewohnt, innerhalb der jetzigen Fehlergrenzen $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ als gleich anzunehmen. Diess erfordert, dass nur die zur Fortpflanzung des Strahles senkrechte $D_n$ und zur Schwingung des Moleküls parallele Dichte zur ersten annähernden Berechnung angewendet werden darf.

Aus dem mittleren Refractionsvermögen und mittlerer Dichte lässt sich die „axiale“ der Molekularschwingung parallele Dichte $D_x\,D_y\,D_z$ berechnen durch

$$(278)\qquad \frac{\mu_\alpha^2 - 1}{D_\alpha} = \frac{\mu_\beta^2 - 1}{D_\beta} = \frac{\mu_\gamma^2 - 1}{D_\gamma} = \frac{1/3(\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2) - 1}{D}$$

Während die Refraction immer nur von der zur Schwingung parallelen Dichte abhängt, scheint hingegen bei stark doppelbrechenden Körpern die Dispersion auch von der zur Schwingung normalen Dichte und Krystallgestalt beeinflusst. Die von mir für stark doppeltbrechende Körper gegebene Formel [1]), welche die Dispersion annähernd umfasst, ist:

$$(279)\qquad \mu_x^2 = 1 + D_x M + D_x \frac{N^2}{\lambda^2}\sqrt{\frac{D_x\,D_x}{D_y\,D_z}}$$

in welche Formel die Indices $xyz$ die axialen Richtungen sowohl der Schwingung, worauf sich $\mu$ bezieht, als auch der Dichte angeben.

Will man nun controliren, ob wirklich die Doppelbrechung von der axial verschiedenen Dichte bedingt ist, so darf man nur mit der aus 278 berechneten axialen Dichte und den Dispersionscoefficienten $\mathfrak{D}_\alpha\,\mathfrak{D}_\beta\,\mathfrak{D}_\gamma$ das axial orientirte Dispersionsvermögen zu berechnen. Ist letzteres für alle drei Brechungsexponenten constant, so ist hierdurch die Abhängigkeit und Variation der Fortpflanzungsgeschwindigkeit nach den drei Richtungen bewiesen. Diese Rechnungen habe ich in meinen Studien ausführlich angegeben.

---

[1]) Vergl. des Verfassers Studien pag. 89.

Für Körper von geringer Doppelbrechung genügt die gewöhnliche Molekularformel (106, vergl. 118, 119). Nach derselben folgt hier für Topas, dessen Brechungsexponenten von Rudberg bestimmt sind, und dessen Dichte 3·50 ist, die nachstehenden Werthe:

Topas $(rM) = 0\cdot0005812$ $D_\alpha = 3\cdot5379$ $N_\alpha^2 = 0\cdot004854$
$D_\beta = 3\cdot4876$ $N_\beta^2 = 0\cdot004830$
$D_\gamma = 3\cdot4717$ $N_\gamma^2 = 0\cdot004839$

Die Uebereinstimmung des Dispersionsvermögens ist so gross, dass man die vollständige Abhängigkeit der Doppelbrechung von der Dichte zugeben muss.

Zu demselben Resultate gelangt man mittelst der Formel 279 für die so stark doppelbrechende Medien Arragonit $D = 2\cdot94$ und Calcit $D = 2\cdot73$, deren Brechungsexponenten ebenfalls von Rudberg bestimmt sind. Es ist

Arragonit $(rM) = 0\cdot0007115$ $D_\alpha = 3\cdot2296$ $N_\alpha^2 = 0\cdot008159$
$D_\beta = 3\cdot3061$ $N_\beta^2 = 0\cdot008045$
$D_\gamma = 2\cdot3786$ $N_\gamma^2 = 0\cdot007897$

Calcit $(rM) = 0\cdot0007185$ $D_\omega = 3\cdot0313$ $N_\omega^2 = 0\cdot008582$
$D_\epsilon = 2\cdot1272$ $N_\epsilon = 0\cdot008555$

Werthe, welche sowohl untereinander fast vollkommen stimmen, aber auch für beide Medien einander sehr nahe kommen.

Man kommt durch die Resultate dieses Paragraphes zu dem berechtigten Schlusse, dass in erster Annäherung die Doppelbrechung sowohl in Bezug auf Refraction und Dispersion bloss von der axial verschiedenen Dichte abhängt, und dass der Uebergang eines Mediums aus dem einfachbrechenden Zustande in den doppelbrechenden immer mit einer Variation der „axialen" Dichte verbunden sei. Zu bemerken ist, dass diese Betrachtungen auch der Thatsache entsprechen, dass die Refraction mit der Dichte zunimmt. Doch ersieht man weiters, dass die Refraction dem Gesetze sich vollständiger fügt als die Dispersion. Welche Bedingungen aber noch in zweiter Linie hinzutreten, ob die variable Spannung und Elasticität nach den verschiedenen Richtungen, oder die Anordnung der Atome zum Moleküle und der schichtenförmige Aufbau der letzteren zum Krystalle, darüber sind bis jetzt nur Hypothesen möglich.

§. 117. **Aenderung der Refraction durch Druck und Vibration.** Ist die im vorigen Paragraphe angegebene Ableitung der Doppelbrechung von der nach den Dimensionen des Raumes ungleichen Dichte richtig, so müssen alle jene äusseren Einflüsse, welche eine axiale Ungleichheit des Molekularzustandes herbeiführen, auch Doppelbrechung erzeugen.

Die directe Methode, um solche Verschiedenheit des Molekularzustandes hervorzurufen, ist einseitiger Druck.

Der in dieser Beziehung einfachste Versuch ist von Brewster [1]) an einem vollkommen homogenen Körper „Wachs“ angestellt, welches, wenn es parallel (Fig. 103) dem durchgehenden Lichtstrahle $L$ zwischen zwei Glasplatten zusammengedrückt wurde, durchsichtig ward, und die positiv einaxigen Farbenringe zeigt. Es vermehrt sich nämlich in der Richtung der Druckaxe die Dichte und der Brechungsexponent, und es tritt daher in dieser Richtung die kleinste Elasticität $\mathfrak{c}$ auf.

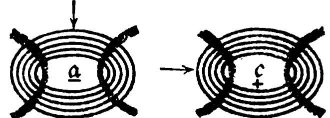
Fig. 103.

Analog wirkt auch der einseitige Druck auf Glas mittelst einer Compressionsschraube, welche isochromatische Farbenerscheinungen (Fig. 104) hervorruft [2]).

Fig. 104.

Unterwirft man einaxige Krystallplatten einem einseitigen Drucke, so dehnen sich Kreise in Ellipsen aus und bilden eine der zweiaxigen ähnliche Figur. Je nach der Richtung des seitlichen Druckes angewendet auf positive oder negative Krystalle, zeigt sich ein verschiedenes Auseinandertreten der dunklen Aeste des Kreuzes zu einer hyperbolischen Figur, wie diess die nebenstehenden Figuren 105 und 106 [3]) zeigen.

Fig. 105. Fig. 106.



Aber hier fällt die Compressionsaxe nicht mit der Richtung des grösseren Brechungsexponenten zusammen, und diess scheint daher gegen die Zunahme des Brechungsexponenten mit der Dichte zu sprechen. Allein es sind nicht die Gesetze bekannt, in welcher Weise ein einseitiger Druck auf die Molekule wirkt, oder ob letztere nicht durch denselben gezwungen werden, eine elliptische Form mit der kleineren Axe (daher kleineren Dichte), parallel der Compressionsaxe, anzunehmen. Schliesslich wäre auch möglich, diese Erscheinung, welche auch bei nicht allzustarkem Drucke, also wenig geänderter Dichte auftritt, von der durch den Druck hervorgerufenen Verschiebung der Krystallschichten abzuleiten. Für

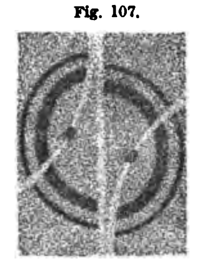
[1]) Brewster. Philos. Transact. 1805. 31, 32. Pogg. Ann. vol. 19, pag. 527.

[2]) Die Fundamentalversuche über Glas vergl. Brewster. Edinburgh Transact. 1818. VIII, 368. Obwohl nicht in das Gebiet der Krystallphysik gehörend, erwähne ich, dass Fresnel (Ann. de chim. XIX. 376. Pogg. Ann. XIX, 539) fand, dass der Brechungsexponent parallel der Compressionsaxe bei Glas zunimmt, dass hingegen Neumann (Berl. Acad. Abh. 1841) zu dem entgegengesetzten Resultate gelangt. Neumann sagt, dass im Glas der Brechungsexponent parallel der Compressionsaxe abnimmt. Die späteren wichtigen Untersuchungen von Wertheim (Cr. XXXII. 289. Pogg. Ann. 86, 321) und Bravais (Ann. d. chim. XLIII. 129. Pogg. Ann. vol. 96, pag. 395) geben keine definitive Entscheidung. Wahrscheinlich, dass bei Glas in Folge der Inhomogenität der Masse die Axe der grösseren Dichte nicht mit der Compressionsaxe zusammenfällt, sowie die geweckte Dichte selbst durch die geweckte Elasticität theilweise compensirt wird.

[3]) Pfaff. Pogg. Ann. vol. 107, pag. 533. vol. 108, pag. 598.

letzteres spricht die von Pfaff an solchen comprimirten Kalkspathplatten gefundene vierfache Brechung eines einfallenden Strahles. Ebenso scheint auch eine Beobachtung von mir zu ähnlicher Annahme zu zwingen. Eine comprimirte Beryllplatte a, wo der seitliche Druck nicht auf die ganzen Seitenflächen, sondern nur auf diese letzteren von zwei diametral gegenüberliegenden Punkten aus wirkte, zeigte im Polarisationsmikroskop deutlich das Auseinandertreten des Kreuzes, allein auch ein Verschieben der beiden Hälften und bei genauer Centrirung auch der Drucklinie parallel einem lichten Querbalken (Fig. 107). Es erscheint hiedurch die Figur analog einer Combination zweier noch unveränderter Hälften, welche durch einen anomalen, der Drucklinie entsprechenden Streifen getrennt erscheinen.

Fig. 107.



Analog diesen Beobachtungen führen auch die Beobachtungen von Wertheim über die durch Compression erzeugte Doppelbrechung zur Rücksichtnahme auf die dem Krystalle eigenthümliche schichtenförmige Anordnung, welche die Dichtigkeitsänderungen parallel der Compressionsaxe modificirt. Beispielsweise sind gleiche Belastungen nothwendig, um bei den in Hexaedern krystallisirenden Medien nach verschiedenen Richtungen einen Gangunterschied $\frac{1}{4}\lambda$ hervorzurufen; hingegen beim Alaun mit oktaedrischem Habitus verhielten sich die Flächen verschieden [1]).

Ebenso wie ein äusserer Druck vermögen jedoch auch innere Molekularbewegungen Doppelbrechung hervorzurufen: So hat schon Biot[2]) gefunden, dass zwischen zwei gekreuzten polarisirenden Spiegeln ein longitudinal schwingender Glasstab hell erscheint. Kundt[3]) erweiterte diese Kenntniss, indem er fand, dass, wenn man das Bild in einem rotirenden Spiegel betrachtet, bei transversalschwingenden Stäben die Knotenpunkte dunkel bleiben, hingegen die mittenliegenden Stellen aufleuchten. Entgegengesetzt wirken longitudinale Schwingungen. Es entspricht diese Entstehung der Doppelbrechung vollkommen der Bewegungsweise der kleinsten Theilchen.

§. 118. Einfluss der Temperatur auf die isochromatischen Curven und die Brechungsexponenten. Da die Zunahme der Wärme die Körper ausdehnt, also deren Dichte vermindert, so wird eine einseitige Erwärmung oder Erkältung ähnlich wie ein Druck wirken und Doppelbrechung zu erzeugen vermögen. Die Mehrzahl der Versuche mit erwärmten oder gekühlten Glasplatten stammt von

---

[1]) Wertheim. Compt. rend. XXXIII, 576. XXXV, 276 Pogg. Ann. vol. 86, 325. vol. 87, 498.
[2]) Biot. Ann. d. Chimie 1820. vol. XIII.
[3]) Kundt. Pogg. Ann. vol. 123, pag. 541.

Brewster (vergl. obige Note). Bemerkenswerth ist, dass, wenn die Glasplatte nicht kreisförmig, sondern elliptisch ist, dieselbe zwei Axen zeigt, und zwar negativ wenn sie vom Rande her erwärmt, positiv wenn sie vom Rande her erkältet wird. Im Beginne des Temperaturunterschiedes sind die entstehenden Figuren jenen auf voriger Seite gleich; hat sich auf der ganzen Platte eine gleichförmige Temperatur gebildet, so verschwindet das Phänomen.

Die Erwärmung ruft aber nicht bloss bei isophanen Platten isochromatische Curven hervor, sondern auch die an zweiaxigen sichtbaren Curven werden durch dieselbe geändert. Obgleich diese Aenderung nur eine secundäre Folge der durch die Temperatursunterschiede hervorgerufenen Variation des Brechungsexponenten ist, so hat dieselbe doch eine für die physikalische Mineralogie wichtige Bedeutung.

Untersucht man nämlich Axenplatten im Oelgefässe und erhitzt dasselbe, so ändert sich der Axenwinkel bei zahlreichen Mineralien nur unbedeutend 0—3°, bei manchen hingegen sehr bedeutend und continuirlich, um bei Erkältung wieder auf die ursprüngliche Grösse zurückzusinken. So ändert sich $EE'$ bei Arragonit, Glimmer, Thomsonit, Anhydrit nur unbedeutend; bei Erwärmung um 100° vergrössert sich $EE'$ um 5°—10° bei Baryt und Struvit, hingegen vermindert er sich bei Kieselzink, Coelestin, Euchroit, Leadhillit. Ist die Erwärmung aber eine bedeutende 500—700°, eine die Elasticitätsgrenze der starren Körper überschreitende, so geht der Axenwinkel nicht mehr auf seine frühere, bei gewöhnlicher Temperatur beobachtete Grösse zurück, sondern der Krystall hat eine constant bleibende Veränderung durch diese Erhitzung erhalten [1]), welche durch nachfolgende Erwärmungen nur mehr unter engen Grenzen temporäre Variationen erlaubt. Solche constante Aenderungen treten bei Brookit, Cymophan, Zoisit, Orthoclas auf.

Bei den monoklinischen Krystallen kann durch die Erwärmung nebst der Aenderung des Axenwinkels auch eine Aenderung der Lage der Axenebene und eine Verschiebung der ersten Mittellinie eintreten. Bei parallelsymmetrischer Axenlage bleibt die Axenebene constant, verschiebt sich hingegen (Diopsid, Euclas) die erste Mittellinie. Bei normalsymmetrischer Axenebene und parallelsymmetrischer Mittellinie tritt keine Aenderung ein. Bei normalsymmetrischer Axenlage und normalsymmetrischer Bissetrix dreht sich die Axenebene bei Borax und Brewsterit um einige Grade.

---

[1]) Descloizeaux. Ann. de Min. 1862. II. 327 Comp. rend. LXII. 987. Pogg. Ann. vol. 129. 345. Diess benützt Ch. E. Weiss (Preisschrift der Haarlem. Soc. Verhandl. XXV), um zu erkennen, ob die Feldspathe einer hohen Temperatur ausgesetzt waren oder nicht.

Die wichtigsten Veränderungen durch die Temperatur sind die der Brechungsexponenten, welche eine Erkennung der quantitativen Einwirkung der Wärme auf das Licht zulassen.

Da die Erwärmung im Allgemeinen einer Verminderung der Dichte entspricht, so soll auch mit ersterer der Brechungsexponent continuirlich abnehmen. Die Gase und Flüssigkeiten folgen vollständig diesem Gesetze, von den Krystallen die Mehrzahl der bisher beobachteten. Für dieselben gilt dann das Gesetz der Constanz der Brechungsvermögen, so dass die Aenderung der Brechungsexponenten genau durch die Aenderung der Dichten von der Temperatur bedingt ist.

Als Beispiele hiefür können die von Rudberg [1]) bei verschiedener Temperatur an Quarz und Arragonit gemachten Beobachtungen der Brechungsexponenten gelten; die Volumsänderungen hat Pfaff [2]) angegeben. Die Resultate, welche für die Constanz der Brechungsvermögen sprechen, folgen hier in Kurzem [3]):

| | | | |
|---|---|---|---|
| Quarz 16° C. | | $D_\omega = 2{\cdot}6325$ | $M_\omega = 0{\cdot}0006882$ |
| | | $D_\epsilon = 2{\cdot}6350$ | $M_\epsilon = 0{\cdot}0006887$ |
| „ 80° C. | $\text{Vol.}_\omega = 1{\cdot}00097$ | $D_\omega = 2{\cdot}6300$ | $M_\omega = 0{\cdot}0006884$ |
| | $\text{Vol.}_\epsilon = 1{\cdot}00051$ | $D_\epsilon = 2{\cdot}6836$ | $M_\epsilon = 0{\cdot}0006885$ |
| Arragonit 16° C. | | $D_\alpha = 3{\cdot}2296$ | $M_\alpha = 0{\cdot}0007499$ |
| | | $D_\beta = 3{\cdot}2061$ | $M_\beta = 0{\cdot}0007492$ |
| | | $D_\gamma = 2{\cdot}3786$ | $M_\gamma = 0{\cdot}0007349$ |
| „ 80° C. | $\text{Vol.}_\alpha = 1{\cdot}000954$ | $D_\alpha = 3{\cdot}2266$ | $M_\alpha = 0{\cdot}0007494$ |
| | $\text{Vol.}_\beta = 1{\cdot}000685$ | $D_\beta = 3{\cdot}2040$ | $M_\beta = 0{\cdot}0007486$ |
| | $\text{Vol.}_\gamma = 1{\cdot}000200$ | $D_\gamma = 2{\cdot}3737$ | $M_\gamma = 0{\cdot}0007341$ |

Von diesem gesetzmässigen Gange der Brechungsexponenten bilden jedoch einige starre Körper eine Ausnahme. So hat schon Rudberg gefunden und neuerdings Fizeau [4]) bestätigt, dass die Brechungsexponenten des Calcit durch die Erwärmung nicht erniedrigt, sondern vielmehr erhöht werden. Ebenso ist es durch die Versuche festgestellt [5]), dass heisses Glas das Licht stärker bricht als kaltes.

Man ist hiedurch gezwungen, zwei Einwirkungen der geleiteten Wärme auf das Licht anzunehmen. Die erstere, gesetzmässig überall gleichbleibende Wirkung besteht in einer Verminderung der Brechungsexponenten, entsprechend der Volumsvermehrung. Ausserdem muss

---

[1]) Rudberg. Pogg. Ann. XXVI, 291.
[2]) Pfaff. Pogg. Ann. vol. CIV, 171. vol. CVII, 148.
[3]) Vergl. des Verfassers Physikalische Studien. Wien 1867. pag. 84.
[4]) Fizeau. Pogg. Ann. vol. CXIX, 87 (Quarz normal vergl. vol. CXXIII, 515.)
[5]) l. c. über die gleichzeitige anormale Volumsänderung vergleiche später.

durch die geleitete Wärme eine erhöhte Molekularbewegung hervorgerufen werden, welche die Cohäsions- und Elasticitätsverhältnisse bei den verschiedenen Stoffen verschieden zu stören, und daher entweder im positiven oder negativen [1]) Sinne auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes einzuwirken vermag.

§. 119. **Entstehung der Doppelbrechung durch die axial verschiedene Lagerung der Atome.** Da durch die Untersuchungen auf Grund der Molekulartheorie des Lichtes nachgewiesen wird, dass 1. die optischen Eigenschaften Functionen der Substanz sind, 2. die Doppelbrechung von der Variation der Dichte nach den drei Richtungen hervorgerufen wird, 3. die Grösse der Krystallaxen von Lagerung der Atome der Körper im Krystalle abhängt, — so kann man mit einigem Rechte vermuthen, dass auch die Doppelbrechung durch die variable Anordnung der Substanz nach den verschiedenen Richtungen in erster Linie bedingt ist. Die Doppelbrechung bloss als Function der Krystallgestalt aufzufassen, ist unmöglich, da das doppelbrechende Vermögen auch dem kleinsten Theilchen schon eigen und nicht erst durch den weiteren Aufbau der Schichten hervorgerufen ist.

Sucht man nun eine Beziehung zwischen der Doppelbrechung und der Substanz, so ist diess, so weit meine bisherigen Forschungen mich leiten, nur dadurch möglich, dass man aus der (§. 65) bekannten, die Krystallsymmetrie begründenden Atomlagerung die axiale Dichte im Krystalle und mittelst dieser die axiale Refraction berechnet.

Die axiale Dichte ($D_a$) wird sich aber aus dem Aequivalent ($P_a$) und der optischen Atomzahl ($ZG_a$) der axial gelagerten Stoffe mit Rücksicht auf die Anordnung in einfache oder Doppelmoleküle und die Coefficienten $m$, $n$ berechnen lassen, da

$$D_a = \frac{mP_a}{nZG_a}. \qquad (280)$$

Diese Gleichung enthält aber auch implicite den Satz $D_a = \frac{P_a}{X_a}$, wo $X_a$ (vergl. §. 57) die verzögernde Kraft der Materie ist; also die axiale Dichte ist proportional dem Verhältnisse zwischen der Masse und dem verzögernden Momente derselben.

Ist die axiale Dichte bekannt, und bedenkt man, dass das „mittlere" Refractionsvermögen die Gesammtsumme der molekularen Einwirkung auf das Licht darstellt, so kann man in das bekannte (oder aus dem Refractionsäquivalenten ableitbare) „mittlere Brechungsvermögen" mit

---

[1]) Vergl. Neumann. Abhandl. der Berl. Academie 1841, pag. 60. Arago. Pogg. Ann. vol. 61a, pag. 44. Fizeau. Pogg. Ann. vol. 119, pag. 87.

dieser axialen Dichte eingehen und dessen axiale Variation berechnen (278). Sind die auf solche Weise gerechneten axialen Variationen von $M$ mit dem Sinn und der Grösse der Doppelbrechung übereinstimmend, so ist hierdurch ein Kennzeichen gewonnen, welches in erster Annäherung die Verhältnisse der Doppelbrechung von jenen der Substanz und Krystallform abhängig darstellt. Berücksichtigt man, dass die hier zur Rechnung kommenden Grössen nur in Annäherung bekannt, also die Fehlergrenzen bedeutend auseinanderliegen, so ist die Uebereinstimmung bei mehreren Substanzen gut zu nennen. Ich erwähne analog §. 65

Anatas, $M(\text{Ti}\Theta_2) = 0{\cdot}001716 \qquad D(\text{Ŧi}\Theta_2) = 3{\cdot}99.$

$$a : b : c = \text{Ŧi} : \Theta : \Theta$$

Fig. 108.

$$D_a = \frac{P(\Theta)}{ZG(\Theta)} = \frac{16}{12{\cdot}2}. \quad D_c = \frac{P(\text{Ti})}{ZG(\text{Ti})} = \frac{50}{63}.$$

$$D_a : D_a : D_c = \frac{16}{12} : \frac{16}{12} : \frac{50}{63} = 4{\cdot}1 : 4{\cdot}1 : 2{\cdot}7$$

gerechnet $\mu_a : \mu_a : \mu_c = 2{\cdot}53 : 2{\cdot}53 : 2{\cdot}14$

beobachtet $\mu_a : \mu_a : \mu_c = 2{\cdot}51 : 2{\cdot}51 : 2{\cdot}47.$

Zinnstein, $\text{Sn}\Theta_2 \quad D(\text{Sn}\Theta_2) = 6{\cdot}7$

Fig. 109.

$$M(\text{Sn}\Theta_2) = \frac{M(\text{Sn}) + M(\Theta_2)}{P(\text{Sn}) + P(\Theta_2)} = \frac{0{\cdot}093}{148} = 0{\cdot}000628$$

$$a : b : c = {}^1/_2(\text{Sn}_2) : \Theta : \Theta$$

$$D_a = \frac{P(\Theta)}{ZG(\Theta)} = \frac{16}{12}. \quad D_c = \frac{P(\text{Sn})}{2\,ZG(\text{Sn})} = \frac{58}{32}.$$

$$D_a : D_a : D_c = 6 : 6 : 8{\cdot}1$$

gerechnet $\mu_a : \mu_a : \mu_c = 1{\cdot}98 : 1{\cdot}98 : 2{\cdot}22$

beobachtet $= \varepsilon\,(\mu_c) > \omega \quad \mu = 2{\cdot}0.$

Rutil, $\text{Ŧi}\Theta_2 \quad D(\text{Ŧi}\Theta^2) = 4{\cdot}2 \quad M = 0{\cdot}001716$

$$a : b : c = \text{Ŧi}_2 : 2(\Theta) : 2(\Theta)$$

$$D_a = \frac{P(\Theta)}{2ZG(\Theta)} = \frac{16}{24{\cdot}5} \quad D_c = \frac{P(\text{Ŧi})}{ZG(\text{Ŧi})} = \frac{50}{60}$$

$$D_a : D_a : D_c = 4 : 4 : 4{\cdot}8$$

gerechnet $\mu_a : \mu_a : \mu_c = 2{\cdot}5 : 2{\cdot}5 : 2{\cdot}7$

beobachtet $\mu_a : \mu_a : \mu_c = 2{\cdot}51 : 2{\cdot}51 : 2{\cdot}65.$

Die Beobachtungen stimmen annähernd mit der Rechnung. Es ist daher die Annahme gewiss in erster Annäherung richtig, dass die Doppelbrechung nur durch die axial verschiedene Dichte, und letztere durch die Atomgruppirung hervorgerufen ist.

Was die Dispersion betrifft, so wird auch diese analog der Refraction von der Substanz und deren Lagerung beeinflusst werden. Allein bei derselben spricht sich in den Krystallen bereits deutlich der Einfluss der Krystallform aus. Ein näheres Eingehen auf diese gesetzmässigen Beziehungen würde wegen der nöthigen Beispiele weit den mir zustehenden Raum überschreiten. Ich werde hierauf in der Fortsetzung meiner „Studien" zurückkommen.

Sind auch die in diesem Paragraphe gewonnenen Resultate nur wenige, so geben sie doch den ersten durch Zahlen nachweisbaren Aufschluss über die Entstehung der Doppelbrechung und deren Abhängigkeit von Substanz. Indem sie zeigen, dass gerade die variable Lage der ponderablen Materie den weitaus grössten, durch Zahlen nachweisbaren Einfluss auf die Entstehung der Doppelbrechung ausübe, so sind sie überdiess auch ein Beweismittel gegen den imponderablen Aether.

Wohl gestalten sich die Ableitungsversuche der Doppelbrechung vom Standpunkte der Molekulartheorie des Lichtes schwierig, doch haben sie das Gute, dass jeder Schritt und jede Hypothese auf diesem Gebiete durch Zahlen auf ihre Richtigkeit geprüft werden können. Im Gegensatze hierzu hat wohl die Thatsache wenig Gewicht, dass sich die Doppelbrechung auf Grund der Aethertheorie viel leichter erklären lässt, denn man darf ja nur, wie Grove sagt, dem schwerlosen, unfindbaren Aether alle beliebigen Eigenschaften, wie variable Dichte oder Elasticität vindiciren, ohne Furcht zu haben, dass je durch Zahlen das Gegentheil bewiesen werde.

# IV. Abtheilung.

## Die thermischen und magnetisch-elektrischen Verhältnisse krystallisirter Körper.

# XVIII. Kapitel.

## Die Verhältnisse der strahlenden Wärme.

§. 120. In den Hypothesen über das Wesen der Wärme zeigt sich analog der Lehre vom Lichte ein eigenthümlicher Bildungsgang. Während schon Baco von Verulam [1]) und Bernoulli [2]) die Temperatur von einer inneren Bewegung der Wärme herzuleiten versuchten, ist es wieder nach langem Zwischenraum der Neuzeit vorbehalten gewesen, auf eben solche Hypothesen zurückzukommen. Das durch Newton zum Ansehen gebrachte Lichtfluidum stürzte alle Bewegungshypothesen. Während die Neuzeit in vielleicht richtigerer Erkenntniss der Beziehungen und Umwandlungen der Kräfte zu den alten Bewegungshypothesen zurückgreift, hatte man im vorigen Jahrhunderte die Idee der imponderabilen Stoffe allseits angewendet.

Wie in der Lehre vom Lichte, so war man auch bei der Wärmelehre gewohnt, eine Imponderabile, den sogenannten Wärmestoff den Erscheinungen zu Grunde zu legen. Man nahm an, dass durch das Ausströmen desselben aus dem Körper die Erkältung des letzteren und umgekehrt durch das vermehrte Vorhandensein desselben innerhalb der Körper die Erwärmung der Materie vor sich gehe. Dieser Wärmestoff muss nun weiters, um die Beobachtungen zu erklären, die Fähigkeit besitzen, sich in demselben Körper von Theilchen zu Theilchen oder von Körper zu Körper ausbreiten zu können.

Man erkannte bald, dass diese Ausbreitung der Wärme sich scheinbar unter zweierlei Form darstellt, entweder nehmen auf dem Wege der Wärme alle zwischen liegenden Theilchen an Wärme zu oder die Wärme vermag einen entfernten Körper zu erhitzen, ohne dass die zwischen demselben und der Wärmequelle liegende Schichte eine merk-

---

[1]) Baco von Verulam, Hydrodynamica Argentorat 1738, Sect. X.

[2]) Vergl. Gehler's physikal. Wörterbuch. Band X, pag. 55 und Clausius. Pogg. Ann. vol. 115. pag. 4.

bare Erwärmung zeige. Erstere Ausbreitungsweise der Wärme wurde die durch Leitung, letztere die durch Strahlung genannt. Die Untersuchung über die geleitete Wärme ist Gegenstand des nächsten Kapitels, während die strahlende Wärme Vorwurf für vorliegende Zeilen bildet.

Mit der weiteren Erforschung jener Erscheinungen, die auf dem Gebiete der strahlenden Wärme auftreten, hatte man sich aber immer mehr überzeugt, dass die Emanationshypothese eines eigenthümlichen Wärmestoffes ungenügend sei. In Folge der Ausbreitung der Vibrationshypothese des Lichtes versuchte man auch die strahlende Wärme von Bewegungen abzuleiten.

Anfänglich hielt man den Lichtäther auch für das Wärmeagens und adoptirte die longitudinalen Vibrationen des Aethers für die strahlende Wärme. Doch die fortgesetzten Untersuchungen, namentlich Melloni[1]) und Knoblauch[2]) beweisen, dass die strahlende Wärme so gut wie Licht polarisirt, doppelt gebrochen, gebeugt werden kann und hiermit ist auch die Existenz transversaler Wärmeschwingungen bedingt. Da aber Wärme ohne Licht und Licht ohne Wärme beobachtet werden kann, so war man längere Zeit in Zweifel, wodurch sich beide Bewegungssysteme unterscheiden und verschiedene Wirkungen auf den menschlichen Organismus hervorbringen. Manche Autoren neigten sich daher der Ansicht zu, dass das Licht den Aetherschwingungen, die Wärme hingegen einer combinatorischen Bewegung von Aether und Materie zukomme[3]) und beide daher nicht ident seien. Alle diese verschiedenen Ansichten sind jedoch durch die Untersuchungen der neuesten Zeit als unvollständig erkannt worden. Durch meine Untersuchungen ward die Abhängigkeit der Lichtphänomene von der Materie, ohne Zuhilfenahme eines Imponderabile, bewiesen; die Wärmetheorie vermag sich somit auch nicht mehr auf den Aether zu stützen. Beruht aber die strahlende Wärme auf den Schwingungen der Materie selbst, so werden auch die Wirkungen der Wärme, welche so tief in das Wesen der Materie einzugreifen und selbst abweichend vom Lichte messbare Veränderungen der Körper hervorzubringen vermögen, als Folgen der molekularen Bewegung erklärlich.

Die Frage nach den Beziehungen zwischen Licht und strahlender Wärme ward in jüngster Zeit, wenn auch noch mit Zugrundelegung der Aetherhypothesen, durch Tyndall[4]), wie es scheint endgiltig beantwortet.

---

[1]) Melloni. 1850. Thermochrose. pag 338. Pogg. Ann. 37. pag. 486. vol. 57. pag. 300.

[2]) Knoblauch. Pogg. Ann. 1845 –1865.

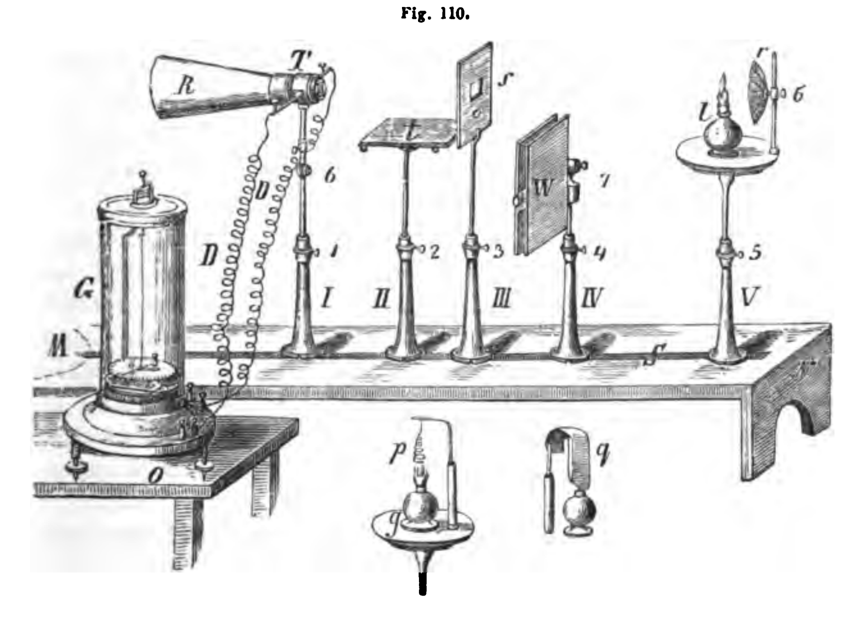
[3]) Magnus. Pogg. Ann. 1865. vol. 124. pag. 494.

[4]) Tyndall. Pogg. Ann. 1865. vol. 124. pag. 50.

Ehe zur Besprechung dieser gewonnenen Resultate übergegangen wèrden kann, muss mit einigen Worten jenes Apparates gedacht werden, welcher allein befähigt, Intensitätsbestimmungen der strahlenden Wärme zu machen.

Der Apparat, dessen Zusammenstellung die nebenstehende Figur (Fig. 110) zeigt, ist von Melloni construirt und besteht aus folgenden

Fig. 110.




wesentlichen Bestandtheilen: *l* die Wärme austrahlende Lampe, *T* eine thermoelektrische Säule, in welcher durch die Wärmestrahlen ein thermoelektrischer Strom erregt wird, welcher durch den Draht *D* sich zum Galvanometer *G* fortpflanzt. Je nach der Stärke des erregten Stromes wird die Magnetnadel des Galvanometers *G* aus ihrer Ruhelage abgelenkt und die Deviationswinkel derselben, am Gradbogen ablesbar, bilden das Mittel, um die Intensität der auf die Thermosäule *T* gefallenen Wärmestrahlen zu messen. Soll der Durchgang der Wärme durch einen zweiten Körper geprüft werden, so kommt derselbe so auf den Tisch *t* zu stehen, dass die austretenden Strahlen wieder auf die Thermosäule *T* treffen. Um diffuse Wärmestrahlen abzublenden, sind die Schirme *S* und *W* vorhanden.

§. 121. Identität von Licht und strahlender Wärme. Der im vorigen Paragraphe beschriebene Apparat macht es leicht, die Ausbreitung der Wärmestrahlen zu verfolgen und auf diese Weise Beu-

gung [1]) und Interferenz [2]), Reflexion und Brechung der Wärme zu beweisen. Erstere Versuche weisen auf die Existenz von Transversalschwingungen hin, während letztere die Beziehungen zwischen Licht und Wärme aufklären.

Lässt man nämlich einen Sonnenstrahl auf ein Prisma von Steinsalz fallen, und bringt in den gebrochenen Strahl [3]) die Thermosäule *T*, so zeigt die Ablenkung der Galvanometernadel die Existenz von Wärmestrahlen in dem einfallenden Sonnenstrahl an. Schon die ersten Versuche von Müller [4]), Eisenlohr [5]) hatten ergeben, dass das Maximum der Wärme in den am wenigsten brechbaren Theil des Spectrums falle, so wie die Beobachtungen von Franz [6]) und J. Müller lehrten, dass es unmöglich sei, die leuchtenden Strahlen ihrer wenn auch geringen Wärmewirkung zu benehmen.

Nach Tyndall [7]) ist die Intensität der Wärme im Spectrum so vertheilt, dass das Maximum derselben, entsprechend der Zahl 12, ausserhalb Roth liegt, an der Grenze von Roth sank diese Intensitätsziffer schnell auf 4, um von da schnell bis zur Unmerkbarkeit abzunehmen [8]). Es entfällt somit (vergl. §. 39 und 57) ein nur geringer Procentantheil von strahlender Wärme auf die sichtbaren Strahlen, die Intensität und die Amplitude der sichtbaren Strahlen ist eine weitaus kleinere als die der unsichtbaren ausserrothen Strahlen, welche thermische Wirkungen hervorbringen.

Dass die Sichtbarkeit der Strahlen kein unterscheidendes Merkmal von Wärme und Licht abgibt, dass vielmehr die vom Auge bewirkte Trennung diese beiden Erscheinungsweisen nur (wie schon Melloni 1845, Pogg. Ann. vol. 65, pag. 598 sagte) durch den Bau des Auges, dessen Absorptionsmittel und Mitschwingen seiner Nerven begründet ist, hat Tyndall bewiesen. Er liess nämlich einen Lichtstrahl durch eine Schwefelkohlenstoff-Jodlösung gehen, wodurch die leuchtenden Strahlen absorbirt wurden, die dunklen Wärmestrahlen jedoch ungehindert durchgehen konnten. Dieser dunkle Wärmestrahlenbüschel brachte, sobald er nur durch die Pupille in's Auge fiel, keine Wirkung

---

[1]) Knoblauch. Fortschritte der Physik. 1846. II. 311. 1847. III. 284. Seebeck 1849 Pogg. Ann. vol. 77. Müller J. 1858. Pogg. Ann. vol. 105.

[2]) Fizeau und Foucault. 1847. Pogg. Ann. vol. 72. Knoblauch. Pogg. Ann. 1859. vol, 108. pag. 610—615.

[3]) Zu diesem Zwecke muss die Thermosäule so eingerichtet sein, dass ihre freie Oberfläche in den Contactstellen nur eine schmale verticale Kante bildet (vergl. nachfolg. Kapitel).

[4]) Müller. Pogg. Ann. 1858. vol. 105, pag. 352, 543.

[5]) Eisenlohr. Pogg. Ann. 1860. vol. 119. pag. 240.

[6]) Franz. Pogg. Ann. vol. 94. pag. 337. vol. 97. pag. 34. vol. 101. pag. 46. vol. 115. pag. 206.

[7]) Tyndall. Pogg. Ann. 1865. vol. 124. pag. 57,

[8]) Die Austheilung der Wärme im Spectrum. Vergl. pag. 103. §. 39.

hervor. Die Unsichtbarkeit der Wärmestrahlen ist daher kein Grund[1]) Wärme und Licht als verschiedene Agentien aufzufassen.

Der scheinbare Unterschied zwischen dunklen und leuchtenden Wärmestrahlen ist durch die Versuche von Drapers[2]) und Tyndall aufgeklärt. Ersterer zeigte, dass mit der Zunahme der Wärme von der Roth- bis zur Weissglühhitze immer mehr Farben im Spectrum auftreten, bis endlich alle Farbenbestandtheile des weissen Lichtes vorhanden sind. Tyndall wies nach, dass durch die Temperaturerhöhung des glühenden Körpers die Amplitude und Intensität der vorhandenen Wellen vermehrt und zugleich neue Wellenzüge von kürzerer Vibrationsdauer $\tau$ hervorgerufen wurden.

Da durch alle diese Versuche die Identität von Licht und Wärme, beide als Transversalschwingungen der kleinsten Theile der Materie bewiesen ist, so wird auch schliesslich das scheinbar abnorme Verhalten der strahlenden Wärme gegen verschiedene Körper erklärbar. Die Wärmestrahlen vermögen nämlich viele Körper, z. B. Eis zu durchdringen, ohne einen Einfluss auf dieselben hervorzubringen, während andere Körper durch die auffallenden Wärmestrahlen erwärmt werden. Diess ist ein der Fluorescenz analoger Vorgang, denn wie bei der Lichtfluorescenz die auffallenden Strahlen in Wellen von geringerer Amplitude und grösserer Vibrationsdauer umgesetzt werden, so ist auch hier eine Verwandlung der auffallenden intensiven Wellen in Vibrationen grösserer Dauer $\tau$ vorhanden. Mit der Grösse der Vibrationsdauer (uneigentlich Wellenlänge) wächst aber auch die Wärmewirkung, und so haben die Stoffe, welche die Wärme bedeutend absorbiren, ein der Fluorescenz oder besser der Phosphorescenz analoges Verzögerungsvermögen[3]), Calescenz genannt.

Für die Fortpflanzung der strahlenden Wärme selbst wird natürlich das bereits in der Molekulartheorie (§. 57) des Lichtes Gesagte gelten müssen.

§. 122. Brechung und Dispersion. Doppelbrechung und Polarisation. Die mit diesen Worten angedeuteten Phänomene haben einen gewissen Werth in der Theorie der strahlenden Wärme, indem sie ein weiteres Beweismittel für deren Identität mit Licht sind. Sobald jedoch die Ueberzeugung gewonnen ist, dass die strahlende Wärme nur die extrarothen Lichtstrahlen sind, ergeben sich alle diese Erscheinun-

---

1) Vergl. §. 57. pag. 149—150.

2) Drapers. Pogg. Ann. 1848. vol. 75.

3) Akin. Report of British Associat. 1863. pag. 98. Pogg. Ann. vol. 130. pag. 162. Vergl. Philos. Magazin Ser. IV. vol. 29. pag. 244. Bohn. Pogg. Ann. vol. 130. pag. 367.

gen als Analoga des bei der Theorie des Lichtes Gesagten, indem sie bei gleichem qualitativen Verhalten nur quantitative Unterschiede haben.

Der schon früher erwähnte Versuch, nach dem Durchgang der Wärmestrahlen durch ein Steinsalzprisma die Wirkung dieser Strahlen auf die Thermosäule in ihrer räumlichen Ausdehnung zu studiren, führt zur Kenntniss der Brechung und Dispersion der Wärmestrahlen[1]. Die Lage der dunklen Wärmestrahlen im ultrarothen Theile des Spectrums ergibt sich schon aus der allgemeinen Dispersionsformel (76) und entspricht dem auf pag. 104 Gesagten. Analog hiermit ist auch der Brechungsexponent des Steinsalzes[2] für das Maximum der Wärmewirkung 1·516, hingegen für den Lichtstrahl $\mu_B$ 1·526, für $\mu_H = 1{\cdot}546$.

Da aber auch die leuchtenden Strahlen Wärmewirkung darbieten, so müssen wir, wie beim Lichte, auch hier eine Dispersion der Wärmestrahlen berücksichtigen und mit dieser Dispersion der Wärme ist auf das innigste die Existenz von sogenannten Wärmefarben verbunden. Diese Farben der Wärme zeigen sich ganz analog den Lichtfarben. Wie nämlich die verschiedenen Körper gegen die Lichtfarben ein verschiedenes Verhalten zeigen, da sie eine Farbe vorzugsweise durchlassen, eine andere absorbiren oder emittiren, so ist auch der Durchgang oder die Absorption der Wärme in manchen Körpern verschieden.

Man kann den Beweis mittelst des Melloni'schen Apparates liefern, dass ein und derselbe Körper Strahlen verschiedener Wärmequellen nicht in gleichem Masse der Intensität durchgehen lässt. So ist nach den Versuchen von Melloni die relative Intensität der Wärmestrahlen von einer Oelflamme aber nach dem Durchgang durch Steinsalz, Gyps, Alaun 92, 14, 9; für eine glühende Platinspirale 92, 5, 2, wenn man in beiden Fällen die Intensität der freien Strahlung mit 100 bezeichnet. Man sieht hieraus, dass Steinsalz die Wärmestrahlen am wenigsten beim Durchgang absorbirt und gleichzeitig, analog einem farblos durchsichtigen Medium, gegen die Wärmestrahlen von der Oelflamme und der Platinspirale gleich sich verhält, d. h. für alle gleich diatherman ist. Knoblauch[3] meint daher, Steinsalz wäre wärmefarblos.

Wärmeweiss würde man schliesslich analog dem Lichtvorgange jene Stoffe nennen müssen, welche alle Wärmestrahlen gleichmässig dispergiren. So ist nach Knoblauch Platin nahe wärmeweiss, während Gold und Silber wärmefarbig sind.

---

[1] Man kann so wie zu der Licht-, auch zur Wärmebrechung den Goniometer (Fig. 53) benützen, wenn man die aus dem Beobachtungsfernrohr austretenden Strahlen auf eine Thermosäule statt des Fernrohrs *EF* auffallen lässt.

[2] Müller. Pogg. Ann. vol. 105. pag. 352, 543. Eisenlohr. Pogg. Ann. vol. 109, pag. 240,

[3] Knoblauch. Pogg. Ann. 120. pag. 177, 190.

Ausser dieser einfachen Brechung der Wärme existirt aber auch Doppelbrechung. Der Versuch lässt sich leicht mit einem Calcit durchführen, indem in jedem der zwei gebrochenen Lichtstrahlen die Thermosäule auch die Existenz der Wärmestrahlen nachzuweisen im Stande ist. Knoblauch[1]) hat im weiteren Verfolge dieser Doppelbrechung aber auch nachgewiesen, dass analog der Pleochroismus des Lichtes auch ein Dichroismus der Wärme besteht; indem die durch manche Krystalle doppeltgebrochenen Strahlen sich gegen drei andere Körper wie Strahlen von verschiedenen Wärmequellen, d. i. von anderer Wärmefarbe darstellen.

Schliesslich dürfte zu erwähnen sein, dass, obgleich die Doppelbrechung ein directer Beweis für die Existenz der Polarisation ist, letztere noch überdiess sowohl durch die Methode der Reflexion als auch der Lamellarpolarisation beweisen lässt.

Zu diesen beiden Versuchen dient ein System dünner Glimmerplatten, entstanden aus einem natürlichen Glimmerprisma {110}, durch Spaltung parallel der Endfläche und Hauptspaltungsebene {001}. Ein solches System von Glimmerlamellen lässt nur sehr wenig Wärmestrahlen bei senkrechter Incidenz durch, die Intensität der durchgelassenen Strahlen, also auch die Wirkung auf die Thermosäule, nimmt mit dem Incidenzwinkel zu und erreicht bei $J = 33^1/_2{}^0$ ihr Maximum. Es ist diess der Hauptpolarisationswinkel; denn auch die unter dem Incidenzwinkel $33^1/_2$ Grad von dem Glimmer reflectirten Strahlen sind polarisirt; sie besitzen nämlich die Eigenschaft, eine zweites solches System von Glimmerplatten, je nachdem die Hauptschnitte beider Systeme senkrecht oder parallel zu einander liegen, im Maximum oder Minimum zu durchdringen.

§. 123. Absorption und Emission. Da sowohl durch Theorie als durch Versuche sich ergibt, dass alle in der Theorie des Lichtes angeregten Fragen auch hier wiederkehren, und sich uns als Phänomen der ultrarothen Strahlen darbieten, so gewähren nur jene Verhältnisse der Absorption der Wärme ein erhöhtes Interesse, für welche aber in der Theorie des Lichtes ein eigener Messapparat fehlte. Der Melloni'sche Apparat bietet uns nämlich das Hilfsmittel, die Intensität der Wärmestrahlen, unabhängig von dem Beobachter, in ablesbare Zahlen umzusetzen und hierdurch gelingt es, auf indirectem Wege zur Kenntniss der für die Absorption und Emission des Lichtes geltenden Gesetze zu gelangen. Bevor man aber die in den Krystallen auftretende, nach den Krystallaxen orientirte Absorption näher untersucht, ist es nothwendig,

[1]) Knoblauch. Pogg. Ann. vol. 85. pag. 172, vol. 93. pag. 16.

einige Sätze der Wärmeemission und Absorption im allgemeinen hervorzuheben.

Die Beobachtungen lehren, dass die Intensität der emittirten Wärmestrahlen, also auch das Emissionsvermögen eine Function der Temperatur der emittirenden Körper, sowie auch von dessen materieller Beschaffenheit ist. Das Emissionsvermögen steht ferner in verkehrtem Verhältniss zur Dichte und ist bei glatter Oberfläche der Körper kleiner wie bei rauher unebener Fläche. So ist beispielsweise das Emissionsvermögen des Kienruss 100, das eines Metalls ungefähr 10—15.

Schliesslich ist auch das Emissionsvermögen eines Körpers durch die Natur des ihn umgebenden Mittels bedingt und die Intensität der Ausstrahlung steht im geraden Verhältniss mit den Brechungsexponenten der Strahlen selbst in den verschiedenen Mitteln [1]).

Mit der Grösse der Emission ist aber auch diejenige der Absorption in innigem Connex, denn um den Körper unbeschadet jedes äusseren Zuflusses der Wärme in seinem Gleichgewicht zu erhalten, muss sich auch seine Emission mit seiner Absorption in Proportionalität gesetzt haben. Es ist somit für alle Körper bei identer Temperatur und Strahlenfarbe das Verhältniss zwischen dem Emissions- und Absorptionsvermögen gleich [2]). Im Einklang mit diesem Satze sind auch die Beobachtungen von Melloni, welcher das Absorptionsvermögen [3]) des Kienruss zu 100, jenes eines Metalles zu 13·5 angab. (Vergl. oben.)

Dieses Absorptionsvermögen der einzelnen Körper mit Ausnahme des Kienrusses ist aber nicht für Strahlen aller Wärmequellen, also nicht für verschiedene Wärmefarben gleich. Nach Knoblauch nimmt die Absorption ab, wenn die Wärmequellen leuchtend wurden [4]), selbst wenn die Temperatur der leuchtenden Wärmequellen geringer als die der dunklen war. Man könnte hieraus schliessen, dass die Absorption die dunklen Wärmestrahlen in Folge deren grösseren Vibrationsdauer und Elongation mehr als die schnelleren leuchtenden Vibrationen schwächt.

Ebenso ist auch die Absorption eines Mediums für Strahlen einer Wärmequelle verschieden, wenn dieselben bereits eine eingeschaltete Substanz durchlaufen haben. Ein Beispiel hierfür bietet Alaun dar, welcher von 100 Strahlen der glühenden Platinspirale nur 98 absorbirt, ebenso auch die Strahlen absorbirt, welche durch Steinsalz gegangen

---

[1]) Clausius. Pogg. Ann. 121. pag. 1. Quint. Icilius. Pogg. Ann. 127. pag. 30.

[2]) Kirchhoff, 1860. Pogg. Ann. 109. pag. 275—301.

[3]) Ueber das mit dem Absorptionsvermögen proportionale Erwärmungsvermögen der Körper vergl. frühere Paragraphe.

[4]) Knoblauch. 1847. Pogg. Ann. 70.

sind, hingegen für die Strahlen, welche bereits eine zweite Platte von Alaun oder Gyps durchlaufen haben, fast vollkommen diatherman ist.

Nach diesem bisher Gesagten sind wir somit gezwungen, die Absorption und Emission jedes Körpers nach zwei Richtungen zu erforschen, sowohl bezüglich der Intensität als auch der Farbe der ausgesendeten Strahlen. Die Prüfung bezüglich der Intensitätsabsorption erfolgt mittelst des Melloni'schen Apparates, indem der zu untersuchende Körper in dünner Plattenform auf das Tischchen gebracht und jetzt die Ablenkung der Galvanometernadel mit derjenigen verglichen wird, welche die Wärmequelle direct erzeugte[1]). Die Ausschläge der Galvanometernadel sind für kleine Stromstärken den Intensitäten proportional. Will man hingegen die Absorption eines Körpers bezüglich der Wärmefarben prüfen, so wird man jene Strahlen, die den Körper bereits durchdrungen haben, nochmals durch verschiedene Medien, z. B. verschieden gefärbtes Glas etc. gehen lassen, welche letztgenannte Medien eine weitere, aber ungleiche Absorption üben. Beispielsweise werden dann von 100 Strahlen der Wärmequelle nur 50 den zu untersuchenden Körper durchdringen, von diesen 50 Strahlen hingegen werden neuerdings wieder 40 durch ein grünes und 20 durch ein gelbes Glas absorbirt. Diese Zahlen deuten nun das Verhältniss der Intensität und Farbenabsorption an.

§. 124. Die Gesetze der Absorption in Krystallen. Während die Absorption des Lichtes in den krystallisirten Medien nur annähernd durch die dichroskopische Lupe auf die Farbe geschätzt werden kann, so ist hingegen durch die Identität von Licht und Wärme die Ableitung der Gesetze für Intensitätsabsorption mittelst des Melloni'schen Apparates leicht. Man wird zu diesem Zwecke aus jedem zu untersuchenden Krystalle Platten schneiden, deren Oberfläche den optischen Hauptschnitten parallel ist. Die von der Wärmequelle kommenden Strahlen werden durch ein eingeschaltetes Nicol'sches Prisma polarisirt, und schliesslich kann man nach bekannter Methode die Absorption bezüglich der Intensität und Farbe messen. Die wichtigsten Untersuchungen auf diesem Gebiete hat Knoblauch gemacht[2]) und seine Beobachtungsresultate werden auch in Nachfolgendem mitgetheilt.

Die Krystalle werden von der strahlenden Wärme nach verschiedenen Richtungen hin in ungleicher Menge durchdrungen und die durchgegangenen Strahlen lassen je nach der Richtung im Krystalle ungleiche Eigenschaften gegen andere diathermane Körper erkennen.

Bei polarisirt einfallender Wärme treten für eine und dieselbe Richtung des Strahles Unterschiede auf, je nachdem die Schwingungsrichtung

---

[1]) Die Absorption der Luft ist so gering, dass sie kaum in Betracht zu ziehen ist.

[2]) Knoblauch. Pogg. Ann. vol. 85, pag. 169. vol. 93, pag. 161.

gegen die Hauptschnitte des Krystalls orientirt ist. Diese Unterschiede betreffen aber nicht bloss die Intensität, sondern auch die Farbe, indem die in verschiedenen Ebenen polarisirten Strahlen nach ihrem Durchgang durch den Krystall sich in der Fähigkeit unterscheiden, andere diathermane Körper zu durchdringen.

Bei einem und demselben Körper nehmen die quantitativen und qualitativen Unterschiede in der Intensität der absorbirten Strahlen mit der Dichte der durchlaufenen Schichte zu.

Während bei den zweiaxigen Krystallen der Unterschied der Wärmestrahlen nach den drei Richtungen auftritt, so sind bei dem einaxigen Körper für die Wärme analog dem Lichte die Verhältnisse rings um die optische Hauptaxe ($\underline{a}$; $\underline{c}$) ident. Alle Strahlen somit, die senkrecht gegen diese optische Axe den Krystall durchdrungen haben, zeigen ein identes Wärmevermögen und auf jene Strahlen, welche parallel der Axe durchgehen, hat die Polarisationsrichtung keinen Einfluss.

Schliesslich ist noch zu bemerken, dass auch bei den Krystallen des tesseralen Systems, z. B. bei farbigem Flussspath, blaugestreiftem Steinsalz, wenn dieselbe Schichtungen zeigen, Unterschiede in der Quantität und Qualität der Wärmestrahlen bemerkbar sind. Doch hat in solchen Fällen bei einer und derselben Richtung des Strahles die Polarisationsebene keinen Einfluss.

Diese Beobachtungen von Knoblauch genügen, um aus ihnen die Gesetze für die Intensitätsabsorption abzuleiten.

Das von mir für die Absorption eines Körpers bezüglich der Intensität der einfallenden Strahlen aufgestellte Gesetz (pag. 148) lautete

$$s_1^2 = \frac{s^2}{\mu^2} \text{ oder } J_1 = \frac{J}{\mu^2} \tag{101}$$

d. h. die Amplitude $s_1$ oder die Intensität $J_1$ der im Körper fortgepflanzten Strahlen ist der einfallenden Amplitude $s$ direct, dem Quadrat des Brechungsexponenten verkehrt proportionirt.

Die für die strahlende Wärme möglichen Messungen geben für diesen Satz den Beweis. Hierbei ist jedoch vorerst die Farbenabsorption zu eliminiren und nur Krystalle ohne dieselbe zu erörtern. Für einaxige Körper ist die Absorption analog dem Elasticitätsellipsoid ein Umdrehungsellipsoid. Gehen Strahlen senkrecht gegen die optische Axe, so ist die Absorption abhängig von der Schwingungsrichtung. So ist bei dem Bergkrystall das Verhältniss der Wärmestrahlen [1]), welche parallel der optischen Axe durch den Krystall gehen, zu jenen, welche senkrecht

[1]) Knoblauch. Pogg. Ann. 85. pag. 171.

derselben gehen, wie 100 : 92. Da nun Bergkrystall ein positiver Krystall ist, also das Schema 𝔞𝔞𝔠 hat, so entspricht dieser Beobachtung auch die Thatsache, dass denjenigen Strahlen die Intensitätszahl 100 zukommt, welche parallel 𝔠 gehen, deren Schwingungsrichtung mit 𝔞 𝔞 zusammenfällt, welche somit dem optischen Brechungsexponenten $\mu_\omega = 1{\cdot}540$ entsprechen, während jene Strahlen, welche parallel 𝔞 sind, deren Schwingungen somit parallel 𝔞 und 𝔠 sind, und dem Strahle $\mu_\epsilon = 1{\cdot}549$ entsprechen, die Intensitätzahl 92 haben.

Bei dem negativen (𝔠𝔠𝔞) Turmalin verhalten sich die Strahlen, welche parallel der Axe 𝔞 durchgehen (Schwingungen senkrecht zu 𝔞 und parallel 𝔠, daher dem Brechungsexponent $\alpha$ entsprechend), zu jenen Strahlen, welche senkrecht zur Axe (Schwingungen parallel 𝔞 und 𝔠, daher parallel dem Brechungsexponent $\beta$) wie 100 : 158.

Geht man zu den zweiaxigen Krystallen über, und untersucht nur solche, welche die geringste Farbenabsorption zeigen, wo somit die Beobachtung nur von der Intensitätsabsorption abhängt, so bietet sich Schwerspath dar. Nach Knoblauch (Pogg. Ann. 93) gelten nun für die Absorption des optisch positiven 𝔞𝔟𝔠 Schwerspaths nachfolgende Zahlen. Das Verhältniss der polarisirten Wärmestrahlen, welche aus dem gelben Schwerspath parallel der Mittellinie 𝔠 austreten, wenn die Polarisationsebene mit der Ebene der optischen Axen zusammenfällt oder gekreuzt ist, ist 100 : 112. Die Zahl 112 entspricht somit der Schwingung parallel der Elasticitätsaxe 𝔞 oder dem Brechungsexponenten $\gamma$, während die Zahl 100 der Schwingung parallel der zweiten Elasticitätsaxe 𝔟 oder dem Brechungsexponenten $\beta$ zukommt. Diess stimmt ebenfalls mit dem obigen Gesetze.

Aus dem bisher Gesagten ziehe ich nun folgendes Gesetz für die Intensitätsabsorption:

Bei dem Uebergang der transversalen Licht- oder Wärmebewegung aus einem weniger dichten Mittel in ein dichteres tritt eine Verminderung der Amplitude ein, und in Folge dessen ist die Absorption der Intensität dem Quadrate der Brechungsexponenten proportional.

Beim Durchgang durch einen Krystall ist ausser der Richtung des Strahles auch die Richtung der Molekularvibration zu betrachten, daher gilt im Verein mit dem obigen Satze für den Durchgang eines unpolarisirten Strahles, dass der parallel 𝔞 durchgehende Strahl mehr absorbirt wird als zu 𝔟 parallele Strahl und dieser mehr als der zu 𝔠 parallele Strahl, d. h. die Absorption stimmt in ihrer Grösse mit jener Elasticitätsaxe überein, parallel welcher der unpolarisirte Strahl den Krystall durchlauft.

Ist hingegen der Strahl polarisirt, so erfolgt die Absorption im verkehrten Verhältniss gegen die Grösse der Elasticitätsaxe, mit wel-

cher die Schwingungsrichtung zusammenfällt, und erreicht in den Hauptschnitten ihr Maximum oder Minimum.

Diese für die strahlende Wärme mit Zahlen beweisbaren Gesetze liefern zugleich auch die Bestätigung der für die optische Absorption auf pag. 131, pag. 148 und pag. 242 angegebenen Beziehungen.

Diese Gesetze der Intensitätsabsorption treten aber durch die Beobachtung der thermischen Wirkung nur dann ganz deutlich hervor, wenn keine Absorption der Farbe hinzutritt.

Der Körper besitzt nämlich ausser der Fähigkeit, die Amplituden zu verkleinern, noch das weitere Vermögen (vergl. die Resultate der Spectralanalyse) Vibrationen gewisser Dauer (Wellenlänge) leichter zu emittiren und von denselben leichter erregt zu werden, also auch weniger zu absorbiren. Die Absorption für Farben ist aber nach den thermischen und optischen Beobachtungen in Krystallen ebenfalls mit der Richtung des Strahles und seinen Vibrationen variabel. Dieses Absorptionsvermögen für die Farbe ist aber von jenem für Intensität vollkommen verschieden und vermag selbst in manchen Fällen, wenn die Farbenabsorption die mehr brechbaren Strahlen trifft, das Beobachtungsresultat für die Intensität in Widerspruch mit dem obigen Gesetze zu bringen.

Die Durchsicht der Beobachtungen von Knoblauch liefert für den Gegensatz der Absorption der Farbe und Intensität mehrere Beispiele. Beispielsweise gehen von den entgegengesetzt (in der Richtung I und II) polarisirten, den Idocras aber in einer Richtung durchdrungenen Strahlen durch Glas von

| | rother, | gelber, | grüner, | blauer Farbe |
|---|---|---|---|---|
| I | 38 | 59 | 36 | 67 |
| II | 61 | 91 | 13 | 37 |

Dem Strahle der Polarisationsrichtung I käme den früheren Gesetzen zu Folge eine kleinere Intensitätsabsorption zu, doch diese wird durch die für rothe Strahlen grössere Farbenabsorption vermehrt und hierdurch werden die relativen Werthe der Absorption für I und II vollkommen geändert.

Die die Farbe auswählende Absorption ist somit von anderen Ursachen wie jenen der Intensität abhängig und steht möglicherweise indirect mit letzteren im Widerspruch. Die Ursache der Farbenabsorption kann nur in dem für die verschiedene Vibrationsdauer verschiedenen Emissions- und daher Absorptionsvermögen der in dem Krystalle auftretenden Grundstoffe liegen. (Vgl. die Gesetze der Spectralanalyse §. 41 und §. 50 über Absorption und Emission.)

Da aber diese Farbenabsorption für Schwingungen der Moleküle parallel den drei Richtungen im Krystall eine im Maximum und Minimum verschiedene ist, in den Mittellagen ebenfalls nur einen Mittelwerth erlangt, so ergibt sich als Bedingung für ihr Auftreten die Abhängigkeit in dem Krystall ebenfalls nach den drei Richtungen des Raumes und daher ihre Abhängigkeit von den axial ungleich vertheilten Atomen der den Krystall bildenden Grundstoffe.

Wenn die Kenntniss der Farbenabsorption so weit vorgeschritten sein wird, um für jede Hauptschwingungsrichtung die Absorption der einzelnen Farben quantitativ sicher zu stellen, so wird es möglich sein, durch Vergleich dieser axialen Absorption mit den hellen Linien der Spectralanalyse die Stoffe zu erkennen, welche parallel der betreffenden Axe gelagert sein müssen. Obgleich die nöthigen Bestimmungen noch grösstentheils fehlen, so gelangen doch mehrere solche Versuche der Ableitung und gewährten mir gleichzeitig eine Stütze meiner bei der Krystallogenesis Kap. XI ausgesprochenen Sätze.

# XIX. Kapitel.

## Ueber die geleitete Wärme.

§. 125. Von der strahlenden Wärme unterscheidet sich der zweite von uns als Wärme angesprochene Bewegungszustand der Körper nur durch seine langsame Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Während die erstere mit der Geschwindigkeit des Lichtes im entfernten Körper die Erscheinung der Wärme hervorruft, ist hingegen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erscheinungen der geleiteten Wärme in den Gasen derjenigen des Strahles gleich[1]), in den festen Körper fast unmerkbar.

Hierdurch sind wir gezwungen, beide Erscheinungen zu trennen, doch es war auch bezüglich letzterer die Ansicht verbreitet, ein sogenannter imponderabiler Wärmestoff sei die Ursache der in dem Körper auftretenden und sich von Theilchen zu Theilchen in einer nach aussen hin durch Temperaturerhöhung bemerkbaren Weise fortpflanzenden Wärme. Für die Ausbreitung dieser sogenannten geleiteten Wärme in einem Körper nach obiger Hypothese sind namentlich die Untersuchungen von Fourier[2]) und Poisson[3]) bemerkenswerth. Während ersterer die successive Ausbreitung des Wärmestoffes analog der eines Gases in's Auge fasst, so adoptirt Poisson die Strahlung dieses Imponderabils von Theilchen zu Theilchen.

Für die im Innern eines Körpers befindliche Wärme, für deren Leitung und ausdehnende Wirkung bietet wohl ein hypothetischer Wärmestoff eine annähernde Erklärung dar, allein die Beziehungen von der Wärme zu der von ihr geleisteten mechanischen Arbeit sind durch ihn nicht begreiflich.

---

[1]) Stefan. Sitzungsber. d. Wien. Acad. vergl. Clausius.

[2]) Fourier. Théor. de la chaleur Paris 1822.

[3]) Poisson. Sur la distribution do la chaleur dans les corps solides. Journ. d'écol. Polytech. tom. 12. Sur la chal. rayon. An. de chim. et Phys. tom. 23. Sur la théor. mathém. de la chaleur. Paris 1835.

Durch Mayer (1842) und Joule (1845) ist es nämlich sichergestellt, das jede mechanische Kraft, wenn sie keine weitere Arbeit verrichtet, eine ihr proportionale Wärme erzeugen kann, und zwar entspricht einer Arbeitskraft von 423·55 Kilogramm-Meter die Temperaturerhöhung eines Kilogramms Wasser um $1^0$ C.

Ein solches Gesetz der Umwandlung einer mechanischen äusseren Kraft in Wärme ist unvereinbar mit den Hypothesen eines Wärmeäthers, sie führt vielmehr zu der richtigen Ansicht, dass alle in dem Körper sich bemerkbar machende Wärme ihre Ursache nur in der Bewegung haben könne, und dass die auftretende Wärme nur entstehen könne durch die Umwandlung einer von aussen kommenden Bewegung des ganzen Körpers in eine Bewegung der einzelnen materiellen Moleküle [1]). Für diese sogenannte geleitete Wärme wird aber dieser Bewegungszustand nicht etwa bloss in Transversalvibrationen bestehen, sondern derselbe wird alle durch die Molekularanordnung möglichen Veränderungen [2]) der Lage umfassen und sich im Unterschied von der strahlenden Wärme [3]) nur durch den directen Anprall, durch stossweise bewirkte Uebertragung der lebendigen Kraft eines Theilchens an das nächstliegende Theilchen mittheilen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der geleiteten Wärme kann somit nur gering sein, hingegen wird die Schwächung derselben von Molekül zu Molekül bedeutend sein. Von der Vibrationsgeschwindigkeit $c$ ($mc^2$ vgl. pag. 148, Satz 100) wird die Temperatur, d. h. die gegen Aussen wirksame und bemerkbare freie Wärmemenge abhängig gemacht. Mit der Abnahme der Bewegung nimmt die Temperatur ab und der absolute Nullpunkt der Temperatur würde durch das vollständige Aufhören jeder Bewegung der Körpermoleküle bedingt sein.

§. 126. **Wärmemenge und Temperatur. Abhängigkeit der specifischen Wärme vom Stoff.** Durch die zahlreichen Untersuchungen auf dem Gebiete der mechanischen Wärmelehre ist es gelungen, auch für den Begriff Temperatur und Wärmemenge genügende Erläuterungen [4]) zu geben. Dieselben können hier nur insoweit in Betracht gezogen werden, als sie für den auch in der Mineralphysik nöthigen Begriff der specifischen Wärme die nöthigen Anhaltspunkte geben.

---

[1]) Krönig. 1856. Theorie der Gase. Pogg. Ann. vol. 99. 315. Clausius. 1857. Pogg. Ann. vol. 100. pag. 354. vol. 115. pag. 1.

[2]) Ueber die Bewegung der Moleküle in Körpern verschiedener Aggregatform vgl. pag. 144.

[3]) Vergl. vorhergehendes Kapitel, §. 120: Bei Betrachtung der Fortpflanzung der strahlenden und geleiteten Wärme in Gasen ergibt sich von selbst die Nothwendigkeit, für erstere von der gewöhnlichen Vorstellungsweise der Fortpflanzung des Impulses abzuweichen (vergl. pag. 144—145), denn wie wäre es sonst möglich, dass ein und derselbe Impuls sich mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzt.

[4]) Vergl. Stefan. Sitzungsber. d. Wien. Acad. 1859. vol. 36, 85. Subic. Sitzungsber. d. Wien. Acad. vol. 48. pag. 62. Bolzmann. Sitzungsber. d. Wien. Acad. vol. 53. pag. 201.

Die Wärme, welche keine innere Arbeit zu leisten nöthig hat, wird sich nach aussen hin bemerkbar machen, und wir sagen, die mittlere lebendige Kraft eines Atoms, d. h. dessen Masse multiplicirt mit der Weggeschwindigkeit, stellt die Temperatur vor

$$T = \frac{mc^2}{2} \tag{281}$$

Ist keine innere Arbeit, z. B. Ausdehnung zu überwinden, so wird auch die gesammte im Körper vorhandene Wärmemenge $Q$ als die Summe der lebendigen Kräfte von $n$ Atomen der Masse $m$ und Geschwindigkeit $c$ betrachtet werden können.

$$Q = N\left(\frac{amc^2}{2} + \frac{a'm'c^2}{2}\ldots\right) = \frac{Nnmc^2}{2} \tag{282}$$

Ein und derselbe Körper erfordert nun einen immer gleichen äusseren Zufluss von Wärme, damit sich seine Temperatur erhöht, verschiedene Körper hingegen erfordern für gleiche Temperaturserhöhung verschiedene Wärmemengen. Sie besitzen eine verschiedene Wärmecapacität und die Wärme, welche ein Körper braucht, um seine Masseinheit um 1° C. zu erwärmen, nennt man seine **specifische Wärme**.

Die specifische Wärme des Wassers wird mit 1 angenommen und die übrigen Stoffe auf dasselbe bezogen.

Die Bestimmung der specifischen Wärme $W$ eines Körpers $K$ von der Masse $M$ und Temperatur $T$ erfolgt dadurch, dass man denselben mit einer genau bestimmten Masse $m$ Wassers, dessen specifische Wärme $w$ und dessen Temperatur $t$ ist, mischt. Nach der Mengung nehmen Körper und Wasser eine gemeinschaftliche Temperatur $\tau$ an. Aus diesen Daten berechnet sich die specifische Wärme des Körpers nach der Formel

Fig. 111.

$$MW(\tau - T) = mw(\tau - t)$$

Im allgemeinen nimmt die specifische Wärme zu mit der Abnahme der Dichtigkeit. Die festen Körper und namentlich die Metalle haben eine weitaus geringere specifische Wärme als die Flüssigkeiten.

Ebenso haben allotrope Modificationen verschiedene Wärmecapacitäten.

Zu bemerken ist schliesslich, dass der Werth der specifischen Wärme auch von der Temperatur $T$ und $\tau$ abhängt; beispielsweise ist derselbe auch für Phosphor zwischen 10° bis 30°, $W = 0{\cdot}188$, zwischen 50° und 60° hingegen $W_1 = 0{\cdot}212$. Man kann daher die Angaben über specifische Wärme nur für analoge Beobachtungstemperaturen vergleichen.

Für gleiche Temperaturen ergeben sich aber zwischen der specifischen Wärme verschiedener fester Körper und deren chemischen Aequivalenten $A$ einige Beziehungen.

Die Werthe der specifischen Wärme der festen Grundstoffe sind nämlich entweder gleich oder einfache Multipla. Die specifische Wärme $W$ eines festen Elementes ist dann dem Aequivalent proportional[1])

$$W = \frac{\text{Const.}}{A} \tag{283}$$

Diess Gesetz gilt bei allen chemisch analogen Verbindungen, mit der Ausnahme, dass der Werth der Constante $C$ für jede Serie analoger Verbindungen einen anderen Werth hat[2]). Für Legirungen hingegen folgt nach Regnault die specifische Wärme dem einfachen Gesetze des arithmetischen Mittels.

Diese Gesetze werden sich auch aus dem Begriffe der mechanischen Wärmelehre ableiten lassen. Geht man nämlich[3]) von den obigen Begriffen der Temperatur und Wärmemenge aus, so folgt, dass die Wärmecapacität $W$ das Verhältniss von Wärmemenge zur Temperatur darstellen muss, also

$$W = \frac{\Delta Q}{V \Delta T} \tag{284}$$

worin $V$ das Volumen bedeutet Diese Gleichung führt unmittelbar zu einem Ausdrucke, der $W$ von der Anzahl der Atome abhängig zeigt.

§. 127. **Ausdehnung und Aenderung des Aggregatzustandes der Körper. Latente Wärme.** Eine bekannte Folgeerscheinung der Erwärmung der Körper ist ihre Ausdehnung. Durch den Zufluss freier Wärme von aussen wird nämlich nicht bloss die lebendige Kraft der Moleküle, also die Vibrationsgeschwindigkeit vermehrt, sondern ich muss noch weiters annehmen, dass auch die für jeden Körper von der Aggregatform und dem individuellen Charakter abhängige Elongation der Moleküle von ihrer Ruhelage vergrössert wird. Mit der Vergrösserung der Bahn der bewegten Theilchen tritt auch die Ausdehnung des Körpervolums auf, welche letztere immer mehr zunimmt, bis endlich die Stabilitätsgrenze für die vorliegende Aggregatform des Körpers erreicht wird. Mittelst weiteren Zuflusses der Wärme von aussen wird sich also der bisher feste Körper in einen flüssigen, letzterer in einen dampf- oder gasförmigen verwandeln. Eine solche Ausdehnung kann aber nur erfolgen, wenn der Widerstand des umgebenden Mittels gegen die Volumsvermeh-

---

[1]) Dulong und Petit. 1818. A. de chim. 2 Ser. vol. X. 395.

[2]) Pape. Pogg. Ann. 1863. vol. 120, pag. 337 und 1865 vol. 126, pag. 123. Regnault. Pogg. Ann. 1856. vol. 98, pag. 396.

[3]) Vergl. Bolzmann l. c.

rung überwältigt wird. Dieser Widerstand wird aber beruhen sowohl in dem allgemeinen Drucke in Folge der Schwerkraft, als auch, wenn das umgebende Mittel gleichzeitig erwärmt wird, in einer auftretenden Vergrösserung der mittleren Weglängen dieses umgebenden Mediums. Obgleich letztere für Gase als unbeschränkt angenommen wird, so entspricht doch jeder Temperatur eine variable mittlere Weglänge [1]).

Mit der zufliessenden Wärmemenge stehen daher Ausdehnung, Temperatur und Ueberwindung des äusseren Widerstandes in der Beziehung von geleisteter positiver innerer Arbeit und freier lebendiger Kraft zur Totalsumme der überkommenen Bewegung. Nennen wir also $dQ$ die Wärmemenge, welche der Körper von aussen erhält, $dH$ die hierdurch bewirkte Variation seiner Wärme und $dL$ die Arbeit bezüglich der Lage seiner inneren Theile, $\mathfrak{A}$ das Wärmeäquivalent, so erhält [2]) man

(285) $$dQ + dH + \mathfrak{A} dL = 0$$

Nennt man $Z$ die Aenderung der inneren Lage der Moleküle, so wird

(286) $$dZ = \frac{\mathfrak{A} dL}{T}$$

woraus man auch die Gleichung ableiten kann [3])

(286a) $$Z = \Sigma \log \int_{t_1}^{t_2} \frac{mc^2}{2} \, dt + \Sigma \log (t_2 - t_1) + C$$

wo $t_1$ $t_2$ die Grenztemperaturen bedeuten.

Geht man zur Gleichung (285) zurück, so sieht man, dass immer eine gewisse von Stoff zu Stoff variable Quantität von Wärmemenge nöthig ist, um selbst ohne Temperaturerhöhung bloss eine Ausdehnung des Körpers oder eine Aenderung seiner Aggregatform bewirken zu können. Diese gegen aussen hin durch Temperaturvariationen sich nicht darstellende Wärmemenge bildet die sogenannte latente Wärme des Körpers.

Ist die Ausdehnung und Vergrösserung der Elongation der Theilchen als positive Arbeit bezeichnet, so wird der Contraction oder Verkleinerung der Amplitude eine negative Arbeit entsprechen. Demgemäss wird auch, wenn bei constant bleibendem Zufluss von äusserer Wärme eine Contraction oder ein Uebergang aus dem ausdehnsamen in den festen Aggregatzustand eintritt, eine Erhöhung der Temperatur beobachtet.

Die latente Wärme variirt von Stoff zu Stoff, und so wird dann auch für jeden anderen Körper eine verschiedene Quantität freier Wärme

---

[1]) Vergl. Ausdehnung und Sieden des Wassers im luftleeren Raume.
[2]) Clausius. Pogg. Ann. 116. pag. 85.
[3]) Bolzmann. Sitzungsber. der Wien. Acad. 1866. LIII. 219.

zu innerer Arbeit verwendet werden müssen, um eine gleiche Ausdehnung des Körpers hervorzurufen. Man pflegt aber eine Vergleichung der Ausdehnung der Körper nicht von der verbrauchten Wärmemenge, sondern vielmehr von der im Körper gleichzeitig auftretenden Temperatur abhängig zu machen[1]). Meist gibt man als Mass für die Ausdehnungsfähigkeit eines Körpers jene Vergrösserung des Volums an, welche zwischen 0°—100° eintritt, und nennt jenen Coefficienten, welcher anzeigt, um wie viel Procenttheile der Länge $L$ oder des Volumens $V$ sich der Körper nach

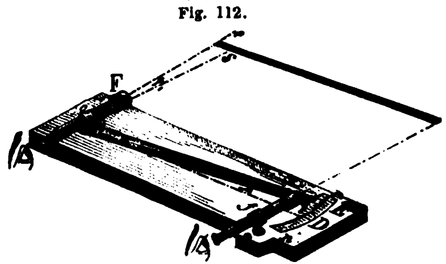
$$L_t = L_o\,(1 + lt) \qquad \text{oder} \qquad V_t = V_o\,(1 + 3lt) \tag{287}$$

ausgedehnt hat, den Namen Ausdehnungscoefficient. Letzterer kann sich bloss auf eine Längendimension beziehen, und heisst dann linearer Ausdehnungscoefficient $l$, bezieht er sich auf das gesammte Volumen, so nennt man ihn cubischen Ausdehnungscoefficient $k$.

Die Ermittlung des cubischen Ausdehnungscoefficienten fester Körper gelingt durch ein der Ermittlung des specifischen Gewichtes[2]) analoges Verfahren. Da aber für isotrope Medien, wie leicht zu erkennen, $k = 3l$, so genügt die Bestimmung des linearen Ausdehnungscoefficienten.

Das Princip, welches der Ermittlung dieses linearen Ausdehnungscoefficienten für die gewöhnlichen Fälle zu Grunde liegt, besteht in der genauen Messung der Längendimension eines Körpers bei verschiedenen Temperaturen. Der Körper wird zu diesem Zwecke nach einer seiner Dimensionen verlängert; und zwar für nebenstehenden Apparat (Fig. 112) in solcher Länge angewandt, bis die Distanz der optischen Axen der Fernröhre $F$ und $f$ der ganzen Länge des Stabes $ss$ gleich ist. Verlängert sich der Stab ausserhalb $s$ (vgl. Figur), so wird das bewegliche Fernrohr $F$ ebenfalls um den Winkel $\varphi$ gedreht werden müssen, um dem Endpunkte des Stabes $s$ folgen zu können.

Fig. 112.




Da nun die Verlängerung des Stabes $s$ bis $s_1$ die Tangente des Winkels $\varphi$ ist, ebenso aber auch an der Theilung $nn$ das Stück $DE$ die tang $\varphi$, so folgt $ss' : DE = cs : CD$; $ss' = \frac{cs.DE}{CD}$ für die Ausdehnung des Körpers gemessen durch unveränderliche von der Temperatur des Körpers unabhängige Grössen. Das Verhältniss von $ss'$ zur totalen

[1]) Obgleich diess der obigen Gleichung 285 entspricht, so ist doch ein Zweifel erlaubt. Es scheint nämlich das Verhältniss von $Q$ zu $H$ nicht für alle Bewegungszustände ident zu sein; vergl. Edlund. Pogg. Ann. vol. 129, pag. 15, über die anormale Ausdehnung durch den elektrischen Strom.

[2]) Mitscherlich. Pogg. Ann. vol. 11. pag. 137.

Länge *ss* gibt den linearen Ausdehnungscoefficienten. Der letztere muss aber, um das Gesetz der Ausdehnung für die einzelnen Körper zu erforschen, nicht bloss zwischen dem Maximum oder Minimum der Temperatur erforscht werden, sondern auch mittlere Temperaturen müssen in die Beobachtung eingezogen werden. Die Curven der Volumsausdehnung und der Temperaturszunahme verlaufen nämlich nicht parallel, und es entspricht daher nicht in allen Fällen einer gleichen Temperaturerhöhung eine gleiche Volumsvermehrung. Es kann nun sein, dass in höheren Temperaturen die Ausdehnung stärker wächst als in niederen Temperaturen, ein meist beobachteter Fall, oder es kann für höhere Temperatur die Ausdehnung weniger zunehmen, als den für niedere Temperaturen berechneten Coefficienten entspreche. Letzteres ist z. B. bei Schwefel der Fall. Schliesslich kann für gewisse Grenzen der Temperatur, selbst bei der Zunahme der Temperatur, auch eine Verminderung der Ausdehnung eintreten. So dehnt sich Wasser von $+ 4^0$ C. sowohl bei Erwärmung als Erkaltung aus, die Rose'sche Legirung zieht sich von $35^0$ bis $55^0$ C. zusammen. Fizeau [1] hat an Diamant und Kupferoxydul ebenfalls einen Wendepunkt mit dem Maximum der Dichte und Minimum des Volums gefunden, von wo aus der Zufluss an äusserer Wärme immer eine Ausdehnung hervorruft, mag die Temperatur des Körpers sich erhöhen oder erniedrigen.

Diese Beobachtungen lehren, dass die äussere Wärme sich nicht für alle Mengen oder Temperaturen derselben gleichmässig in die innere Arbeit der Ausdehnung und in Temperaturerhöhung theilt, und dass, wie vom Maximum der Dichte nach aufwärts mehr Temperatur als Ausdehnung zur Erscheinung kommt, hingegen nach abwärts grössere Variation des Volumens als der Temperatur bewirkt werden.

Es ist diess genau der umgekehrte Process, wie bei der künstlichen Erkaltung, wo trotz Wärmezufuhr von aussen in Folge der rapiden Zunahme der mittleren Weglänge der Moleküle (Verdampfung) die Temperatur des Körpers bedeutend sinkt.

Ich glaube zur Erklärung dieser unzweifelhaften Beobachtung annehmen zu dürfen, dass dem äusseren Zufluss an Wärme $dQ$ entspreche eine Aenderung der lebendigen Kraft der Moleküle $mc^2$, welche sowohl durch die Aenderung der Geschwindigkeit $c$ als auch durch die Aenderung der Masse $m$ hervorgebracht gedacht werden kann. Wird nämlich die Masse $m$ als die Summe der Massen aller auf ein Raumelement vertheilter Atome angesehen, so ist erklärlich, dass bei Vergrösserung der mittleren Weglänge $s$ der Atome die Masse $m$ der Raumeinheit sich verkleinert, im Gegentheile $m$ sich vergrössert.

[1] Fizeau. Pogg. Ann. vol. 126, vol. 129.

Aehnliche Beziehungen zwischen der Raumausdehnung, d. i. Vergrösserung des mittleren Abstandes der Moleküle und der erlangten Molekulargeschwindigkeit sind jedenfalls nöthig, wenn auch diess nur eine Andeutung sein kann über die bei amorphen Körpern auftretenden Variationen. Anderer Art sind hingegen die anormalen Veränderungen der Krystalle, welche in einem der nachfolgenden Paragraphe erörtert werden.

§. 128. Abhängigkeit des Ausdehnungscoefficienten vom Elasticitätsmodul, dem Atomgewicht und der specifischen Wärme. Wie schon in einem früheren Paragraphe nachgewiesen ward, ist die specifische Wärme meist in einer einfachen Relation zu dem Atomgewichte. Aehnliche Verhältnisse lassen sich auch für den Ausdehnungscoefficienten, wenn auch nicht in aller Strenge, nachweisen [1]. Die nachfolgende Ableitung stützt sich nämlich auf die Annahme, dass jene Wärmemenge, welche die Temperaturerhöhung bewirkt, in den einzelnen verglichenen Metallen gleich gesetzt und daher vernachlässigt werden kann. Ist diese Annahme annähernd zulässig, so kann man sagen: die Wärmemenge, die ein Metallstab der Masse und Temperatur 1 nöthig hat, um eine Verlängerung $l$ zu erhalten, wird gleich sein dem Producte aus seinem specifischen Gewichte $S$ in seine specifische Wärme $W$. Die Ausdehnung durch die Wärmeeinheit kann dann dargestellt werden durch $\frac{l}{WS}$, und diese Grösse, wenn das mechanische Aequivalent der Wärme constant, wird für verschiedene Metalle in demselben Verhältnisse stehen müssen, wie Ausdehnungen, die der Körper durch den Zug einer Gewichtseinheit erhält. Setzt man für die Ausdehnungen die reciproken Verhältnisszahlen $\frac{1}{M}$, wo $M$ der Elasticitätsmodulus ist, so folgt

$$M_1 : M_2 : M_3 = \frac{W_1 S_1}{l_1} : \frac{W_2 S_2}{l_2} : \frac{W_3 S_3}{l_3} \tag{288}$$

Vogel stellt daher das Gesetz auf: „die Elasticitätsmodule verhalten sich wie die Producte aus der specifischen Wärme, dem specifischen Gewicht und dem reciproken Werth des Ausdehnungscoefficienten.“

Der obigen Gleichung entspricht auch das Gesetz

$$\frac{Ml}{WS} = \text{Constant} \tag{289}$$

oder nimmt man das frühere Dulong-Petit'sche Gesetz zu Hilfe

[1] Vogel H. Pogg. Ann. vol. 111. pag. 228.

$WA$ = Const., worin $A$ das Aequivalentgewicht bedeutet, so erhält man auch

$$\frac{MlA}{S} = \text{Const.} \tag{290}$$

Gesetze, welche sich leicht in Worte geben und durch die Beobachtungen verificiren lassen. Letzteres hat Vogel versucht und die Zahlen, welche er erhielt für

| | Silber | Kupfer | Zinn |
|---|---|---|---|
| $\frac{Ml}{WS}$ = | 2·44 | 2·54 | 2·36 |
| $\frac{MlA}{S}$ = | 7·44 | 7·67 | 7·69 |

stimmen in erster Annäherung.

Aus den beiden letztgenannten Gleichungen ist es aber möglich, auch andere Beziehungen abzuleiten, welche schon in der Theorie des specifischen Volumens und des Elasticitätsmodulus erörtert wurden.

Unter der Voraussetzung nämlich, dass entweder

$$\frac{l}{S} = \text{Const.} \quad \text{oder} \quad Ml = \text{Const.} \tag{291}$$

folgt aus den früheren Gleichungen

$$MA = \text{Const.} \quad \text{oder} \quad \frac{A}{S} = \text{spec. Vol.} = \text{Const.} \tag{292}$$

Ueber die annähernde Richtigkeit dieser beiden Gleichungen vergl. §. 23 und §. 7.

Schliesslich leitet Vogel für den Wärmeausdehnungscoefficienten $l$ das Gesetz ab, dass derselbe proportional der vierten Potenz des Molekularabstandes sei, unter letzterem die Cubikwurzel aus dem Verhältniss des chemischen Aequivalentes zum specifischen Gewichte verstanden.

Es stützt sich dieser Satz auf das von Werthheim (vergl. §. 23) angegebene Gesetz

$$M\left(\sqrt[3]{\frac{A}{S}}\right)^7 = \text{Constant} \tag{293}$$

denn es ist nach

$$\begin{gathered} M\left(\sqrt[3]{\frac{A}{S}}\right)^7 : \left(\frac{MlA}{S}\right) = C : C' \\ l = \left(\sqrt[3]{\frac{A}{S}}\right)^4 \frac{C}{C'} \end{gathered} \tag{294}$$

wo $C$ und $C'$ zwei willkürliche Constanten bedeuten.

§. 129. Die Beobachtungsmethoden für die Ausdehnung von Krystallen. Während bei den homogenen Körpern grössere Volumina zur Bestimmung des Ausdehnungscoefficienten verwendet werden können, sind hingegen bei den Krystallen, wegen der Inhomogeneität der Structur immer nur kleinere Partien zur Untersuchung verwendbar. Hierdurch ist man genöthigt, möglichst genaue Methoden zur Bestimmung der Volumsänderungen anzuwenden, um die Beobachtungsfehler, welche bei geringeren Längendimensionen um so stärker das Resultat beeinflussen, möglichst zu eliminiren.

Der Ausdehnungscoefficient für Krystalle kann auf dreifachem Wege; 1. durch die directe Bestimmung der Volumsänderung, 2. durch die Messung der Variation der Krystallwinkel, 3. durch die Methode der Interferenz abgeleitet werden. Während die beiden letztgenannten Methoden nur mehr oder minder relative Werthe, wenn auch letztere mit einem sehr grossen Grade der Genauigkeit, geben, so dient hingegen die erste Methode den Ausdehnungscoefficienten in absolutem Längenmasse direct zu bestimmen.

1. Die directe Methode der Bestimmung der Volumsdilatation eines Krystalles hat zwei Aufgaben zu erfüllen. Erstens die genaue Messung der später zu erwärmenden Dimension. Dieselbe geschieht bei normaler Temperatur vor und nach der Erwärmung an einem gewöhnlichen Mikrometermassstab als Sphärometer. Analog hiermit könnte wohl auch des erwärmten Krystalles Volumen bestimmt werden, allein der erwärmte Körper würde auch Volumsänderung des Messinstrumentes hervorrufen, welche selbst bei schneller Messung die Richtigkeit der Angaben beinträchtigen würde. Relative Werthe kann man jedoch nach dieser Methode erhalten, indem man die relative Volumsausdehnung für zwei dicke und gleichmässig erhitzte Körper misst [1]). Um aber absolute Werthe zu erhalten, thut man gut, die Ausdehnung des festen Körpers an einem entfernten Massstabe zu messen. Es kann diess analog dem in pag. 268 beschriebenen Verfahren geschehen; zweckmässiger erscheint die von Pfaff angewendete Methode [2]).

Den hierzu nothwendigen Apparat zeigt die nebenstehende Figur (Fig. 113), in welcher $L$ der zu untersuchende Krystall, $BC$ Ständer aus Gusseisen, $H$ ein Glasstab ist, dessen Axe in $E$ ruht, und dessen ein Ende durch $J$ auf dem Krystall ruhend erhalten wird, während das andere Ende einen Spiegel $G$ trägt.

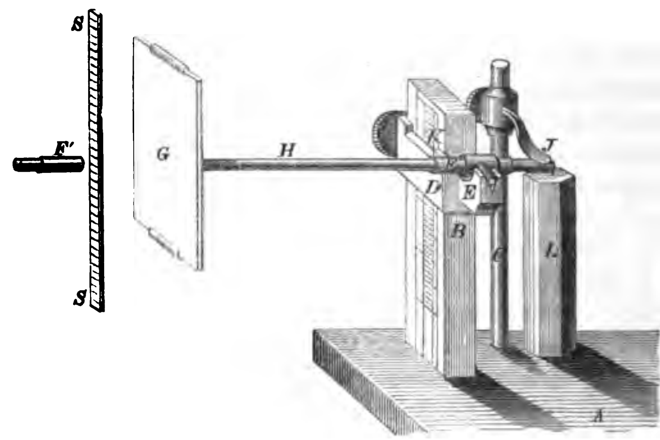
---

[1]) Mitscherlich. Pogg. Ann. vol. 10. pag. 137.

[2]) Pfaff. Pogg Ann. vol. 104. pag. 171. Ueber das der Methode zu Grunde liegende Gauss'sche Princip; vergleiche Poggendorff in Pogg. Ann. 1826. vol. VII. pag. 127.

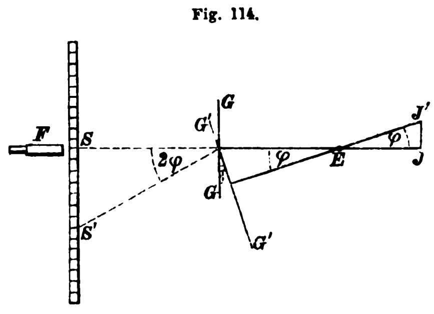
In einer bekannten grösseren Entfernung von der Drehungsaxe $E$

Fig. 113.




genau in der Verlängerung von $H$ ist eine mit horizontalen Theilstrichen versehene Scala $S$ aufgestellt, daneben ist ein Fernrohr $F$ so angebracht, dass mit dem horizontalen Faden im Fernrohr ein bestimmter Theilstrich der vom Spiegel $G$ reflectirten Scala übereinstimmt. Bei einer geringen Ausdehnung oder Zusammenziehung des Krystalls wird der Glasstab $H$ und der Spiegel $G$ um einen Winkel $\varphi$ (Fig. 114) gedreht und die Volumsänderung von dem Krystall ist dann

Fig. 114.




$$EJ \tang \varphi$$

Es wird daher nicht mehr der ursprüngliche Theilstrich $S$ der Scala, sondern der Theilstrich $S'$ im Fernrohr gesehen werden, und die Distanz dieser beiden Theilstriche ist in Folge des Reflexionsgesetzes die Tangente von $2\varphi$ oder

$$SG \tang 2\varphi.$$

Setzt man statt der Tangenten die Distanzen selbst, so hat man

$$JJ' = SS' \frac{EJ}{SG}$$

wodurch man durch die vorhergehenden Messungen von $SG$, $EJ$ und der Ablesung der Theilstriche $SS'$ die Ausdehnung des Krystalls bestimmen kann.

Die Temperaturbestimmungen erfolgten mit dem Apparate in der Weise, dass derselbe in ein Blechgefäss mit Wasser gesetzt wurde, welches

letztere dann von aussen auf eine beliebige Temperatur gebracht werden konnte. Nur für den Glasstab *H* war ein Einschnitt in dem Blechgefässe, so dass der Spiegel *G* ausserhalb des letzgenannten war.

Zu bemerken ist in Folge dieser Anordnung, dass man auch auf die gleichzeitig eintretende Ausdehnung ($l_{Fe} = 0{\cdot}0000124$) der Gusseisenständer *B* und *C* Rücksicht nehmen muss, wodurch die Lage der Axe *E* gegen die Scala *S* unabhängig von der Ausdehnung des Krystalles verändert wird.

2. Die relative Ausdehnung eines Krystalls nach seinen drei Dimensionen wird sich aber auch durch Messung der Kantenwinkel ergeben. Dehnt sich nämlich ein Krystall nach der Richtung einer Axe mehr aus als nach den andern, so wird die Neigung der Flächen gegen diese Axe verändert werden müssen. Der Einfachheit wegen eignen sich zu solchen Beobachtungen meist die Flächen, welche in der Ebene zweier Elasticitätsaxen liegen, also Domen oder Prismen, da die Axenänderung direct nach bekannten krystallographischen Principien aus der Aenderung solcher Winkel abgeleitet werden kann. Die Untersuchungen nach dieser Methode verdanken wir Mitscherlich[1]), welcher sich hierzu des verticalen Reflexionsgoniometers (Fig. 52) benützte.

Um den Krystall bei erhöhter Temperatur zu messen, kann man zwei Methoden anwenden.

a) Der Krystall wird mit einer zweimal gebogenen Zange gefasst und an der Axe des Goniometers befestigt. (Fig. 52.)

In ein vorgelegtes Oel- oder Quecksilberbad taucht nun der Krystall wegen der Form der Zange leicht ein und wird mit letzterem längere Zeit erwärmt. Die zu messenden Flächen müssen vorerst wohl centrirt und justirt sein, sowie etwas über das Niveau des Quecksilbers hervorragen, so dass eine Ablesung leicht möglich ist.

Man kann aber auch den Krystall in ein geschlossenes Blechgefäss bringen, welches nur für die Axe durchlöchert ist, und für den einfallenden und reflectirten Strahl gleichsam Fenster besitzt. Der Krystall kommt hier gleichsam in ein Luftbad, doch darf dabei der wenn auch geringe Unterschied zwischen dem Brechungsvermögen der kalten und warmen Luft nicht vernachlässigt werden[2]).

Bei der grossen Genauigkeit der Winkelmessinstrumente zeichnet sich diese Methode durch grosse Schärfe der Angaben aus und erfordert kein voluminöses Material.

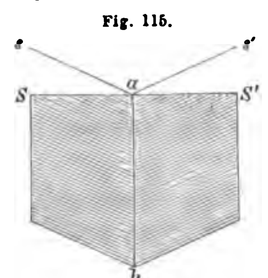
---

[1]) Mitscherlich. Pogg. Ann. vol. 41. pag. 213, 448.

[2]) Vergl. Rudberg. Pogg. Ann. vol. 26. pag. 291.

b) Ausser dieser Methode wendet Mitscherlich[1]) auch die Messung jener Winkel an, welche durch die ungleiche Ausdehnung zweier Krystalle entstehen, welche analog Zwillingen des Gypses zusammengekittet (Fig. 115) und senkrecht zur Zusammensetzungsfläche *ab* angeschliffen sind. Die ebene Schlifffläche *SS'* verwandelt sich bei Temperatursvariationen in *ss'* und liefert dann am Goniometer zwei reflectirte Strahlen.

Fig. 115.




3. Die optischen Methoden zur Bestimmung des Ausdehnungscoefficienten der Krystalle beruhen auf dem Principe der Interferenz. Da nämlich durch die Erwärmung das Volumen geändert wird und hierdurch der vom Lichte durchlaufene Raum, so wird auch einer der interferirenden Strahlen mehr oder minder verzögert und hierdurch das Interferenzbild deutlich verschoben. Fizeau[2]) hat diese Methoden, welche schon im §. 95 erörtert wurden, vielfach angewendet.

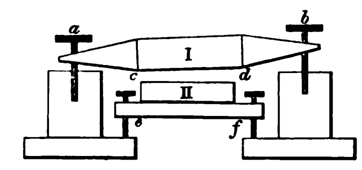
Man muss von diesen optischen Methoden hauptsächlieh zwei unterscheiden.

A) Solche, in welchen der Apparat eine Eintheilung hat, dass die interferirenden Strahlen nicht den zu erwärmenden Körper durchdringen müssen, sondern dass ihr Gangunterschied bloss von dem durch die Ausdehnung kürzer gewordenen Wege in der Luft abhängt.

B) Jene Methode, wo der interferirende Strahl duich das erwärmte Medium geht und daher nebst der Wegänderung durch die Wärme auch die Aenderung des Brechungsexponenten durch die Verminderung der Dichte zu beachten ist.

a) Die erstgenannte Methode A beruht auf dem Apparate (Fig. 116). Die untere Platte ist die auf ihre Ausdehnung zu untersuchende Substanz, während die obere Glasplatte so weit der ersteren genähert werden kann, dass sich durch die Interferenz von der unteren Seite der Glastafel und der oberen Seite der Substanz Interferenzstreifen analog den Newton'schen Ringen bilden. Hat man auf dem oberen Glase Merkzeichen, so werden sich, wenn die obere Platte constant bleibt, bei Er-

Fig. 116.




[1]) Mitscherlich. Pogg. Ann. vol. 41.

[2]) Fizeau. An. de chim. phys. III. Sér. vol. 66. pag. 426. Pogg. Ann. vol. 119. pag. 87. Compt. rend. vol. 58. pag. 923. Pogg. Ann. vol. 123. pag. 515 Compt. rend. vol. 62, pag. 1101. Pogg. Ann. vol. 128. pag. 564.

höhung der Temperatur die Interferenzfransen vom Centrum (oder dem Minimum der Distanz bei convexen Flächen) zur Peripherie verschieben. Man weiss, dass bei einer solchen Verschiebung einer ganzen Franse, der Zwischenraum zwischen Krystall und der Glasplatte, um die Länge einer halben Wellenlänge z. B. bei Beleuchtung mit Natronflamme um $\frac{1}{2}$ ($0·0005888^{mm.}$) abgenommen hat (vergl. pag. 256). Durch die Messung der verschobenen Fransen während der Temperaturserhöhung $t_1 - t$ erhält man also die scheinbare Ausdehnung $l$ für eine Dicke d der Platte II.

Diese scheinbare Ausdehnung muss jedoch noch corrigirt werden, indem die Ausdehnung $l_m$ der Platinschrauben die obere Glasplatte hebt, also den Zwischenraum zu vergrössern sucht. Die Fransen werden sich somit bloss in dem oben angegebenen positiven Sinne verschieben, wenn die Ausdehnung des Körpers die des Platin überwiegt, hingegen im entgegengesetzten negativen Sinne zum Nahepunkte hinwandern, wenn die Ausdehnung des Platin grösser ist. Diesem Sinne gemäss ist auch das Zeichen von $x$ in der Formel einzuführen. Weiters ist aber noch eine Berichtigung der Anzahl der Fransen anzugeben, hervorgebracht aus den Wirkungen der durch die Wärme ausgedehnten[1]), zwischen den beiden Platten befindlichen Luftschichte von der Dicke $d_L$.

Nach den bereits im §. 95 angegebenen Formeln 239, 240 wird sich der Ausdehnungscoefficient leicht berechnen lassen, da

$$l = \frac{\frac{x\lambda}{2} + l_m (d + d_L)(t' - t)}{d(t' - t)} \qquad (295)$$

Da die Beobachtung der Fransen aus grösserer Distanz mit dem Fernrohr geschehen kann, so kann der ganze Apparat in einen geschlossenen Raum gebracht und in demselben auf die gewünschte Temperatur gebracht werden. Um die axiale Ausdehnung von Krystallen zu messen, müssen diese letzteren in passend, parallel den Elasticitätsaxen geschnittenen parallelepipedischen Stücken in den Apparat gebracht werden.

Bei dieser erwähnten Methode tritt eine Correction wegen des durch die Wärme geänderten Brechungsexponenten nur bezüglich der Luft ein, und ist daher vollständig ermittelbar. Schwieriger ist diese Correction bei der nachfolgenden Methode, welche wir, um den Einfluss der Wärme auf das Licht zu studiren, gleichfalls im §. 95, pag. 257 erwähnt haben.

b) Bildet man nämlich Fransen an einer Platte des zu untersuchenden Materials durch die Interferenz des an der Vorder- und Rückseite

[1]) Der Ausdehnungscoefficient der Luft ist $l = 0·003670$; der des Platins ist $l = 0·000008842$.

dieser Platte reflectirten Lichtstrahles, so ist die Anzahl der durch die Erwärmung verschobenen Fransen abhängig von der Dicke d der Platte dem Ausdehnungscoefficienten $l$, dem Brechungsexponenten $\mu$ bei gewöhnlicher Temperatur und $\mu'$ bei der Erwärmung. Aus der Gleichung 241 erhält man dann unmittelbar den Ausdehnungscoefficienten der Platte zu

$$1 + lt = \frac{\frac{x\lambda}{2} + d\mu}{d\mu'} \tag{296}$$

Wie man aus dieser Formel sieht, ist die Auswerthung der Ausdehnungscoefficienten von der Kenntniss des Einflusses der Erwärmung auf den Brechungsexponenten abhängig. Da aber letzterer sich ebenfalls mit der Dichte ändert, so ist durch diese Methode die Bestimmung von $l$ für einfach brechende Medien nicht möglich.

Für doppelt brechende Medien führt jedoch diess Verfahren indirect zur Kenntniss des Ausdehnungscoefficienten $l$. Man muss nämlich bedenken, dass in Folge der Doppelbrechung der Substanz sich nicht bloss ein, sondern vielmehr zwei entgegengesetzt polarisirte Fransensysteme bilden, welche man durch ein doppeltbrechendes Prisma trennen und besonders beobachten kann. Es wird daher möglich sein, bei zwei Platten, deren eine parallel, die zweite senkrecht zu einer Elasticitätsaxe geschnitten ist, Fransen zu erzeugen, welche in beiden Platten von demselben Brechungsexponenten $\mu$ abhängen.

Gilt die obige Gleichung für die erste Platte, so wird für die Ausdehnung $l'$ der zweiten gleich dicken (d) Platte, welche also senkrecht gegen die der ersten erfolgt, gelten

$$1 + l't = \frac{2\mu d + x_1\lambda}{2\mu d} \tag{296a}$$

Hieraus lässt sich nun $l\,l'$ und $l' - l$ ableiten. Es ist nämlich für $t$

$$\frac{1 + lt}{1 + l't} = \frac{2\mu d + x\lambda}{2\mu d + x_1\lambda} = C \tag{297}$$

Hingegen bei einer zweiten Temperatur $t'$

$$\frac{1 + lt'}{1 + l't'} = \frac{2\mu d + {'x}\lambda}{2\mu d + {'x_1}\lambda} = C' \tag{297a}$$

Man kann hieraus $l$ oder $l'$ bestimmen nach der Formel

$$l' = \frac{\frac{1}{t'}(C' - 1) - \frac{1}{t}(C - 1)}{C - C'} \tag{298}$$

[1]) $\mu$ (Luft) für $t = 15^0$ ist 1·000294; für eine höhere Temperatur und geringe Dichte der Luft wird hieraus $\mu'$ mittelst der Formel (116) der Molekulartheorie des Lichtes aus der bekannten Temperatur, aus dem Luftdrucke, und dem Ausdehnungscoefficienten abgeleitet.

Die Differenz $l - l'$ lässt sich angeben, wenn man in (297) die Zahl der verschobenen Fransen $\chi$ nur für die Einheit der Dicke und Temperatur, also für $t = 1^0$, $d = 1^{mm.}$ einführt, man erhält dann

$$\frac{l - l'}{1 + l'} = \frac{\lambda (\chi - \chi_1)}{2\mu + \lambda \chi_1} \tag{299}$$

welcher Werth, weil hier $l$ nahe der Einheit ist, dem Werthe der Differenz $l - l'$ überaus nahe kommt.

Diese Methode ist wohl einfacher als die ersterwähnte, bedarf jedoch immer zu ihrer Durchführung doppeltbrechender Krystalle und sehr genauer Messung der Anzahl der verschobenen Fransen.

§. 130. Die mittlere Volumsänderung von Krystallen. Die Methoden des vorhergehenden Paragraphs erlauben mit grosser Genauigkeit die axial verschiedene Ausdehnung der Krystalle sicher zu stellen. Will man die cubische Ausdehnung der Krystalle berechnen, so kann man, wie früher erwähnt, hierzu die Methode der directen Volumsbestimmung des Krystalls in Flüssigkeit von bekannter Ausdehnung benützen. Ist nämlich die Ausdehnung der Flüssigkeit sowie des calibrirten Glasgefässes [$l$ (Glas) = 0·0000088. .] für verschiedene Temperaturen bekannt, so wird der Stand der Flüssigkeit die Aenderungen im Volumen des Krystalls angeben.

Allein auch die Summe der drei linearen Ausdehnungscoefficienten $l\ l'\ l''$, welche die Verlängerungen der Krystallaxen $a\ b\ c$ angeben, wird, wenn Grössen höherer Ordnung vernachlässigt werden, diesen cubischen Ausdehnungscoefficienten gleich sein.

$$K = l_1 + l_2 + l_3 \tag{300}$$

Sucht man aber einen Werth, welcher die mittlere lineare Ausdehnung $l_m$ des Krystalls darstellen soll, so wird sich dieselbe aus der Kenntniss der cubischen Ausdehnung ergeben, denn da $K = 3l$, so ist

$$l_m = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{3}.$$

Diese [1]) mittlere lineare Ausdehnung gibt uns dann den Werth an, welcher der Substanz als solcher, ohne Rücksicht auf ihre symmetrische Molekulargruppirung, gleichsam ihrem homogenen Zustande zukommt.

Man kann jedoch auch noch die weitere Frage aufwerfen, wie gross die Ausdehnung $L_1$ eines Krystalls nach einer willkürlichen Richtung $\{p\ q\ r\}$ sei. Es erhellt, dass hierfür, wie für alle Probleme der Krystalle, welche von drei axial verschiedenen Werthen abhängen, der Ausdeh-

[1]) Es ist diess analog der Berechnung der mittleren beobachteten Dichte aus den drei axialen Dichten.

nungscoefficient sowohl von den axialen Werthen $l_1$ $l_2$ $l_3$, als auch von der Neigung $p\,q\,r$ dieser Richtung zu den Axen abhängt. Fällt diese letztere Richtung in die Ebene zweier Coordinaten, so kann man sagen

$$L_1 = l_1 \cos p + l_2 \cos q$$

für eine intermediare Richtung aber ist

$$L_1 = l_1 \cos p + l_2 \cos q + l_3 \cos r \tag{301}$$

Für jenen Fall nun, wo $p = q = r$, also

$$\cos^2 p + \cos^2 q + \cos^2 r = 3 \cos^2 p_1 = 1 \qquad p_1 = 54^0\,44'$$

fällt diese Formel mit der mittleren obigen Ausdehnung zusammen. Man könnte somit auch die mittlere Ausdehnung eines doppeltbrechenden Krystalls durch Eine Beobachtung bestimmen, wenn man dieselbe in einer Richtung misst, welche der Normale auf der Octaederfläche {111} entspricht.

§. 131. Wirkungen der geleiteten Wärme auf die Fortpflanzung des Lichtes. In Folge der Veränderung des Volumens, welche die geleitete Wärme an jedem Körper bewirkt, tritt auch diese letztgenannte in eine Beziehung zu der Fortpflanzung des Lichtes, welche theils in den vorhergehenden Paragraphen besprochen, theils schon durch die Formeln der Molekulartheorie (Kap. X) begründet ist. Die Formeln der Molekulartheorie des Lichtes lehren nämlich (pag. 152), dass mit der Abnahme der Dichte auch eine gesetzmässige Abnahme des Brechungsexponenten und daher eine Zunahme der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes verbunden sein müsse.

Es sind jedoch mehrere mit diesem Gesetze nicht übereinstimmende Thatsachen bekannt. Namentlich lehren die Beobachtungen von Fizeau (l. c.) in unumstösslicher Weise, dass bei mehreren festen Körpern die Fortpflanzung des Lichtes mit der Zunahme der Temperatur abnimmt oder der Brechungsexponent zunimmt. Anderseits habe ich in meinen Studien [1]) bereits angegeben, dass für flüssige Körper das Brechungsvermögen, gerechnet aus Beobachtungen bei mehreren Temperaturen, auch mit Zunahme der Wärme abnimmt, ein Anzeichen, dass der Brechungsexponent mehr als der Volumsänderung entspricht abgenommen hat. Letzteren Fall habe ich in meinen Studien pag. 63 dadurch erklärt, dass die das Licht verzögernden Kräfte $\mathfrak{X}_v$ eine Function der Temperatur sind, und mit der Erhöhung derselben bei flüssigen Körpern abnehmen.

An dieser Stelle, wo wir die Wirkungen der geleiteten Wärme in eine Volums- und Temperatursänderung, d. h. in eine Aenderung des

---

[1]) Vergl. des Verfassers Studien pag. 63.

mittleren Weges der Moleküle und der Weggeschwindigkeit, zerlegen gelernt haben, erscheint es auch möglich, den Einfluss der geleiteten Wärme auf die Fortpflanzung des Lichtes genauer zu besprechen, als diess im analogen §. 118 geschah.

Wie nämlich bei Zufluss von äusserer freier Wärme eine positive oder negative Aenderung des Volumens oder der Temperatur (vergl. §. 127) eintreten kann, so ist auch der Einfluss der geleiteten Wärme auf die Fortpflanzung des Lichtes theils von der mittleren Weglänge des Moleküls, d. i. vom Volumen, theils auch von der Vibrationsgeschwindigkeit, d. i. Temperatur, theils im positiven, theils im negativen Sinne abhängig.

Den Einfluss des Volumens gibt die Theorie des Refractionsvermögens (pag. 152).

Den Einfluss der Vibrationsgeschwindigkeit, also auch der Temperatur ($mc^2$ vergl. Satz 281), können vielleicht einige Betrachtungen klar machen. Für Gase nimmt die Molekulartheorie eine freie Beweglichkeit der einzelnen Theile an, sowie die Fortpflanzung des Lichtes bei denselben durch den gegenseitigen Druck (vergl. pag. 144) erklärbar ist. Der Einfluss einer Veränderung der mittleren Geschwindigkeit des Gasmoleküls auf die Lichtfortpflanzungsgeschwindigkeit wird somit verschwindend sein. Bei den flüssigen Körpern hingegen, wo schon eine Beschränkung der Freiheit der Molekularbewegung eintritt, wird jedenfalls die gegenseitige Einwirkung in Folge der Lichtbewegung um so schneller erfolgen, je schneller bereits die durch die freie Wärme erzeugte Molekulargeschwindigkeit $c^2$ ist. Eine solche secundäre Störung wird wahrscheinlich den lichtverzögernden Kräften $X_v$, sowie auch der Zahl der optischen Atomen $ZG$ proportional sein. Man kann somit annehmen, dass bei den flüssigen erwärmten Körpern eine Vermehrung der Lichtfortpflanzungsgeschwindigkeit nicht nur von der Volumsvermehrung abhängt, sondern auch Folge ist einer Verminderung der sogenannten lichtverzögernden Kräfte $X_v$ (pag. 148), welche mit der Zunahme der Temperatur eintritt und durch nachstehende Formel ausdrückbar ist

$$ {}_{t'}X_v = {}_{t}X_v \left[1 \mp C_x ZG \, {}_{t}X_v \Delta t\right] \qquad (302)$$

In dieser Formel ist $C_x$ eine Constante, $t\,t'$ die verglichenen Temperaturen und deren Intervalle $\Delta t$. Für die bisher untersuchten Flüssigkeiten ist $C_x$ eine negative Constante, nahe der Einheit gleich. Obige Formel stimmt mit den Berechnungen, welche analog der auf pag. 153 angeführten Methode und den Zahlenverhältnissen von $M$ angestellt wurden.

Während die ebenerwähnte Constante $C_x$ für die flüssigen Stoffe bisher als negativ anzunehmen ist, haben die Beobachtungen an festen Körpern gelehrt, dass mehreren dieser letzteren ein positives Vorzeichen dieser Constante $C_x$ zukommt. Die lichtverzögernde Kraft $X_v$ wird daher in manchen festen Körpern durch erhöhte Wärmemolekularbewegung vergrössert, in anderen aber vermindert. Ich erinnere hier an die schon pag. 317 angeführte Vergrösserung des Brechungsexponenten von Glas und Calcit bei Erhöhung der Temperatur.

Da die Bewegungen der Moleküle fester Körper ungleich den ausdehnsam flüssigen Körpern innerhalb der Grenzen des stabilen Gleichgewichtes vor sich gehen müssen, auch die Fortpflanzung des Lichtes (pag. 145) nur durch den Zug der Nachbarmoleküle möglich ist, so wäre diesen Verhältnissen die Annahme nicht widersprechend, dass mit der Erhöhung der Temperatur auch in einzelnen Fällen eine Erhöhung des Brechungsexponenten eintritt. Die Wärmemolekularbewegungen werden wahrscheinlich je nach der axialen Richtung, in der sie erfolgen, den Gang des Lichtstrahles hemmen oder beschleunigen. Solche Störungen der Cohäsions- und optischen Elasticitätsverhältnisse, deren ich schon pag. 319 erwähnt, können Ursache sein von dem positiven oder negativen Vorzeichen der obigen Constante $C_v$ in der Formel für die lichtverzögernden Kräfte.

Obgleich durch diese Erwägungen nun nachgewiesen ward, dass die Werthe von $X_v$, und in Folge dessen (vergl. Fermel 109) auch implicite die Werthe des Brechungsvermögens $M$ eine Function der Temperatur sind, so werden hierdurch die Formeln der Molekulartheorie des Lichtes nicht ungiltig. So wie wir trotz der rascheren Erwärmung eines Metalls doch irgend eine Temperatur des letzgenannten mit einer gleichen Temperatur von Wasser als ident betrachten, so werden wir auch bei den lichtverzögernden Kräften zu unterscheiden haben zwischen $X_v$ eines Körpers bei verschiedenen Temperaturen und zwischen $X_v$ von mehreren Körpern gleicher Temperatur. Die Veränderung von $X_v$ oder implicite von $M$ eines Körpers durch die Erwärmung spricht sich ungefähr in der 6.—7. Decimalstelle aus. Die Variationen sind daher selbst bei grösseren Temperaturintervallen noch immer kleiner, als dass sie das Refractionsäquivalent beinflussen könnten.

Vergleicht man hingegen mehrere Körper bei gleicher Temperatur, wie ich diess bei Ableitung meiner Refractionsäquivalente gethan, so ist es nicht nöthig, $\varDelta t$ bei Berechnung von $M$ und $\mathfrak{M}$ zu eliminiren. Erstens sind die Variationen in Folge Formel 302 nur geringer als die übrigen bisher möglichen Fehler der Ableitung, zweitens können für gleiche Temperaturen die Werthe von $X_v$ mehrerer Körper unbedingt als

constant betrachtet werden. Einen Beweis hierfür liefert die Ableitung des Satzes (123). Bei Vergleichung mehrerer Körper unter der Annahme gleicher Temperatur wird man somit auf die Eliminirung von $\Delta t$ in 302 verzichten dürfen, und die Werthe von $\mathfrak{M}$ und $ZG$ mittelst Annahme constanter oder gleicher Werthe von $X_v$ ableiten können.

§. 132. Beziehungen der Ausdehnungscoefficienten der Krystalle zu der krystallographischen und optischen Symmetrie. Thermisches Schema der Ausdehnung $\tau_a(\mathfrak{abc})$.

Nach den bekannten Methoden der vorhergehenden Paragraphe haben Pfaff und Fizeau zahlreiche Krystalle untersucht und deren Ausdehnungscoefficienten bestimmt. Um die axiale Ausdehnung doppeltbrechender Medien vollkommen sicher zu stellen, ist dieselbe bei den pyramidalen und hexagonalen nach der Hauptaxe $c$ und einer darauf senkrechten Richtung zu bestimmen, da ja die Werthe für die Ausdehnung senkrecht zu der Hauptaxe gleich sind; hingegen müssen in den zweiaxigen Systemen drei Werthe $l\ l'\ l''$ bestimmt werden. Im prismatischen Systeme sind die Werthe der Ausdehnung parallel den drei Krystallaxen genügend, im monoklinischen muss eine Richtung mit der Symmetrieaxe zusammenfallen, die beiden anderen senkrecht zu einander geneigten Richtungen müssen in der Symmetrieebene liegen.

Aus den bisherigen Beobachtungen ergeben sich nun folgende Schlüsse:

Die Ausdehnung von Krystallen erfolgt analog der Symmetrie der Krystallsysteme und ist für die tesseralen Krystalle nach den drei, für die einaxigen Krystalle nach zwei Coordinatenaxen gleich.

Die Volumsänderung der Krystalle durch die Wärme ist meist eine sehr beträchtliche und es übertrifft sogar in manchen Fällen der lineare Ausdehnungscoefficient derselben selbst den der Metalle. So weist beispielsweise Gyps nach Pfaff einen linearen Ausdehnungscoefficienten $l = 0{\cdot}000036$ auf.

Mit einer Erhöhung der Temperatur ist bei den Krystallen nicht immer eine lineare Ausdehnung verbunden, sondern es tritt für manche Richtungen in denselben analog wie bei Wasser eine lineare Contraction auf. So zieht sich beispielsweise bei einer Erwärmung der Beryll und Calcit in einer Richtung senkrecht auf die optische Axe zusammen. Eben so hat auch Pfaff an Adular und Diopsid, Angström an Gyps eine lineare Contraction gefunden.

So weit die Beobachtungen lehren, ist aber die lineare Contraction bei diesen anisophanen Körpern so gering (das Maximum derselben erreicht bei Calcit noch nicht $l = -0{\cdot}000003$), dass die Ausdehnungen

noch die anderen Dimensionen überwiegen und der Werth der cubischen Ausdehnung noch positiv ist. Für die isophanen Körper wie Diamant und Cuprit ($Cu_2O$) hat hingegen Fizeau einen Gang der Volumsausdehnung nachgewiesen, nach welchem Diamant bei —42·3° C., Rothkupfererz bei —4·3° das Maximum ihrer Dichte erreichen würden, so dass bei weiterer Erkaltung analog dem Wasser eine Dilatation eintreten würde.

Sucht man schliesslich, noch vollkommen absehend von dieser anormalen Contraction, die Werthe der axialen Ausdehnung von der krystallographischen oder optischen Symmetrie abhängig zu machen, so wird man sich vorerst über ein Schema der Bezeichnung einigen müssen. Behält man wieder die nothwendige Orientirung der Ausdehnung nach den drei Dimensionen, namentlich bei orthogonalen Systemen, im Auge, so wird man wie die optischen Elasticitätsaxen (§. 106) auch die Ausdehnungscoefficienten der Grösse nach unterscheiden und in ein Schema eintragen, dessen Schlüssel die Reihenfolge der Krystallaxen $a > b > c$ ist. Um diese Ausdehnungscoefficienten von den optischen Werthen sowohl als auch von den nachfolgenden Werthen für die Leitungsfähigkeit der Temperatur zu unterscheiden, setze ich vor das Schema (abc) das Symbol $\tau_a$ (Ausdehnung durch die Wärme). Man würde nun in dieser Weise unter dem Schema $\tau_a$(cca) eine solche Ausdehnung verstehen, welche nach den Krystallaxen $ab$ gleich und kleiner als nach der Axe $c$ ist. Es betrifft somit einen einaxigen Krystall, dessen optische Axe mit $c$ zusammenfällt:

Zu bemerken ist, da auch eine negative Ausdehnung, d. i. eine Contraction beobachtet wird, dass das Schema eine nothwendige Erweiterung bedarf. Um diese negativen Werthe darzustellen, wird man nämlich die Ausdehnungscoefficienten ihrem absoluten Werthe nach ordnen und das negative Vorzeichen unter dem betreffenden Coefficienten anbringen, so würde das Schema des Calcit $\tau_a$($\underset{-}{c}\underset{-}{c}$a) bedeuten, dass die Contraction senkrecht gegen die optische Axe noch kleiner als die zu letzterer parallel erfolgende Dilatation ist.

Ebenso wird man auch bei den monoklinischen Krystallen ein dem optischen analoges Schema einführen können. Da bei letzterem aber auch die Krystallaxen nicht den Maxima und Minima entsprechen, so wird man entweder ein annäherndes Schema für die Grösse der Ausdehnung der klinischen Krystallaxen annehmen können, oder ein auf genauer Untersuchung basirtes Schema der thermischen Axen. So würde ersteres Schema für Gyps lauten (100) : (010) : (001) = $\tau$(bac), während das genaue Schema ist $\tau$[(100)ac] = 37°. (Vergl. später.)

Hat man die bisherigen Beobachtungen von Pfaff und Fizeau auf diese Weise schematisch dargestellt, so ergeben sich leicht einige,

wenn auch negative Beziehungen zu den Krystall- und optischen Elasticitätsaxen:

1. Die Ausdehnung der Krystalle ist von der Grösse der Krystallaxen unabhängig. So ist das Schema für Baryt, wenn $a:b:c = 1\cdot3:1:0\cdot8$ $\tau_a(\mathfrak{bca})$; für Topas, wenn $a:b:c = 1\cdot8:1:0\cdot9$ $\tau_a(\mathfrak{bac})$; für Arragonit[1]), wenn $a:b:c = 1\cdot58:1:0\cdot57$ $\tau_a(\mathfrak{bca})$.

2. Die Ausdehnung isomorpher Körper erfolgt nicht nach demselben Schema. So ist das Schema des Calcit $\tau_a(\underline{\mathfrak{cc}}\mathfrak{a})$; das des isomorphen Spatheisensteines $\tau_a(\mathfrak{cca})$; ferner bei Baryt $\tau_a(\mathfrak{bca})$ und das des isomorphen Coelestin $\tau_a(\mathfrak{cba})$.

3. Das optische Schema fällt mit dem Schema der Thermischen nicht zusammen.

Die obigen Substanzen liefern hierfür ebenfalls den Beweis, denn die Schemata sind

| | optisch | thermisch |
|---|---|---|
| von Arragonit | $\{\mathfrak{cb}\underline{\mathfrak{a}}\}$ | $\tau_a(\mathfrak{bca})$ |
| „ Topas | $\{\mathfrak{ba}\underline{\mathfrak{c}}\}$ | $\tau_a(\mathfrak{bac})$ |
| „ Schwerspath | $\{\mathfrak{ab}\underline{\mathfrak{c}}\}$ | $\tau_a(\mathfrak{bca})$ |
| „ Coelestin | $\{\mathfrak{ab}\underline{\mathfrak{c}}\}$ | $\tau_a(\mathfrak{cba})$ |

Eine analoge Unabhängigkeit der beiden Schemata zeigen die pyramidalen Krystalle, denn für den optisch negativen Vesuvian und den optisch positiven Zinnstein gelten die Schemata

| | | |
|---|---|---|
| Vesuvian | $\{\mathfrak{cc}\underline{\mathfrak{a}}\}$ | $\tau_a(\mathfrak{aac})$ |
| Zinnstein | $\{\mathfrak{aa}\underline{\mathfrak{c}}\}$ | $\tau_a(\mathfrak{cca})$ |

Nur bei den Krystallen des hexagonalen Systems, so weit sie bisher untersucht sind, scheint eine gewisse Uebereinstimmung zwischen dem optischen und thermischen Schema zu bestehen. Es ist nämlich die Ausdehnung parallel der optischen Axe, bei mehreren negativen Krystallen $\{\mathfrak{cc}\underline{\mathfrak{a}}\}$ grösser als senkrecht zu denselben, also das thermische Schema übereinstimmend $\tau_a(\mathfrak{cca})$; während bei einigen optisch positiven Krystallen $\{\mathfrak{aa}\underline{\mathfrak{c}}\}$ die Ausdehnung parallel den Nebenaxen grösser ist, entsprechend dem analogen Schema $\tau_a(\mathfrak{aac})$.

Durch diese Zusammenstellung wird ziemlich deutlich klar gemacht, dass die Grösse der Elasticitätsaxen mit der Grösse der gleichgerichteten Ausdehnung nicht proportional ist. Dass eine solche Uebereinstimmung auch in der That nicht eintreffen kann, zeigt ein Rückblick auf die molekularen Bewegungen, welche wir beiden Agentien zu Grunde legen. So bedeutet $\mathfrak{a}$ die Grösse der Fortpflanzung jener Lichtstrahlen,

[1]) Vergl. Pfaff. Pogg. Ann. vol. 107. pag. 151 und Lang. Sitzungsb. d. Wien. Acad. vol. XXXIII. pag. 536.

in welchen die einzelnen Moleküle parallel dieser Elasticitätsaxe vibriren; das Symbol $\tau_a(\mathfrak{a})$ bedeutet hingegen die grösste Ausdehnung nach eben dieser Richtung, welche aber nicht in transversalen Vibrationen, sondern in vollkommen willkürlichen Molekularbewegungen ihren Grund haben wird. Dadurch wird es klar, dass die axial verschiedene Ausdehnung durch drei Zustände beeinflusst werden wird. 1. Von der axial verschiedenen Molekularlagerung, 2. von der verschiedenen Ausdehnung der im Krystall vertretenen Stoffe, 3. schliesslich von der Art der Congregation der Krystallmoleküle zum fertigen Krystall.

Der Einfluss der Krystallgestalt wird wohl zum grössten Theile durch die Beobachtung eliminirt, dass isomorphe Körper sich nicht gleichmässig ausdehnen, doch kann wieder anderseits nicht übersehen werden, dass, da der Krystall auch bei verschiedenen Temperaturen seine geometrische Gestalt haben muss, der relativen Ausdehnung durch die Erhaltung einer äusseren geometrischen Form eine gewisse unübersteigbare Grenze gesetzt ist. Ferner wird die Ausdehnung, wenn man sich dieselbe als Vergrösserung des mittleren Weges der Moleküle darstellt (wobei die Richtung des Weges willkürlich ist), auch von der relativen Wegvergrösserung der axial gelagerten Moleküle abhängen. Eine solche Abhängigkeit kann man sich in der Weise denken, dass, wenn das in der Richtung $x$ gelagerte Molekül eine grössere Veränderung seines mittleren Weges erreicht, als das in der Ebene $y$ liegende Molekül, die mittlere Bewegung beider hierdurch beeinflusst wird. Es entspricht diess gleichsam der Beobachtung, dass bei anisophanen Körpern die Ausdehnung nach einer Richtung doch die Contraction nach den andern Richtungen überwiegt.

Jene Fälle, wo wie bei Kupferoxydul eine Contraction auftritt, können hier nur auf die früher in §. 127 gegebene Erklärung zurückgeführt werden.

Ausser diesen beiden Einflüssen ist noch die axiale Lagerung der Moleküle als Hauptursache in's Auge zu fassen. Man wird als einfachsten Vorgang bei dieser axial ungleichen Ausdehnung auch annehmen können, dass letztere nahezu proportional ist jener Ausdehnung, welche dem Grundstoffe eigenthümlich ist, der sich auf eben dieser Axe (vergl. pag. 170) vermöge der Krystallbildung gelagert hat. Nach diesem Principe wird somit der Ausdehnungscoëfficient nach jenen Richtungen ein Maximum erreichen, in welcher Richtung im Grundmolekül des Krystalls selbst ein sich mehr ausdehnender Grundstoff gelagert hat. Es soll also nach denjenigen Richtungen, nach welchen die sich so bedeutend ausdehnenden M e t a l l e im Grundmoleküle liegen (vgl. pag. 170), auch die grösste Ausdehnung erfolgen. Betrachtet man in dieser Bezie-

hung die Ausdehnungscoefficienten mehrerer Krystalle mit der auf Grund der Molekulartheorie des Lichtes angenommenen Atomgruppirung, so ist eine nahe Uebereinstimmung beider vorhanden.

So ist nach den Resultaten von Fizeau und Pfaff das thermische Schema für Rutil τ(cca), für Zinnstein τ(cca), für Zirkon τ(aac), während die Lagerung der Atome in Rutil (ΘΘTi), in Zinnstein (ΘΘSn), in Zirkon ($SiΘ_3$ $SiΘ_3$ Zr) war[1]).

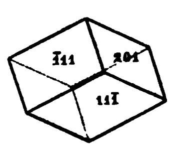
Das hier angedeutete Gesetz der Abhängigkeit der axialen Ausdehnung von der Lagerung der optischen Atome (*ZG*) im Grundmolekül des Krystalls wird wohl durch die beiden früher erwähnten Beziehungen der Ausdehnung zur Krystallgestalt sowohl, als auch zu Nachbaratomen mehr oder minder modificirt werden können. Ebenso fehlt auch die genaue Kenntniss jenes Gesetzes, nach welchem die Contraction bei Temperaturerhöhung erfolgt. Man muss sich daher auf diesem Gebiete nur mit der Andeutung jener Abhängigkeit begnügen, welche der mechanischen Theorie der Wärme in ihren Principien möglichst nahe kommt. In wie weit diese Ausdehnung mit der Wärmeleitung in Verbindung steht, wird in einem nächsten Paragraphe erörtert werden.

§. 133. Einfluss der Ausdehnung auf die krystallographische Symmetrie. Durch die Volumsänderung eines Krystalls bei erhöhter Temperatur wird nothwendig eine Aenderung der krystallographischen Elemente auftreten, die sich durch die Winkelmessungen constatiren lässt. Die Aenderungen der Krystallwinkel wurden schon von Mitscherlich und Neumann benützt, um durch dieselben zur Kenntniss des Einflusses der Wärme auf die Krystallgestallt zu gelangen. Ein Beispiel für solche Winkelveränderungen möge Calcit sein, für welchen die nachstehenden Winkel die Werthe haben

(201) ($\bar{1}11$) bei $10^0$ C. = $74^0$ 56′ 1″ bei $164^0$ = $75^0$ 7′ 35″
(201) ($11\bar{1}$) bei $10^0$ C. = $105^0$ 4′ 45″ bei $164^0$ = $104^0$ 50′ 45″

Die Zunahme und Abnahme dieser zwei Winkel der Flächennormalen (daher die Supplemente zu dem wahren inneren Körperwinkel) deuten an, dass das Rhomboeder in der Richtung der horizontalen Nebenaxen contrahirt, hingegen in jenen der axialen Hauptaxe sich ausgedehnt habe. Die directen Beobachtungen der Volumsänderung haben die Existenz einer wirklichen Contraction dargethan. Da durch diese Contraction der früher stumpfe Rhomboeder spitzig wird, so nähert er sich hierdurch der Würfelform.

Fig. 117.




[1]) Da die Härte einer Silicatverbindung mit Aufnahme des Zirconiums zunimmt, mit Zunahme der Härte aber meist die Ausdehnung abnimmt, so ist es nicht unrichtig, vorauszusetzen, dass die Ausdehnung des Zirconiums geringer als jene des Siliciums ist.

Es entsteht in Folge dessen die Frage, ob sich bei einer weiteren Erhöhung der Temperatur auch die Annäherung des Rhomboeders an den Würfel immer weiter vollzieht, bis erstere vielleicht endlich mit letzterer übereinstimmt. Es ist diess eine Frage nach der Constanz der Krystallsysteme und deren Unveränderlichkeit durch die Temperatur.

Diese Frage gewinnt namentlich für jene Theoretiker an Wichtigkeit, welche die Krystallsysteme als unter sich vollkommen getrennt und ohne Zusammenhang darzustellen pflegen. Obgleich von theoretischer Seite die Möglichkeit der Existenz von willkürlichen Ausdehnungscoefficienten und daher auch indirect die Möglichkeit zugegeben werden muss, dass durch die variable Ausdehnung der Axen eines prismatischen Krystalls diese letzteren dem Grössenverhältniss derjenigen eines pyramidalen Krystalls genähert werden können, so spricht doch eine solche Anschauungsweise zu sehr gegen die beliebte strenge Abschliessungsmethode der Krystallsysteme, als um bei Vielen Zustimmung zu finden. Es wird daher auch um die Constanz des Krystallsystems auch in erwärmtem Zustande zu erklären, zu der Behauptung gegriffen, dass niemals ein irrationales Parametersystem in ein rationales verwandelt werden kann, da das Charakteristikon der Systeme das irrationale Verhältniss der Parameter $a:b:c$ sei.

Für vorliegendes Lehrbuch, in welchem von vornherein die Krystallsysteme als blosse Fixpunkte einer continuirlichen in einander verlaufenden Reihe geometrischer Gestalten angenommen wurden, verliert die obige Frage nach der Constanz des Krystallsystems ihre Bedeutung. Würde selbst die axial ungleiche Ausdehnung eines prismatischen Krystalls dessen Prismenwinkel dem Winkel eines pyramidalen Krystalls nähern, so würde diess genau von demselben Gesichtspunkte, wie die Variation der optisch zweiaxigen Mittel in einaxige, als blosser Durchgang durch einen Fixpunkt der Funktion zu betrachten sein.

Die optischen Beobachtungen von Descloizeaux[1]) an erwärmten zweiaxigen Krystallen, deren Axenwinkel bei gewisser Temperatur auf 0° herabging, sprechen gegen die Meinung einer absoluten Unveränderlichkeit der axialen Werthe eines Krystallsystems.

Da die relative Ausdehnung aber nur sehr gering ist, so haben die bisherigen Beobachtungen uns noch keine solchen Wendepunkte nachgewiesen. In dieser Beziehung wäre die Durchforschung prismatischer Krystalle, deren Axenverhältniss nahe 1 : 1 : 1 ist, z. B. Antimonit, Anhydrit, gewiss von einiger Wichtigkeit.

---

[1]) Descloizeaux. An. de Min. 1866.

Ist auch durch diese Bemerkungen nachgewiesen, dass die absolute Unveränderlichkeit des Krystallsystems, wenn sie auch etwa vorhanden ist, doch nicht unbedingt behauptet werden darf, so muss um so mehr darauf aufmerksam gemacht werden, dass man oftmals in den Fehler geräth, die wirklich bestehende Constanz des äusseren Habitus und des Zonenverbandes mit der prätendirten Constanz der relativen axialen Werthe zu verwechseln.

Da wie leicht erhellt, durch die Wirkung der Wärme wohl die relative Raumausdehnung geändert, aber keine neue Flächenbildung am fertigen Krystall hervorgerufen werden kann, so ist hierdurch die Constanz der äusseren Flächenanordnung bedingt. Es wird somit, selbst wenn das Axenverhältniss eines prismatischen Krystalls nahe $1:1:1$ würde, doch derselbe keine neue pyramidale Flächensymmetrie zeigen.

Die Wärmewirkung ist ferner eine allseits continuirliche, daher wir für jede intermediäre Richtung das Gesetz (Satz 301) benützen können. Aus demselben Grunde ergibt sich aber auch die Constanz des Zonenverbandes, denn nicht nur die Endpunkte der Zone, sondern auch alle intermediären Punkte werden proportional ihren Winkelabständen verschoben.

Diess Gesetz der Erhaltung der Zonen kann unter der Form [1]) gegeben werden:

$$\frac{1}{h}\left[a(\alpha d\lambda + \alpha' d\lambda' + \alpha'' d\lambda'' + \lambda d\alpha + \lambda' d\alpha' + \lambda'' d\alpha'') + da\,(\alpha\lambda + \alpha'\lambda' + \alpha''\lambda'')\right] =$$
$$\frac{1}{k}\left[b(\alpha d\mu + \alpha' d\mu' + \alpha'' d\mu'' + \mu d\alpha + \mu' d\alpha' + \mu'' d\alpha'') + db\,(\alpha\mu + \alpha'\mu' + \alpha''\mu'')\right] = \quad (303$$
$$\frac{1}{l}\left[c(\alpha d\nu + \alpha' d\nu' + \alpha'' d\nu'' + \nu d\alpha + \nu' d\alpha' + \nu'' d\alpha'') + dc\,(\alpha\nu + \alpha'\nu' + \alpha''\nu'')\right],$$

in welchen Gleichungen

$$\cos AX = \lambda \quad \cos BX = \mu \quad \cos CX = \nu \quad \cos PX = \alpha$$

und die Indices 1, 2 die analogen Winkel zu $Y$ und $Z$ bedeuten. $XYZ$ ist ein constantes, vom Krystall unabhängiges orthogonales Coordinatensystem, hingegen $ABCP$ Flächen am Krystall, $P = hkl$, $ABC$ die Pinacoide, denen die Parameter $abc$ entsprechen.

**§. 134.** Die thermischen Axen in schiefwinklichen Krystallsystemen. Die Constanz des Zonenverbandes stützt sich in der vorhergehenden Ableitung auf die Möglichkeit, die morphologischen Verhältnisse auf drei rechtwinkliche Axen zurückzuführen. Es ist diess für die orthogonalen Krystallsysteme der Fall, für welche dann die drei thermischen Axen mit den drei Coordinatenaxen zusammenfallen. An-

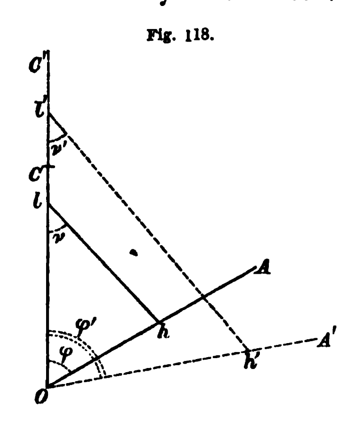
[1]) Grailich und Lang. Sitzungsber. der Wien. Acad. 1858. vol. XXXIII. pag. 377.

ders verhält es sich in den klinischen Krystallsystemen, deren Symmetrie auf geneigte Krystall- und Elasticitätsaxen hinweist. Sind die thermischen Axen in diesen Systemen ebenfalls schiefwinkliche, so erhellt durch eine einfache Betrachtung und Construction der unsymmetrischen Quadranten, dass nur dann die Constanz des Zonenverbandes möglich ist, wenn man, analog den Hauptschwingungsaxen, conjugirte, thermische rechtwinkliche Axen einzuführen vermag. Es tritt hierdurch das thermische Problem für die schiefwinklichen Krystalle in eine parallele Stellung zu den optischen, und wie wir für letztere durch das Stauroskop die Maxima und Minima des Radius d. i. die Hauptschwingungsaxen aufzusuchen wissen, ohne die Lage der wahren Elasticitätsaxen zu kennen, so wird auch die relative Ausdehnung eines klinischen Krystalls wohl die Ermittlung orthogonaler, secundärer, thermischer Axen erlauben, hingegen die Lage wahrer, der Symmetrie entsprechenden schiefwinklichen Axen unbestimmt bleiben.

Dieselben Erwägungen haben auch Neumann[1]) geleitet, jene rechtwinklichen conjugirten thermischen Axen aufzusuchen, welche der durch Winkelmessungen genau bestimmten Ausdehnung des Gypses zu Grunde liegen.

1. Die Lage dieser thermischen Axen muss für das monoklinische System jedenfalls so gewählt werden, dass eine Axe mit der Axe der Symmetrie zusammenfällt, während beide anderen Axen in der Ebene der Symmetrie rechtwinklich zu einander geneigt sein müssen.

Fig. 118.




Es handelt sich daher um die Frage, jene zwei rechtwinklichen Linien aufzusuchen, welche in der Symmetrieebene liegen und deren gegenseitige Neigung vor und nach der Erwärmung 90° beträgt. Sind nämlich in nebenstehender Figur $OA$ und $OC$ zwei unter dem Winkel $\varphi$ geneigte Parameter, deren Grösse $a$ und $c$ ist, schneidet ferner die Linie $h0l$ die $OC$ unter dem Winkel $v$ bei gewöhnlicher und bei erhöhter Temperatur unter dem Winkel $v'$, wobei gleichzeitig die Indices sich in $h'0l'$ umwandeln, so ist

$$\text{cotang}\, v = \frac{hc}{la \sin\varphi} - \text{cotang}\, \varphi \qquad \text{cotang}\, v' = \frac{hc'}{la' \sin\varphi'} - \text{cotang}\, \varphi'$$

[1]) Neumann. Pogg. Ann. vol. 27. pag. 240.

für eine zweite Linie $p0r$, deren Neigung gegen $OC$ mit $u$ bezeichnet ist, erhält man

$$\operatorname{cotang} u = \frac{pc}{ra \sin\varphi} - \operatorname{cotang}\varphi \qquad \operatorname{cotang} u' = \frac{pc'}{ra' \sin\varphi'} - \operatorname{cotang}\varphi'$$

Sollen nun die Linien $h0l$, $p0r$ wirklich thermischen Axen entsprechen, so muss $u - v = 90$, $u' - v' = 90$ sein oder

$$\begin{aligned} 1 + \left(\frac{h}{l}(M-N) - N\right)\left(\frac{p}{r}(M-N) - N\right) &= 0 \\ 1 + \left(\frac{h}{l}(m-n) - n\right)\left(\frac{p}{r}(m-n) - n\right) &= 0 \end{aligned} \tag{304}$$

worin bedeutet

$$M = \frac{c}{a \sin\varphi} \qquad N = \operatorname{cotang}\varphi \qquad m = \frac{c}{a' \sin\varphi'} \qquad n' = \operatorname{cotang}\varphi'$$

hieraus folgen weiter die Werthe für Summe, Product und Differenz von $\frac{h}{l}, \frac{p}{r}$, und setzt man

$$M - N = \Psi \qquad m - n = \Phi$$

so erhält man die Gleichung

$$\left(\frac{h}{l} - \frac{p}{r}\right) = \frac{N}{\Psi} - \frac{n}{\Phi}\sqrt{\left\{\left(\frac{N}{\Psi} - \frac{n}{\Phi}\right)^4 + 2\left(\frac{1}{\Psi^2} + \frac{1}{\Phi^2}\right)\left(\frac{N}{\Psi} - \frac{n}{\Phi}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Psi^2} - \frac{1}{\Phi^2}\right)^2\right\}} \tag{304a}$$

Die Gleichung zeigt, da sie immer reell bleibt, die Möglichkeit der Existenz zweier rechtwinklich geneigter thermischer Axen an [1]).

Soll die Lage dieser conjugirten thermischen Axen auf Grund der Beobachtungen abgeleitet werden, so müssen am Krystall durch Messungen die Veränderungen nachgewiesen werden, welche das krystallographische Parametersystem $OA$, $OC$ und die darauf senkrechte $OB$ erleidet. Hierzu genügt die Messung dreier Krystallwinkel bei gewöhnlicher und bei erhöhter Temperatur.

Die Ausdehnung $\frac{\Delta b}{b}$ entspricht der linearen Veränderung der Einheit der Axe $B$, welche, da sie mit der Symmetrieaxe zusammenfällt, gleichzeitig eine thermische Axe ist. Die Lage der beiden anderen thermischen orthogonalen Axen wird mittelst der Grösse $\frac{\Delta a}{a}, \frac{\Delta c}{c}$ sich aus der

---

[1]) Grailich und Lang (Sitzungsber. der Wien. Acad. vol. XXXIII. pag. 336.) haben bei der Besprechung der Neumann'schen Untersuchungen eine analoge Gleichung aufgestellt und auf Grund derselben eine imaginäre Differenz $\frac{h}{l} - \frac{p}{r} = C\sqrt{-1}$ der Indices der thermischen Axen, also die Nichtexistenz rechtwinklicher thermischer Axen bei Gyps nachzuweisen versucht. Es muss hier jedoch bemerkt werden, dass in den Fortschritten der Physik, Berlin Jahrgang 1858, vol. XV, pag. 263, die Unrichtigkeit dieser versuchten Beweisführung angegeben ist.

Gleichung (304) (304a) ermitteln lassen, da durch dieselben die Werthe $\frac{h}{l}+\frac{p}{r}$, $\frac{h}{l}-\frac{p}{r}$ bekannt werden.

Die Lage der kleinsten Ausdehnung des Gyps durch die Wärme ward auch nach dieser Methode von Neumann bestimmt. Sie fällt nahezu mit der Richtung der grössten Härte und der ersten Mittellinie zusammen und bildet mit der Richtung[1] der faserigen Theilbarkeit (Fig. 6, pag. 59) $n$ ($\bar{1}11$) einen Winkel von 14°. Man kann somit analog dem optischen Schema (pag. 289) sagen

$$\tau[(100)\,(010)\,(\mathfrak{c})] = 37^0$$

Da nun ferner nach Angström die grösste Ausdehnung mit der Axe der Symmetrie (010) zusammenfällt, ferner in der Richtung der thermischen Axe $\mathfrak{c}$ eine wenn auch geringe Contraction eintreten soll, so wäre das vollständige Schema der thermischen Axen des Gypses

$$\tau[(100)\,\mathfrak{a}\underline{\mathfrak{c}}] = 37^0$$

Soll nun schliesslich die lineare Ausdehnung nach diesen drei thermischen Axen auf Grund der beobachteten Aenderung von $abc$ ermittelt werden, so gibt hierfür Neumann die allgemeine Gleichung für das monoklinische System, welche die Ausdehnung jeder intermediären Linie, deren Indices $hkl$ sind, abhängig von diesen Indices und der Parameteränderung darstellt.

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{r^2}\left[\frac{a}{h}\left(\frac{a}{h}+\frac{c}{l}\cos\varphi\right)\frac{\Delta a}{a}+\left(\frac{b}{k}\right)^2\frac{\Delta b}{b}\right.$$
$$\left.+\frac{c}{l}\left(\frac{c}{l}+\frac{a}{h}\cos\varphi\right)\frac{\Delta c}{c}+\frac{a}{k}\,\frac{c}{h}\sin\varphi\Delta\varphi\right] \tag{305}$$

2. Durch die bisherige Methode gelingt es, für die monoklinischen Krystalle die orthogonalen conjugirten thermischen Axen aufzusuchen. Schwieriger und fast nur von theoretischem Werth gestaltet sich diese Ableitung für Krystalle des triklinischen Systems.

Für letztere hat C. Neumann[2]) nachgewiesen, dass es möglich ist, auch für sie orthogonale conjugirte thermische Axen anzunehmen. Um letztere aus den beobachteten krystallographischen Elementen $abc$ und deren Veränderungen $a+da$, $b+db$, $c+dc$ zu berechnen, gibt Neumann die nachstehenden Gleichungen. Werden an einem triklinischen Krystall die Winkel der vier Flächen 100, 010, 001, $hkl$ gemessen, so lassen sich hieraus die Werthe

$$\frac{a}{c}=A \quad \frac{b}{c}=B \qquad \frac{\Delta a}{a}-\frac{\Delta c}{c}=\frac{\Delta A}{B} \qquad \frac{\Delta b}{b}-\frac{\Delta c}{c}=\frac{\Delta B}{B}$$

[1]) Vergl. Angström. Pogg. Ann. vol. 86. pag. 228.

[2]) Neumann C. Pogg. Ann. vol. 114, pag. 492.

ableiten. Nimmt man nun ein rechtwinkliches, willkürliches Axensystem $x_1\ x_2\ x_3$ zu Hilfe, derart, dass der Parameter $c$ mit $x_3$, ebenso die Ebene der Parameter $ca$ mit $x_3\, x_1$ zusammenfällt, so wird man die Flächen (100)... auf dieses System beziehen können und deren Cosinusse $\alpha\,\beta\,\gamma\ \alpha_1 \ldots \gamma_3$, sowie die Aenderungen $\Delta\alpha \ldots \Delta\gamma_3$ berechnen können. Bildet man hieraus die Functionen $\sigma$, sowie deren partiellen Differentialquotienten $d_x\sigma$

$$\sigma = \alpha_1\,(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) + \alpha_2\,(\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3) + \alpha_3\,(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)$$

$$L^{\text{i}}_{\text{k}} = \frac{\frac{d\sigma}{d\alpha_k}\Delta\alpha_i + \frac{d\beta_k}{d\sigma}\Delta\beta_i + \frac{d\sigma}{d\gamma_k}\Delta\gamma_i}{\sigma} + \frac{\frac{d\sigma}{d\alpha_k}\,\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\,\alpha_i + \frac{d\sigma}{d\beta_k}\,\frac{\Delta b}{b}\,\beta_i}{\sigma}$$

so lassen sich durch die Lösung der Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} 2\,(L_1' - R)\ X_1 + (L_1'' + L_2')\ X_2 + (L_1''' + L_3')\ X_3 = 0 \\ (L_2' + L_1'')\ X_1 + 2\,(L''_2 - R)\ X_2 + (L_2''' + L_3'')\ X_3 = 0 \\ (L_3' + L_1''')\ X_1 + (L_3'' + L_2''')\ X_2 + 2\,(L_3''' - R)\ X_3 = 0 \\ X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1 \end{array}\right\} \quad (306)$$

die Werthe von $X_1\ X_2\ X_3$ bestimmen. Jedes der drei Werthsysteme $X_1\ X_2\ X_3$ repräsentirt die Cosinusse der Winkel, unter welchen eine der conjugirten orthogonalen thermischen Axen gegen die Anfangs genannten Richtungen $x_1\ x_2\ x_3$ geneigt ist.

Die aus (306) erhaltenen drei Werthe $R_1\ R_2\ R_3$ liefern auch die Dilatationen $r_1\ r_2\ r_3$ nach der Richtung dieser orthogonalen thermischen Axen, indem

$$r_1 = R_1 + \frac{\Delta c}{c} \qquad r_2 = R_2 + \frac{\Delta c}{c} \qquad r_3 = R_3 + \frac{\Delta c}{c} \qquad (307)$$

ist. Hierin ist wohl die Ausdehnung nach dem dritten Parameter durch Winkelmessungen (vergl. früher) nicht zu ermitteln und erfordert entweder die directe Bestimmung der linearen Ausdehnungscoefficienten oder auch nur die des cubischen, indem für letzteren gilt

$$r_1 + r_2 + r_3 = \frac{\Delta V}{V} \qquad (308)$$

wodurch man $\Delta c$ eliminiren und die Ausdehnung nach den thermischen Axen berechnen kann.

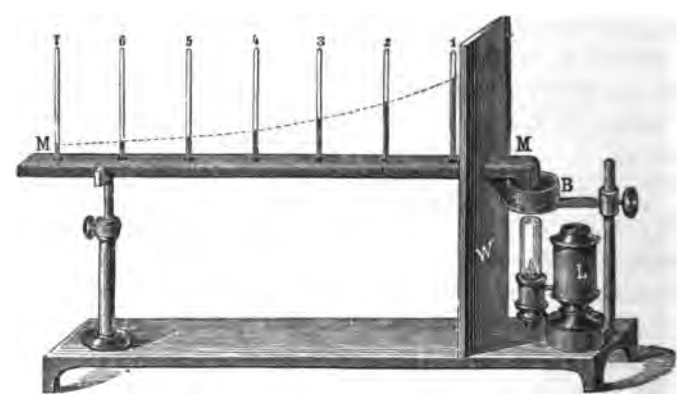
§. 135. Die Fortpflanzung der geleiteten Wärme. Hat ein Körper durch Zufluss von Aussen einen grossen Ueberschuss von lebendiger Kraft erhalten, so bleibt diese letztere selbst nach dem Aufhören dieses Zuflusses lange Zeit constant. Der erwärmte Körper wird sich jedoch mit seiner kälteren Nachbarschaft in's thermische Gleichgewicht zu setzen streben. Es kann dies sowohl durch Strahlung als

auch durch Leitung erfolgen. Letztere besteht in der Uebertragung der lebendigen Kraft des ersten Moleküls an ein zweites durch directen Stoss. Es tritt hierdurch ein allmäliger Ausgleich von Molekül zu Molekül ein, der sich immer weiter und weiter erstreckt. Man kann in Folge dessen nach zwei Momenten fragen: nach der Grösse der lebendigen Kraft, welche durch einen Impuls weiter verbreitet wird, und nach der Dauer eines solchen Impulses.

Die erste Frage coincidirt mit der Frage nach der Bewegung der Temperatur in einem leitenden Mittel. Mit der Grösse der Fortpflanzung einer gleichen Temperatur steht aber die wahre Fortpflanzungsgeschwindigkeit der geleiteten Wärme in keinem directen Zusammenhange. Definirt man nämlich letztere als die Strecke, über welche eine irgendwo in einem Körper hervorgerufene Temperaturerhöhung[1]) ihren Einfluss ausübt, so kann man nach Stefan für die so bestimmte Fortpflanzungsart der Wärme eine Geschwindigkeit annehmen, die der des Schalles gleichkommt.

Von dieser wahren Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wärme unterscheidet sich aber die Fortpflanzung einer gleichen Temperatur im leitenden

Fig. 119.




Körper. Erwärmt man nämlich einen homogenen Leiter *MM* einseitig, so wird eine bestimmte Temperatur $t^0$ allmälig an immer weiter und weiter von dem erhitzten Ende entfernten Punkten 1...7 (Fig. 119) auftreten. Diese Bewegung der Temperatur $t$ wird, wie man leicht erkennt, von mehreren Grössen abhängen müssen: 1. von dem wahren Wärmeleitungsvermögen $K$, 2. von der specifischen Wärme, d. i. dem Verhältniss zwischen der freigewordenen lebendigen Kraft, die sich als Wärme äussert, zu der hierzu verbrauchten Wärmequantität, 3. von der Summa der

[1]) Stefan. Sitzungsber. der Wien. Acad. 1863. vol. 47. pag. 332.

bewegten Moleküle oder dem specifischen Gewichte, und schliesslich 4. von der Temperaturdifferenz an dem Körper selbst. Die bekannte Fourier'sche Theorie, welche die Temperaturbewegung analog dem Fortschritte eines elastischen Mediums betrachtet, liefert genügenden Aufschluss.

Für einen geschlossenen ringförmigen Leiter, dessen innere Leitungsfähigkeit $K$, dessen Strahlungsvermögen $h$, sein specifisches Gewicht $s$, dessen Wärmecapacität (specifische Wärme) $w$, dessen Querschnitt eine Peripherie $p$ und einen Flächeninhalt $\tilde{\omega}$ hat, schliesslich $u$ die Temperatur zur Zeit $t$ in einem Querschnitt, der sich im Abstande $x$ von dem Punkte der bis zur $a^0$ getriebenen Erwärmung befindet, bedeutet, ist nach Fourier für die Bewegung der Temperatur

$$\frac{du}{dt} = \frac{K}{ws} \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{hp}{\omega \sigma \tilde{\omega}} u \qquad (309)$$

Ist die äussere Strahlung zu vernachlässigen $h = o$, so verschwindet das zweite Glied rechts, und wir erhalten $u$ als Integral der Gleichung. Suchen wir aber den Fortschritt einer gleichen Temperatur abhängig von der Coordinate, so kann man dieses Integral nach Stefan umstellen in

$$\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\left(\frac{tK}{ws}\right)}}} e^{-\eta^2} d\eta = \frac{a-u}{2} \sqrt{\pi} \qquad (310)$$

Dieses Integral und dessen Grenzen können so angenommen werden, dass die Differenz $a - u$ immer constant bleibt. Unter dieser Bedingung wird denn

$$\frac{x}{2\sqrt{\frac{tK}{ws}}} = C \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{C\sqrt{\frac{K}{ws}}}{\sqrt{t}} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{C\sqrt{\frac{K}{ws}}}{2t\sqrt{t}} \qquad (311)$$

wodurch das Gesetz der ungleich verzögerten Bewegung für die Temperaturdifferenz $a - u$ begründet ist.

Aus der bisherigen Betrachtung erkennt man daher, dass die nach aussen hin bemerkbare Bewegung der Temperatur eine complicirte Function ist, abhängig von der specifischen Wärme und Dichte, sowie von dem wahren Leitungsvermögen der Substanz.

Das Leitungsvermögen der Substanzen lässt sich nun auf verschiedenem Wege aus der Kenntniss der Bewegung der Temperatur ableiten.

Eine Methode besteht darin, ausgehend von der Formel

(312) $$K\left(\frac{u-a}{\Delta x}\right) = Q$$

die Wärme zu bestimmen, welche eine Metallwand von der Dicke $\Delta x$ durchströmt, wenn deren Seitenwände die Temperatur $a$ und $u$ besitzen.

Oder man kann die Ausbreitung der Wärme in einem Metallstabe von anfänglich constanter Temperatur beobachten, indem man in gewissen Distanzen Thermometer einsenkt (vergl. Fig. 19) und zur Berechnung die Biot'sche Formel

(313) $$\frac{d^2u}{d^2x} - \frac{hp}{k\tilde{\omega}}\, u = o$$

worin die früheren Bezeichnungen beibehalten sind, benutzt.

Statt der Thermometer haben Wiedemann und Franz[1]) thermo-elektrische Elemente an die erwärmten Stellen in gleichen Distanzen angebracht und die Stärke des Stromes, also auch der Temperatur aus den Graden berechnet, welche die Ablenkung des Galvanometers betrug (vergl. Fig. 110). Bildet man aus diesen Ablesungen von drei in gleichen Distanzen $\alpha$ liegenden Stellen, deren Ablenkung und Temperatur den Werthen $v_1\, v_2\, v_3$ entspricht, den Quotienten $\frac{v_1 + v_3}{v_2}$ so ist nach Fourier

(314) $$q = \frac{v_1 + v_3}{v_2} = e^{-\alpha\sqrt{\frac{hp}{K\tilde{\omega}}}} + e^{+\alpha\sqrt{\frac{hp}{K\tilde{\omega}}}} = x + \frac{1}{x}$$

$$K = \frac{hp}{\tilde{\omega}}\, \alpha^2\, \frac{1}{(\log x)^2}$$

Da für kreisrunde Stäbe $\frac{p}{\tilde{\omega}} = \frac{1}{\mathrm{d}}$, wo d die Dicke bezeichnet, so lässt sich, wenn 1. für alle Stangen die Distanz $\alpha\,\alpha$ gleich, 2. die Strahlungsfähigkeit $h$ durch einen äusseren Ueberzug ebenfalls für alle Metalle gleich gemacht ist, unter diesen Bedingungen das Verhältniss der Leitungsvermögen zweier Metalle $K\, K'$ berechnen, denn es ist

(314a) $$\frac{K'}{K} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}'}\, \frac{(\log x)^2}{(\log x_1)^2}$$

Setzt man für den am besten leitenden Körper, Silber, sein Leitungsvermögen gleich 100, so reihen sich in absteigender Ordnung Cu, Au, Zn, Pt, Fe, Sn, Pb, Hg an.

---

[1]) Wiedemann und Franz. Pogg. Ann. vol. 89. pag. 487, 521.

Da bei diesen Beobachtungen das gleichzeitig wirkende Strahlungs-Vermögen doch nicht vollständig eliminirt werden kann, so hat Angström[1]) zur Bestimmung dieses Leitungsvermögens eine Methode angegeben, welche auf die periodische Erwärmung und Erkaltung desselben Stabes während bestimmter Zwischenzeiten beruht. Es wird sich dann durch Interferenz für jeden Punkt am Stabe ein gleichmässiger Gang von Ab- und Zunahme der Temperatur bilden.

§. 136. **Bewegung der Temperatur in comprimirten homogenen und in krystallisirten Körpern. Schema der Temperaturbewegung.** $T(abc)$. Sucht man nicht die wahre Leitungsfähigkeit der Körper, sondern bloss die Bewegung einer gleichen Temperatur auf der Körperoberfläche zu constatiren, so kann nachfolgende Methode hierzu dienen. Ueberzieht man die Oberfläche des zu prüfenden Körpers mit einer Schichte eines schon bei niedriger Temperatur schmelzenden Körpers, wie dies die Harze und namentlich eine bei 40° schmelzende Mischung von Wachs mit Terpentin sind, erwärmt man nun einen Punkt des Körpers, so wird sich die höhere Temperatur im Umkreise verbreiten und die oberflächliche Wachsschichte schmelzen. Lässt man dies wieder erstarren, so wird die Begrenzungslinie zwischen den geschmolzenen und ungeschmolzenen Theilchen der Wachsschichte andeuten, bis zu welchem Punkte die gleiche Temperatur gleichzeitig vordrang.

Um einen Punkt der Platte zu erwärmen, kann man mehrere Methoden anwenden[2]). Man kann auf die Platte einen durch mehrere Linsen auf einen Punkt concentrirten Licht- und Wärmestrahl werfen. Die strahlende Wärme erwärmt die Platte, ohne dass man nöthig hat, wie bei den nachfolgenden Methoden, die Platte zu durchlöchern. Operirt man nicht mit Sonnenlicht, sondern mit elektrischer oder künstlicher Erwärmung, so muss durch die Platte an ihrem Mittelpunkte ein Loch gebohrt werden. Durch dasselbe kann man dann entweder einen conischen Draht einführen, welcher mit einer galvanischen Batterie in leitende Verbindung gebracht und durch den elektrischen Strom glühend gemacht wird, und daher die Platte durch Contact erwärmt; oder man kann, wie Senarmont that, diesen Draht durch einen hohlen Metallcylinder ersetzen und durch diesen einen Strom erwärmter Luft leiten.

Die bisherigen Versuche auf diesem Gebiete lehren, dass die Grenzlinie des geschmolzenen Wachses für isophane Körper ein Kreis ist, d. h. die Temperatur breitet sich nach allen Richtungen gleichmässig aus.

---

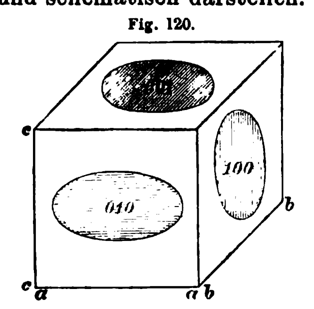
[1]) Angström. Pogg. Ann. vol. 114. pag. 516.

[2]) Senarmont. Ann. de Chim. Sér. III. vol. XXI. 457. XXII. 179. Pogg. Ann. vol. 73. pag. 191. vol. 74. pag. 191. vol. 75. pag. 50, 482.

Diese gleichmässige Ausbreitung wird aber gehindert, wenn die Platte durch einen einseitigen Druck comprimirt wird. In einem solchen Falle ist die Curve der gleichen Temperatur nicht mehr ein Kreis, sondern eine Ellipse[1]), deren kürzere Axe mit der Compressionsrichtung zusammenfällt. Es stimmt diese Abnahme der Temperaturbewegung bei gleichzeitiger Zunahme der Dichte überein mit dem im vorigen Paragraphe ermittelten Gesetze, nach welchem dieselbe ebenfalls als eine Function von dem reciproken Werthe des specifischen Gewichts *s* dargestellt wurde.

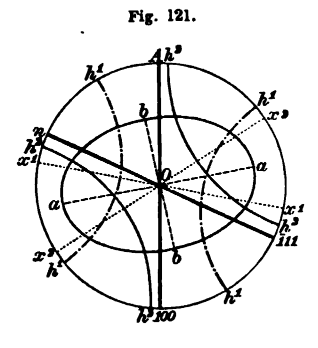
Analog den comprimirten homogenen Körpern verhalten sich die Krystalle. Schneidet man aus letzteren den Hauptschnitten parallel planplane Platten, so ist die Curve der gleichen Temperatur nur für die tesseralen Krystalle und für die Schnitte senkrecht zur Hauptaxe *c* der optisch einaxigen Medien ein Kreis, für alle übrigen Richtungen hingegen eine Ellipse. Schneidet man somit Platten parallel den drei Coordinatenebenen, so kann man aus der relativen Grösse dieser Ellipsenaxe die relative Grösse der Temperaturbewegung nach den drei Axen erkennen und schematisch darstellen. Sei beispielsweise (Fig. 120) auf der Platte parallel 001, die Temperaturverbreitung nach der Krystallaxe *a* grösser als nach *b*, also $a_T > b_T$, ferner auf der Platte parallel 100 die Ausdehnung nach der Axe *c* grösser als nach *b*, also $c_T > b_T$, schliesslich $a_T > b_T$, so kann man sehr leicht nach Analogie der früheren Bezeichnungsweise das Schema $T$(acb) für die Temperaturausbreitung aufstellen. Letzteres Schema zeigt nun die relative Grösse der Temperaturbewegung nach den drei Krystallaxen an.

Fig. 120.




Im monoklinischen System fällt eine dieser drei Axen mit der Axe der Symmetrie zusammen. Die beiden übrigen liegen in der Symmetrieebene. Beispielsweise liege die grössere Axe dieses Temperaturellipsoides in der Symmetrie des Gypses 50° gegen die faserige Spaltbarkeit *n* ($\bar{1}11$) geneigt und stimme daher nahezu mit der Richtung der grössten Elasticität (vergl. Fig. 121) überein. Die kleinste Axe $c_T$ fällt mit der Symmetrieaxe zusammen. Man erhält dann als Temperaturschema für Gyps $T$ [(100) c a] = 15°.

Fig. 121.



[1]) Senarmont. An. de Chim. Sér. III. vol. XXIII. 257. Pogg. Ann. vol. 76. pag. 119.

Man wird hier wie bei dem optischen Schema die Lage der Maxima oder Minima der Temperaturbewegung für das monoklinische System in der Ebene der Symmetrie aufsuchen. Je nach der Winkel in den spitzen oder stumpfen Winkel der zwei krystallographischen Axen dieser Zone fällt, wird man ihn mit + oder — bezeichnen. (Fig. 122.)

Fig. 122.

Um solche Beobachtungen mit genügender Präcision zu machen [1]), ist bei der Herstellung und Erwärmung der Krystallplatten namentlich auf deren Homogeneität und auf das Vermeiden von Sprüngen zu sehen. Ebenso muss die oberflächliche Wachsschichte möglichst gleichmässig vertheilt sein, was je nach Natur des Mediums entweder durch Schmelzung der Schichte oder durch Einreibung mit einer Mischung von Wachs und Terpentin geschehen kann. Das Loch selbst wird am zweckmässigsten mit einem Metallbohrer aus freier Hand gebohrt und als Lösungsmittel die Mutterlauge des Krystalls benutzt. Die Messung der Grösse der Ellipsenaxen muss unter dem Mikroskop mit einem Glasmikrometer oder mit Hilfe eines Messtisches erfolgen.

Um etwaige Beziehungen dieser orientirten Temperaturbewegungen zu den übrigen thermischen und optischen Eigenschaften zu finden, kann man die bisherigen Beobachtungen von Senarmont und Lang, welche sich meist auf einaxige Krystalle beziehen, benutzen.

Für mehrere dieser einaxigen Krystalle zeigte sich eine Uebereinstimmung der auf einer parallel zur optischen Axe geschnittenen Platte entstandenen Ellipse mit der der Substanz entsprechenden Wellenfläche. So war für mehrere optisch negative Krystalle ($\underline{\mathfrak{a}}$) (abgeplattetes Ellipsoid der Wellenfläche Fig. 42) die kleine Ellipsenaxe $c_T$ parallel der Hauptaxe, also das Temperaturschema $T$(aac). Bei positiven Krystallen (aaç) (verlängertes Ellipsoid Fig. 43) war hingegen die grössere Hauptaxe der Ellipse für gleiche Temperaturen parallel der Hauptaxe, also $T$(cca). Es würde dies anzeigen, dass in jener Richtung, in welcher sich der Lichtstrahl schneller fortpflanzt, die Geschwindigkeit der Temperaturbewegung ebenfalls grösser sei. Um diese Uebereinstimmung hervorzuheben, hat auch Lang jene einaxigen Krystalle, deren Temperaturfortpflanzung parallel $c$ grösser als nach $a$ ist, mit thermisch positiv $\underset{+}{\mathfrak{t}}$ bezeichnet, im entgegengesetzten Falle mit $\underset{-}{\mathfrak{t}}$.

Diese Uebereinstimmung, schematisch ausgedrückt, würde erfordern, dass für jede Substanz beide Schemata gleichzeitig gelten sollten: $T$(aac) und optisch (cc$\underline{\mathfrak{a}}$); oder $T$(cca) und optisch (aaç). Bei mehreren

[1]) Vergl. Lang. Sitzungsber. der Wien. Acad. 1866. LIV. 164.

Substanzen z. B. dem optisch positiven Rutil tritt eine solche Uebereinstimmung auf, doch diese ist nur beschränkt, denn gerade die wichtigsten von Senarmont untersuchten Minerale folgen diesem Gesetze nicht, so hat Corund das Schema $T$(aac) optisch {aaç}; Calcit $T$(cca) optisch {cca̱} Beryll; $T$ (cca) optisch {cca̱}.

Für diese letztgenannten Minerale würde somit das Temperatur-Schema und das optische Schema zusammenfallen[1]). Dies scheint auch bei einigen Krystallen des prismatischen Systems der Fall zu sein, da aus den Beobachtungen von Senarmont sich die Schemata für Topas $T$ (bac) [optisch: (baç)], für Arragonit $T$ (cba) [optisch: (cba̱)] ableiten lassen.

Ebenso weicht auch die Lage der Temperaturaxen in der Symmetrieebene des Gypses von der optischen Orientirung ab [2]).

Es lässt sich somit auf Grund der bisherigen Beobachtungen keine Uebereinstimmung der Fortpflanzung der Temperatur und des Lichtes erkennen, da meist die Maxima und Minima beider Functionen entweder in gleiche oder gerade entgegengesetzte Richtungen fallen.

Von gleichem theilweise negativen Resultate ist die Vergleichung des Schema der Temperatur $T$(abc) mit jenem Schema $\tau$(abc), welches die axiale Ausdehnung durch die Wärme angibt. Für eine grössere Anzahl von Substanz gilt wohl das Gesetz, dass in jener Richtung, in welcher sich die Temperatur am schnellsten erhöht, auch die Ausdehnung grösser ist; z. B.: Zinnstein $\tau$ (cca) $T$ (cca); Vesuvian $\tau$ (aac) $T$ (aac); Calcit $\tau$ (c̱ca) $T$ (cca); allein es existiren auch hiervon Ausnahmen, so hat Quarz die Schemata $\tau$ (aac) $T$ (cca); Turmalin $\tau$ (cca) $T$ (aac); ebenso stimmen auch die auf vorhergehender Seite angegebenen Temperatur-Schemata für Arragonit und Topas nicht mit jenen Schemen für die Ausdehnung, welche pag. 356 angegeben wurden.

Aus dem bisher Gesagten lässt sich annehmen, dass auch die in Krystallen axial verschiedene Bewegung der Temperatur eine Function anderer Grössen, wie die Lichtfortpflanzung oder wie die Ausdehnung durch die Wärme, ist. Man wird sie daher auch in erster Linie auf die axial verschiedene Molekularlagerung zurückführen müssen; unter der Berücksichtigung, dass für sie auch die frühere Abhängigkeit von $\left(\frac{K}{s\,w}\right)$ gelten muss.

Soll gemäss dieser complicirten Function die Temperaturbewegung direct proportional dem wahren Leitungsvermögen, verkehrt proportional

[1]) Es darf wohl hier kaum mehr erinnert werden, dass abc sich auf die Schwingungsrichtung des Strahles bezieht, und daher dem Strahle parallel $c$, die Geschwindigkeit $ab$ zukomme.

[2]) Vergl. Angström. Pogg. Ann. vol. 86.

der Dichte und specifischen Wärme sein, so wird man doch schon ohne weitere Berechnung dieser Verhältnisse erkennen, dass jedenfalls, existirt überhaupt eine Abhängigkeit von der Molekularlagerung (§. 74) die grösste Axe der Temperaturcurve mit der Lage des am besten leitenden Moleküls zusammenfallen muss. Es ist diese Richtung mit anderen Worten die Lage der metallischen Grundstoffe im Grundmolekül der Krystalle.

So hat (vergl. pag. 170) für Zinnstein (ΘΘSn) und Rutil (ΘΘTi) das Schema $T$ (cca); Calomel, wofür $a : a : c$ = Cl : Cl : Hg gilt, hat das Schema $T$(cca).

Dass bei complicirten höheren Verbindungen der Einfluss der Metalle durch die relativen Werthe ihrer Coefficienten für specifische Wärme noch vielfach modificirt werden kann, ist wohl von selbst klar. Ebenso der krystallographische Habitus und die Spaltungsebene von secundärem Einfluss sein. Es mag genügen, die Abhängigkeit von der Molekularlagerung angedeutet zu haben.

# XX. Kapitel.

## Die elektrischen Erscheinungen an krystallisirten Körpern.

§. 137. Von den bisher betrachteten Agentien, Wärme und Licht, unterscheiden sich die elektrischen Erscheinungen namentlich durch den Umstand, dass sie als fernwirkende Kräfte nicht bloss molekulare, sondern vielmehr Körperbewegungen hervorbringen können. Die Bewegungen, welche Licht oder Wärme hervorrufen, ändern nur in bedingten Fällen den Gleichgewichtszustand der Körper nach aussen hin, vermehren oder mindern nur den Weg der einzelnen Moleküle innerhalb ihrer Gleichgewichtslage. Anders die elektrischen Agentien. Obgleich ein Theil ihrer Kraft sich auch in Licht oder Wärme umsetzen kann, so haben sie doch eine gemeinsame dynamische Wirkung, die als elektrische Anziehung oder Abstossung bekannt ist, und welche sich auf directe Weise nicht in Wärme oder Licht umzusetzen vermag. Fasst man daher die elektrischen Erscheinungen ebenfalls als ein durch molekulare Bewegungen hervorgerufenes Phänomen auf, so darf man nicht vergessen, dass die Elektricität nicht bloss die für Wärme und Licht geltenden Bewegungen umfassen muss, sondern dass noch ein weiteres, die dynamischen Wirkungen verursachendes Moment hinzuzufügen kommt.

Entspricht es auch den Ideen der Neuzeit, die Elektricität auf Bewegungszustände der Materie zurückzuführen, so muss doch erwähnt werden, dass eine auf solchen Principien aufgebaute Theorie fehlt, ja dass selbst die wenigen Autoren, die sich zu einer solchen Ansicht hinneigen, selbst über die Form der Bewegung nicht einer Meinung sind. Es sind daher bis in die letzte Zeit auch fast alle Beobachtungen und Discussionen auf Grundlage der Hypothese zweier elektrischer Fluida, die sich gegenseitig im verkehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernung anziehen, durchgeführt.

Von den neueren Theorien sind die Ansichten von Grove und De la Rive zu erwähnen, nach welchen die Elektricität im wesentlichsten auf eine gleichsam polare Lagerung der Moleküle zurückgeführt wird. Nach Subic[1]) hingegen besteht die Elektricität aus molekularen Stössen. Von anderer Art ist die Theorie Hankel's[2]), deren Grundzüge, obwohl nach Elimination des von Hankel angenommenen Aethers, auch der Verfasser vorliegender Zeilen aus manchen mechanischen Gründen adoptirt hat. Hiernach kann die Elektricität als circulare Schwingungen aufgefasst werden, die je nachdem es sich um positive oder negative Elektricität $+\eta$, $-\eta$ handelt, in dem einen oder dem andern Sinne, rechts oder links gedreht, erfolgen kann. So kann beispielsweise für $+\eta$ eine rechtslaufende, für $-\eta$ eine linkslaufende Vibration um die Normale auf das Flächenelement angenommen werden. Wie wir ferner bei Licht und Wärme einen beleuchteten und beleuchtenden Körper unterscheiden, so müssen wir auch bei der Elektricität zwei analoge Zustände der Induction unterscheiden. Ueberdiess ist die Elektricität entweder in Ruhe auf der Oberfläche eines Körpers oder in Bewegung als elektrischer Strom. Ersteres entspricht einer stehenden Schwingung, letzteres einer fortschreitenden Bewegung, die sich von Molekül zu Molekül fortpflanzt.

Für eine solche Hypothese sprechen zahlreiche Gründe.

Der Unterschied zwischen positiver und negativer Elektricität und deren gegenseitiger Ausgleich erfordert eine entgegengesetzte Art der Vibration. Hierfür kann nicht eine lineare, transversale oder longitudinale Schwingung genügen, da der Unterschied $+\eta$ $-\eta$ für diese höchstens $^1/_4\lambda$ betrüge. Man kann somit nur circulare Bewegungen annehmen, da diese den Gegensatz von rechts und links kennen, welcher Gegensatz durch die Vereinigung beider $+\eta$ und $-\eta$ Null wird. Soll die Elektricität auf molekularen Bewegungen beruhen, so wird analog der Theorie der geleiteten Wärme auch hier anzunehmen sein, dass für den ruhenden Körper die Summe der rechts- und linksgedrehten Bewegungen Null wird. Auf Grund dieser Ansicht wird man gezwungen anzunehmen, dass jedes Molekül, welches von aussen in einen elektrischen Zustand versetzt worden ist, auch bei seinen Nachbartheilchen Elektricität hervorrufen wird. Im Innern des Körpers werden somit gleichviel $+\eta$ und $-\eta$ inducirt und diese heben sich auf, nach aussen hin steht den Massentheilchen des Körpers nur ein Massentheilchen der Luft gegenüber, die elektrische Kraft des Körpers wird somit überwiegen. Dadurch wird die

[1]) Subic. Sitzungsber. der Wien. Acad. vol. 43.
[2]) Hankel. Pogg. Ann. vol. 126. pag. 440.

sogenannte Ansammlung der Elektricität auf der Oberfläche und namentlich an Spitzen, da bei letzteren die Oberfläche im maximalen Verhältnisse zum Körperinhalt steht, erklärlich.

Mit diesen Annahmen stehen auch die Erscheinungen der geleiteten Elektricität in Einklang. Der elektrische Strom erzeugt Licht und Wärme; er wird somit auch auf Grund dieser Thatsache eine Bewegung sein müssen. Da jedoch die durch ihn hervorgebrachte Erwärmung der Action der geleiteten Wärme analog ist, so wird man wohl annehmen müssen: auch bei dem elektrischen Strom entsteht die Erhöhung der lebendigen Kraft der Moleküle, d. i. Temperatur, durch die molekularen Stösse. Es müssen somit bei der Elektricität die circularen Bewegungen auch noch in unzertrennlicher Verbindung gedacht werden, etwa mit einer in der Richtung des Stromes liegenden longitudinalen Bewegung [1]. Bei dem Fortschreiten der Elektricität wird ein Theil dieser lebendigen Kraft des Moleküls übertragen und erscheint als Wärme. Da aber umgekehrt die Erwärmung Eines homogenen Leiters nicht Elektricität in demselben erzeugt, so sind wir wieder zu dem Schlusse gezwungen, für Wärme und Elektricität wohl ein gemeinsames Moment, für letztere aber noch überdiess einen Unterschied in der Richtung der Bewegung anzunehmen.

Mit diesen Hypothesen [2]) stimmt aber ferner noch die Erscheinungs-

---

[1]) Es mag vielleicht diess erklären, warum nach Edlund (Pogg. Ann. vol. 129) ein elektrischer Strom in der Richtung seiner Bewegung eine grössere Ausdehnung hervorruft, als der allseitigen Erhöhung der Temperatur des Drahtes entspricht.

[2]) Während der Drucklegung vorliegender Zeilen erschien die wichtige Untersuchung von Lorenz: Ueber die Identität der Schwingungen des Lichtes mit den elektrischen Strömen (Pogg. Ann. 1867, vol. 131. pag. 243. Juniheft) Wie bereits der Titel der Abhandlung erkennen lässt, adoptirt Lorenz die Hypothese, dass die Schwingungen des Lichtes elektrische Ströme sind, und bringt den mathematischen Beweis hiefür in der Weise, dass er allgemeine Gleichungen anfstellt, welche sowohl die bekannten Gleichungen für das Licht als auch jene für die Elektricität abhängig von den Absorptionscoefficienten beider Medien enthalten. Lorenz stellt für Licht und Elektricität seine Anschauungsweise mit folgenden Worten dar: „Denkt man sich das Licht als rotirende Schwingungen im Innern des Körpers um Axen, deren Richtung dieselbe ist, wie diejenige, die wir nach der Elasticitätstheorie als Schwingungsrichtung betrachten, so wird der elektrische Strom keine translatorische Bewegung, sondern nur eine in einer Richtung fortgesetzte Rotation und die Axe der Rotation wird alsdann die Richtung des Stromes. Diese Rotation wird nur in guten Elektricitätsleitern fortdauernd sein und die Bewegung wird sich dann hier in der Richtung der Axe fortpflanzen, während sie in den schlechten Leitern periodisch wird und sich durch Induction fortpflanzt, in einer Richtung senkrecht gegen die Rotationsaxe. Es wird bei dieser Auffassung kaum irgend einen Grund geben, die Hypothese von einem Aether festzuhalten, da man sehr wohl annehmen kann, dass im sogenannten leeren Raum so viel materieller Stoff enthalten sei, dass derselbe hinlängliches Substrat für die Bewegung darbietet."

Dem letzten Satze dieser Zeilen stimme ich vollkommen bei, denn es ist ein langjähriges Bemühen von mir, den Beweis für die Nichtexistenz des Aethers in Zahlen zu bringen. (Vergl. Pogg. Ann. und meine physikalischen Studien.) Was die angeführte Hypothese über die elektrischen Molekularbewegungen betrifft, so anerkenne ich wohl im ganzen Umfange den durch dieselbe auf die bisherige Theorie der elektrischen Fluida ausgeübten Druck. Doch glaube ich, die Hypothese eines elektrischen Stromes, welche derselbe als eine Reihenfolge von Rotationen um eine Axe ansieht, nicht

methode der Thermoelektricität und Pyroelektricität, sowie der axial verschiedenen Leitung der Elektricität auf Krystallen, wie später gezeigt werden wird, überein.

Schliesslich wird noch die Aufgabe vorliegen, auch die dynamische Wirkung, also Anziehung und Abstossung, durch die Elektricität von der molekularen Bewegung abhängig zu machen. Ich glaube, diese dynamische Wirkung nur als eine Folge des Einflusses des umgebenden Mittels betrachten zu dürfen. (Vergl. pag. 399.)

Da jede Bewegung eines Körpers als Molekularcomplex nur durch äussere Einwirkung hervorgerufen gedacht werden kann, so wird man auch für die dynamische Action in den Zuständen und dem Drucke des umgebenden Mediums die Ursache suchen müssen. Werden also zwei gleichnamig elektrische Körper sich genähert, so wird von jedem derselben aus die dazwischen liegende Luftschichte in molekulare Bewegung versetzt. Da diese gleichnamig ist, so wird sie bei ihrem Zusammentreffen interferiren; dadurch wird die lebendige Kraft der Moleküle der Zwischenschichte vermehrt. Da nun der Druck eines Gases als die Summe der Impulse aufgefasst werden kann, so entspricht diesem Vorgange auch eine Erhöhung des von der Zwischenschichte ausgeübten Druckes und somit eine Abstossung.

Wären hingegen die beiden genäherten Körper ungleichnamiger Elektricität, so würde auch die Zwischenschichte von zwei Punkten aus in ungleichnamige Elektricität versetzt werden. Durch Interferenz würden diese Bewegungen sich aufheben, somit die lebendige Kraft der Moleküle der Zwischenschichte vermindert werden. Da analog Obengesagtem hiermit auch der Druck der Zwischenschichte abnimmt, so wird der auf die äussere Fläche der Körper wirkende Luftdruck das Uebergewicht erhalten und deren Annäherung hervorrufen. Da die Annäherung durch den äusseren Luftdruck, hingegen die Abstossung durch die Vermehrung der lebendigen Kraft der Zwischenschichte erfolgt, so ist erstere immer stärker wie letztere. Ist die Zwischenschichte fast Null, so fehlt die Abstossung. Durch diese oder ähnliche Betrachtungsweisen wird man mindestens dahin geführt, von der bisher adoptirten physikalisch nicht definirbaren Eigenschaft „elektrische Anziehung oder Abstossung der Materie“ absehen und letztere auf physikalisch mögliche Vorgänge beziehen zu können.

---

unmittelbar adoptiren zu können, indem die thermischen Wirkungen des Stromes hierdurch kaum ihre einfache Erklärung durch molekulare Stösse erhalten könnten. Die Vibrationen um eine gemeinschaftliche Rotationsaxe sind vielmehr zur Erklärung der magnetischen Erscheinung, wo die thermischen Wirkungen fast Null sind, nach meiner Ansicht nothwendig. (Vergl. nachfolgendes Kapitel.)

Es wäre ja selbst nicht unmöglich, die Schwerkraft unter denselben Gesichtspunkten aufzufassen; denn denke man sich die Erde als eine oberflächlich elektrische Kugel, so wird ebenfalls die Anziehung nach dem Quadrate der Entfernung erfolgen. Das Fehlen der Abstossung könnte analog dem Obengesagten mehr als genügenden Grund in dem Ueberwiegen der materiellen Moleküle gegen die Moleküle der Luftzwischenschichte haben.

Alle diese angeführten Gründe sprechen jedoch in ihrer Gesammtheit für jene Hypothese, welche auch die elektrischen Erscheinungen von molekularen Bewegungen abzuleiten versucht.

§. 138. **Fortpflanzung der Elektricität. Induction. Weber'sche Constante.** Aus der gesammten Theorie der Elektricität haben bisher noch wenige Lehren eine Anwendung in der Krystallphysik gefunden, und ungleich der Lehre vom Lichte führte hier die Untersuchung der Krystalle keine Erweiterung des Gesichtskreises der elektrischen Disciplinen herbei.

Obgleich in Beziehung auf solche Verhältnisse die elektrischen Lehren nur in ihren allgemeinsten Umrissen für die Zwecke der Krystallphysik vorgetragen werden dürfen, so glaube ich doch einzelne Punkte aus der mathematischen Theorie der Induction und Elektricitätsbewegung anführen zu müssen, um einen Einblick in die Methoden zu ermöglichen. Man darf hierbei nicht übersehen, dass die bisherige Theorie sich nur mit der Theorie der Potentiale, d. i. mit der Function der gegenseitigen Einwirkung beschäftigte, ohne auf den Grund (etwa Molekularbewegung) der Erscheinung zurückzugehen. Es erscheint hierdurch der Grundzug der mathematischen Lehren der Elektricität gegenüber jenen der Optik vollkommen geändert. Während die Gleichungen der Optik sich auf direct bestimmbare Grössen beziehen, bedurfte es der gediegenen elektrodynamischen Massbestimmungen von Weber, um für die Potentialfunction die Grundlage eines absoluten Masses zu gewinnen [1].

Den Erscheinungen und der bisherigen Theorie gemäss muss man die Wirkungen der Elektricität in zwei Gruppen, in die statische und dynamische Elektricität trennen. Diese zwei Gruppen sind fast analog jenen Abtheilungen, in welchen man, vom Gesichtspunkte einer Molekularbewegung ausgehend, die elektrischen Erscheinungen trennen kann.

---

[1] In neuester Zeit wird hoffentlich die wichtige Untersuchung von Lorenz (l. c.) den Anstoss geben, auch bei den Erklärungen der Elektricitätserscheinungen von den Gleichungen der Bewegung auszugehen.

Analog der Theorie der Wärme muss man nämlich auch bei der Elektricität zwei von einander unterscheidbare Einwirkungs- und Fortpflanzungsweisen unterscheiden. Den Wirkungen der strahlenden Wärme analog sind die Wirkungen der strahlenden Elektricität und die durch die Einwirkung und Induction der strahlenden Elektricität auch in einem entfernten Körper hervorgebrachte Elektricität. Die inducirende Elektricität pflanzt sich hierbei mit grosser Schnelligkeit (vergl. später) durch die Luft fort und vermag bei Anprall an ein dichteres Körpermolekül in letzterem entgegengesetzte Elektricität zu erregen. Der Grundzug der Wirkung dieser strahlenden Elektricität ist das Eintreten der Induction von entgegengesetzter Elektricität in dem inducirten entfernten festen Körpermolekül.

Wie aber in der Theorie der Wärme neben der Fortpflanzungsart durch Strahlung auch noch eine Fortpflanzung der Wärme selbst in den Gasen durch den successiven molekularen Stoss besteht, so muss auch das Bestehen einer durch molekulare Bewegung von Molekül zu Molekül übertragenen elektrischen Bewegung bestehen. Wir verstehen hierunter die strömende oder geleitete Elektricität, welche in einem (gut leitenden) festen Körper sich von Theilchen zu Theilchen fortzupflanzen fähig ist, hierbei aber beständig den initialen Charakter beibehält. Die Analogie dieser Fortpflanzungsweise mit der geleiteten Wärme ist unabweisbar und spricht daher ebenfalls für molekulare Bewegungen.

Betrachtet man vorerst die Wirkung der strahlenden Elektricität auf einen entfernten festen Körper und suchen wir diese Vorgänge der Analyse zu unterwerfen, so ist zu bemerken, dass bisher noch immer von den molekularen Bewegungen abgesehen wurde. Man geht bisher in der mathematischen Theorie [1]) von zwei im Gegensatz stehenden Fluida aus, die als Hilfsvorstellungen für die Thatsache zweier einander entgegengesetzten Zustände gebraucht werden.

Die Grösse der Wirkung $f$ zweier elektrischen Massen ist nun sowohl diesen Massen selbst als auch dem reciproken Werthe des Quadrates der Distanz $r$ der beiden Massen proportional, daher im Allgemeinen ausdrückbar durch $n\,\frac{ff'}{r^2}$, worin $n$ eine willkürliche Constante bedeutet. Die elektrische Quantität $f$ pflegt man nur durch die oberflächliche Dichtigkeit $\delta$ der Elektricität [2]) und durch das Körperelement mit

---

[1]) Vergl. Beer. Einleitung in die Elektrostatik, Magnetismus und Elektrodynamik. Braunschweig. 1865.

[2]) Bei der Annahme einer Hypothese von Molekularbewegungen wird analog der Temperatur, jedenfalls die elektrische Quantität auch als eine Function der Masse und der Intensität der Bewegung betrachtet werden müssen.

den Volumina $dV$ auszudrücken, so dass

$$(315)\qquad n\,\frac{ff'}{r^2} = n\,\frac{\delta dV}{r}\,\frac{\delta' dV'}{r'}$$

wird. Den Ausdruck

$$(316)\qquad \int \frac{\delta dV}{r} = F$$

pflegt man Potential zu nennen und denselben der Theorie der Einwirkung zweier ruhender elektrischer Körper zu Grunde zu legen.

Dieser einfache Potentialausdruck genügt jedoch nicht, wenn die beiden auf einander wirkenden elektrischen Massen in Bewegung begriffen sind. Sei $s$ die relative Geschwindigkeit der elektrischen Massen in der Richtung ihrer Verbindungslinie und $c$ eine Constante, so wird nach Weber[1]) die gegenseitige Einwirkung dieser zwei sich bewegenden Massen durch

$$(317)\qquad \frac{ff'}{r^2}\left(1 - \frac{s^2}{c^2}\right).$$

ausdrückbar sein. Setzt man $s = \frac{dr}{dt}$, so kann man dann die elektrische Kraft $F$ mit

$$(318)\qquad F = \frac{ff'}{r^2}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr^2}{dt^2} - 2r\,\frac{d^2r}{dt^2}\right)\right]$$

bezeichnen. Diese Grösse $c$ (Weber'sche Constante) stellt nun gleichsam die relative Geschwindigkeit dar, mit welcher sich zwei elektrische Massen gegen oder von einander bewegen müssen, damit die gegenseitige Einwirkung der Massen vernachlässigt werden kann. Durch genaue Untersuchungen wurde der Werth dieser Constante von Kohlrausch und Weber[2]) zu

$$(319)\qquad c = 439450 \cdot 10^6\,\frac{\text{Millimet.}}{\text{Secund.}} = 59320\,\frac{\text{Meil.}}{\text{Sec.}}$$

bestimmt. Diese Zahl steht mit der für Lichtfortpflanzung gefundenen Zahl (42000 Meil.) in merkwürdiger Beziehung, da

$$(319a)\qquad \frac{c^2}{2} = \left(41950\,\frac{\text{Meil.}}{\text{Sec.}}\right)^2 = v^2$$

ist. Diese Beziehung ist um so wichtiger, als sie andeutet, dass die elektrische Induction von einer Gleichung abhängt, welche angibt, dass die Wirkung der elektrischen Masse auf die entfernten Körper nicht

---

[1]) Vergl. Weber. Elektrodynamische Massbestimmungen. Leipzig. Acad. 1846 und Pogg. an. vol. 82. pag. 368.

[2]) Weber und Kohlrausch. Elektrodynamische Massbestimmungen und Zurückführung der Stromintensitätsmessungen auf absolutes Mass. Abhandl. d. kön. sächs. Acad. Leipzig. vol V.

momentan erfolgt, sondern dass eine gewisse Zeit erforderlich ist, bis sich die Wirkung zu den entfernten Körpern fortgepflanzt hat. Diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Induction stimmt nun nahe mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes überein. Man kann diese Uebereinstimmung wieder als einen Beweis ansehen, dass die Ursache der elektrischen Erscheinungen Molekularbewegungen sein müssen [1]).

Diese Weber'sche Constante tritt aber nicht bloss in den Gleichungen der strahlenden Elektricität als Factor auf. Auch jene analytischen Untersuchungen, welche die zweite Form der Fortpflanzung der Elektricität „die Leitung" betreffen, ziehen diese Constante in den Bereich ihrer Untersuchungen.

So lauten die bekannten Kirchhoff'schen Gleichungen [2])

$$\begin{aligned} u &= -2K\left(\frac{d\Omega}{dx} + \frac{4}{c^2}\frac{dU}{dt}\right) \\ v &= -2K\left(\frac{d\Omega}{dy} + \frac{4}{c^2}\frac{dV}{dt}\right) \\ w &= -2K\left(\frac{d\Omega}{dz} + \frac{4}{c^2}\frac{dW}{dt}\right) \end{aligned} \tag{320}$$

Hierbei bedeuten $uvw$ die Stromdichtigkeiten nach den Coordinaten, $K$ die Leitungsfähigkeit des Leiters, in welchem sich der elektrische Strom bewegt, und $c^2$ die Weber'sche Constante. Die gesammte elektromotorische Kraft rührt dabei theils von der vorhandenen freien Elektricität, deren Potentialfunction $\Omega$ ist, theils von der Induction $UVW$ her, die in Folge von Aenderungen der Stromstärke in allen Theilen des Leiters stattfindet. Ohne hier auf die nähere Entwicklung dieser Gleichungen einzugehen, so will ich doch hervorheben, dass durch dieselben auch der Werth von $K$ (des Leitungsvermögens) von der Bestimmung der Weber'schen Constante abhängig gemacht wird. In einem späteren Paragraphe werde ich hierauf wieder zurückkommen.

§. 139. Reibungselektricität. Dass die Elektricität ihrem Wesen nach eine Bewegungserscheinung sei, findet ihre Stütze auch darin, dass dieselbe durch von aussen kommende Bewegungen erregt werden kann. Die einem Körper, z. B. Glas oder Harz, durch äussere mechanische Bewegung, z. B. Reiben mit einem rauhen Körper, auf-

---

[1]) Die neuesten Untersuchungen von Riemann und Lorenz (Pogg. Ann. vol. 131, pag. 237—263) sind auch bereits bestrebt, den mathematischen Nachweis zu liefern, dass den elektrodynamischen Gleichungen, welche mit Einführung der Constante $\frac{c^2}{2}$ abgeleitet wurden, die Thatsachen vollkommen genügen.

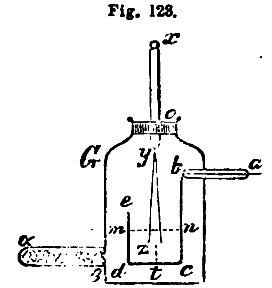
[2]) Kirchhoff. Pogg. Ann. vol. 102. pag. 529.

gezwungene molekulare Bewegung seiner oberflächlichen Theilchen, tritt uns als Elektricität entgegen. Je nach der Natur des Körpers unterscheiden wir zwei Arten von Elektricität, negative und positive, oder Glas $+ \eta$, und Harz $- \eta$ Elektricität, deren Kennzeichen in ihrer alternirenden Anziehung besteht.

Durch Reibung ist es möglich, eine grosse Anzahl von Mineralien in elektrischen Zustand zu versetzen. Da die zu untersuchenden Mineralstücke meist klein sind, so wird man gut thun, dieselben in einem isolirten Zustande, z. B. an einer Siegellackstange aufgekittet, zu reiben, indem sie sonst von ihrer durch Reibung erlangten Elektricität zu viel an die Nachbartheilchen abgeben würden, als dass man noch merkbare Anziehung und Abstossung beobachten würde.

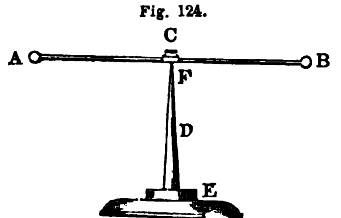
Um das Elektrischwerden von Mineralien, also deren Fähigkeit, Anziehung und Abstossung zu erregen, nachzuweisen, kann man entweder hierzu ein Goldblatt-Elektroskop oder die sogenannte elektrische Nadel benutzen. Das Goldblatt-Elektroskop nach der Einrichtung von Andriessen zeigt nebenstehende Figur. (Fig. 123.) Wird dem Knopfe $x$ Elektricität mitgetheilt, so werden die beiden Goldblättchen $y$ $z$ elektrisch. Da die Elektricität des Minerals sehr schwach ist, so thut man gut, das Elektroskop früher in elektrischen Zustand und zwar entweder $+ \eta$, oder $- \eta$ zu versetzen, was bewirkt, dass die Goldblättchen divergiren. Nähert man dann das zu prüfende Mineral dem Knopfe $x$, so fallen die Goldblättchen zusammen, wenn dies Mineral die entgegengesetzte Elektricität von jener hat, die ursprünglich dem Elektroskop mitgetheilt ward. Man erkennt hieraus gleichzeitig den Sinn der Elektricität des Minerals.

Fig. 123.




Bequemer für den Gebrauch der Mineralogen mag die von Haüy angewendete elektrische Nadel sein. Dieselbe (Fig. 124) wird aus Messing oder Silber sehr leicht gemacht und trägt an ihren Enden hohle Kügelchen. Wird dieselbe ebenfalls vorerst mit Elektricität geladen, indem man sie mit einer Glas- oder Siegellackstange in Contact bringt, so wird sie von dem genäherten Minerale abgestossen oder angezogen, je nachdem der Sinn der Elektricität dieses letztgenannten mit dem Sinn der früheren Ladungselektricität gleichnamig oder nicht ist.

Fig. 124.



Auf diese und ähnliche Weise hat Haüy[1]) fast für alle Minerale die Möglichkeit des Elektrischwerdens durch Reibung nachgewiesen. Ja selbst die leitenden Metalle können durch Reibung elektrisch werden, wenn sie in isolirtem Zustande gerieben werden.

Von den Mineralien können wir nun zwei Gruppen bilden, solche, welche positive, und solche, die negative Elektricität durch Reibung erhalten.

Positiv elektrisch werden analog dem Glase die Silicatverbindungen, Edelsteine und übrige sauerstoffhaltige Metallsalze. Analog dem Harze wird Schwefel und die den Schwefel als Sulfid enthaltenden Metallverbindungen negativ elektrisch. Von den Grundstoffen wird Antimon, Arsenik, Eisen, Gold, Nickel, Platin, Zinn negativ, Blei, Kupfer, Silber, Wismuth positiv elektrisch.

Auf die Reibungselektricität ist auch der Zustand der Oberfläche von Einfluss, indem nach Haüy auf glatter Oberfläche eines Körpers positive Elektricität erscheint, während derselbe Körper mit rauher Oberfläche negativ elektrisch wird. Es scheint sich somit für diesen rauhen Körper das Verhältniss vom Reibzeug zu dem geriebenen Körper in das entgegengesetzte verwandelt zu haben.

Diese durch Reibung erhaltene Elektricität theilt sich durch Strahlung oder Leitung den Nachbarmolekülen mit, und es nimmt somit successive die Stärke der ursprünglichen Erregung ab. Die Zeit, wie lange ein geriebenes Mineral elektrisch bleibt, variirt jedoch bedeutend, und während manche Minerale in kürzester Zeit den Ausgleich vollzogen haben, ist beispielsweise am Topas noch nach 30 Stunden die Elektricität nachzuweisen möglich.

Ausser durch Reibung werden auch manche Minerale durch Druck oder Spaltung elektrisch. So erhält der Calcit in der Varietät Doppelspath schon starke positive Elektricität, wenn man ihn zwischen den Fingern presst. Glimmer wird nach Becquerel durch Spaltung elektrisch, und zwar erhalten die Theilungsflächen entgegengesetzte Elektricität.

§. 140. Thermoelektricität. Durch den sogenannten Voltaischen Fundamentalversuch ist nachgewiesen, dass auch die blosse Berührung zweier ungleicher Körper genügt, um Elektricität hervorzurufen, und zwar in der Weise, dass beide sich berührende Substanzen entgegengesetzte Elektricität erhalten. Am besten eignen sich zum Nachweise dieser Contactelektricität Metalle, namentlich Kupfer und Zink, wovon ersteres $-\eta$, Zink $+\eta$ wird. Die Stärke der erzeugten Contact-

[1]) Haüy. Trait. d. Min. I. Ed. vol. I. 236. II. Ed. vol. I. 185. 244. Gilbert's Ann. vol. XVII. 441. vol. XV. 332.

elektricität hängt von den angewendeten Metallen ab, welche sich in einer sogenannten Spannungsreihe[1]) ordnen lassen. Die Gesetze dieser Spannungsreihe sind: a) die elektrische Differenz zweier Glieder ist um so grösser, je weiter entfernt sie in der Spannungsreihe stehen; b) jedes Glied nimmt im Contact mit einem vorhergehenden Gliede die entgegengesetzte Elektricität von jener ein, welche in demselben durch Contact mit dem nachfolgenden erzeugt wird.

Zur Erklärung dieser Contactelektricität glaube ich annehmen zu können, dass den Körpertheilchen in ihrem normalen Zustande, analog der für die Temperatur nothwendigen Bewegung, auch eine elektrische Bewegungsart eigen ist, welche sich jedoch mit der Umgebung ausgeglichen hat. Werden daher zwei Körper einander genähert, die nicht gleiche Bewegung besitzen, so wird durch die gegenseitige Induction die elektrische Differenz so weit vermehrt, dass sie selbst nach aussen hin merkbar werden kann. Diess tritt selbst dann ein, wenn Körper von gleicher Bewegungsart, aber ungleicher lebendiger Kraft der Moleküle genähert werden, indem in diesem Falle die Induction durch den kräftiger elektrischen Körper über den natürlichen Zustand des andern überwiegt. Die durch Contact erzeugte Elektricität sucht sich durch Leitung auszugleichen, und dadurch entsteht, wenn man beide Metallplatten durch einen Draht verbindet, ein elektrischer Strom.

Die Metalle haben wohl bei gewöhnlicher Temperatur eine elektrische Differenz, doch ist es möglich diese Differenz zwischen manchen Gliedern der Spannungsreihe durch Erhöhung oder Erniedrigung der Temperatur zu vergrössern [2]). Dieser Zuwachs an elektrischer Differenz ist jedoch nicht genau (Regnault) der Temperaturänderung proportional und auch nicht für alle Metalle der obigen elektrischen Spannungsreihe gleich. Während bei gewöhnlicher Temperatur beispielsweise Wismuth und Antimon fast gleichnamiges elektrisches Vermögen besitzen, so rücken sie für höhere Temperatur weit in der Spannungsreihe auseinander[3]). Löthet man eine grössere Anzahl von Wismuth- und Antimonstäbchen zusammen, so erhält man einen starken Strom, der in mehreren Windungen um eine Magnetnadel geführt, genügt, dieselbe abzulenken. Da diese durch den Strom hervorgebrachte Ablenkung von der Intensität des Stromes, also auch von der Temperatur abhängt, so kann ein solcher thermoelektrischer Apparat die Stelle eines sehr

---

[1]) + Ka, Al. Zn, Cd. Sb, Bi......Cu, Ag, C, Pt. —. Vergl. Hankel. Abh. d. königl. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. XI. pag. 585.

[2]) Seebeck. Gilbert. Ann. 1823. vol. 73. pag. 430. Pogg. Ann. 1826. vol. 6.

[3]) Thermoelektrische Spannungsreihe. Matthiessen. Pogg. Ann. 103. + Bi, Pt, Cu, Ag, ....Sb Der Strom geht bei Erwärmung vom vorhergehenden zum nachfolgenden Elemente.

empfindlichen Thermometers vertreten (vergl. pag. 328). Während von den metallischen Grundstoffen Wismuth und Antimon die äussersten Glieder der Spannungsreihe bilden, haben Versuche nachgewiesen, dass die elektromotorische Kraft von Legirungen jene der Grundstoffe übersteigen könne. In letzterer Zeit hat Bunsen[1]) gefunden, dass einzelne Mineralien aus den Gruppen der metallischen Schwefelverbindungen ein noch weit aus grösseres elektromotorisches Vermögen als diese Wismuth-Antimon-Kette besitzen: so steht in der thermoelektrischen Spannungsreihe Pyrolusit über Wismuth; natürlicher Kupferkies unter Antimon.

Um die elektromotorische Kraft einer solchen Combination ermitteln zu können, wird man die durch den von ihr erzeugten Strom verursachten Ablenkungen der Galvanometernadel in Relation setzen mit den Ablenkungen, welche der Strom einer anderen galvanischen Kette, beispielsweise ein Kupferzinkelement von bestimmter Grösse, hervorruft.

Bekanntlich ist die Stromstärke $J$ abhängig von dem Leitungswiderstand $L$ der Kette, von der elektromotorischen Kraft $E$ und von $W$ dem Widerstande des Schliessungsbogens. Vermehrt man letzteren um $w$, so vermindert sich die Stromstärke in $i$.

Man erhält somit

$$J = \frac{E}{L + W} \qquad i = \frac{E}{L + W + w}$$

$$L = \frac{wi}{J - i} - W \qquad E = \left(\frac{wi}{J - i} + w\right) i \qquad (321)$$

Hieraus lässt sich sowohl die elektromotorische Kraft des Daniell-schen Elementes als auch der Thermokette ableiten. Bunsen fand für die Combination Kupferkies zu Kupfer $E = 145$, für das benützte Daniell'sche Element von 1 Quadratdecimeter Oberfläche $E_d = 2136$. Das Verhältniss der elektromotorischen Kraft ist somit 1 : 14, oder 14 solche Thermoelemente von Kupferkies-Kupfer geben einen Strom, welcher dem eines Daniell'schen Elementes gleichkommt. Die elektromotorisch wirksamste ($E' : E_d = 1 : 5\cdot5$) Verbindung von Mineralien, nämlich Bleiglanz zu Buntkupfererz, ward von Stefan[2]) angegeben.

Um die Thermoelektricität der Mineralien bequem zu untersuchen, hat Stefan das Mineral auf einen Kupferstreifen gelegt und mit einer Holzzwinge festgeklemmt und nun den Kupferstreifen erwärmt. Der

[1]) Bunsen. Pogg. Ann. 1864. vol. 123. pag. 505. Vergl. Becquerel. Compt. rend. 1865. vol. 60, 313.

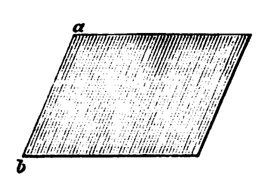
[2]) Stefan. Sitzungsber. d. Wien. Acad. 1865. vol. 51, 260.

Strom wird zum Galvanometer geleitet durch Kupferdrähte, die theils an das Mineral, theils an den Kupferstreifen festgeklemmt sind.

Auf diese thermoelektrische Kraft scheint nach den Untersuchungen von Stefan die Structur des Minerals einen bedeutenden Einfluss auszuüben. Derselbe fand im Contact mit Kupfer den körnigen Kobaltkies schwach positiv elektrisch, krystallisirten Kobaltkies hingegen stark negativ. Ebenso verhielten sich einige feinkörnige Exemplare von Bleiglanz stark negativ elektrisch, während grobkörnige Exemplare positiv elektrisch wurden.

Es stimmt diese Beobachtung zu der Entdeckung Seebeck's (l. c.), dass auch in einem Metalle durch Erwärmung eine elektrische Differenz sich erzeugen lässt. Ebenso stimmt dies zu der Thatsache, dass man in in einem Wismuthstabe, in welchem man durch Erwärmung an verschiedenen Punkten verschieden gerichtete Ströme hervorgerufen hat, beim Zerbrechen Spuren einer entgegengesetzt orientirten Krystallisation findet. Es hat daher schon früher ganz richtig Franz[1]) darauf hingewiesen, dass die Schichtung in Folge der Spaltbarkeit auf die Thermoelektricität von Einfluss ist. So fand derselbe, dass der Blätterdurchgang in den Wismuthkrystallen die Richtung des elektrischen Stromes im Krystall selbst bedingt, wenn der Krystall erwärmt wird. Ist nämlich die Lage *a b* der Spaltungslamellen (Fig. 125) geneigt gegen die erwärmte Kante, so ist die Richtung des positiven Stromes[2]) durch die geneigte Lage der Blättchen angedeutet. Einige Metalle folgen dem umgekehrten Gesetze.

Fig. 125.




Franz hat aber auch noch ferner gezeigt, dass wenn dünne Blättchen desselben Minerals schiefgeschichtet und einseitig erwärmt werden, der durch die Schichtung entstandene Strom entgegengesetzte Richtung hat, je nachdem die obere *a* oder untere Seite *b* der liegenden Säule (Fig. 125) erwärmt worden. Der entgegengesetzten Richtung des Stromes entsprechen auch die entgegengesetzten Ablenkungen der Galvanometernadel. Man sieht durch diese Untersuchungen, dass die Thermoelektricität durch die Art des Gefüges der einzelnen Körper wesentlich bedingt ist.

§. 141. Pyroelektricität. Durch die von Franz gewonnenen Resultate wird mit der Thermoelektricität auch die sogenannte Pyroelektricität auf das innigste verknüpft. Da nämlich jeder Krystall aus einer Reihe von Lamellen zusammengesetzt ist, so steht zu erwarten,

---

[1]) Franz. Pogg. Ann. vol. 83, 375. vol. 84, 388. vol. 97. pag. 34.

[2]) Jener Strom, der bei Erwärmung von Wismuth zu Antimon geht.

dass auch jedes Krystallindividuum, wenn es erwärmt wird, einen elektrischen Strom liefert. Die Existenz eines solchen elektrischen Stromes ist wohl bisher nicht an allen, sondern nur an den zumeist feuerbeständigen Mineralien bewiesen worden, doch mag selbst ein negatives Resultat[1]) bei der ausserordentlichen Schwäche des Stromes nicht entscheidend sein. Da nun solche Mineralien bei Temperaturwechsel analog der oben angegebenen aus Wismuthlamellen bestehenden Säule einen elektrischen Strom liefern, so wäre diese Erscheinung an Krystallen ebenfalls unter dem allgemeinen Begriffe Thermoelektricität einzubeziehen. Da aber die bei Temperaturwechsel entstehenden Ströme meist nur bei jenen Mineralien kräftig auftreten, welche sich durch ihre hemiedrische oder hemimorphe Ausbildung auszeichnen, so hat man für die an Krystallen beobachteten Erscheinungen, „dass bei Erwärmung an bestimmten Stellen des Minerals beide Elektricitäten nachweisbar auftreten,“ den Ausdruck Pyroelektricität angenommen.

Zur Prüfung eines Metalles auf Pyroelektricität wird derselbe in einem Schrotbade bis zur gewünschten Temperatur erwärmt, durch Bestreichen mit einer Flamme von der etwa im Schrotbade erhaltenen Reibungselektricität befreit[2]) uud dann an verschiedenen Punkten seiner Oberfläche durch Berührung mit dem Elektroskop auf die vorhandene Elektricität geprüft.

Die Entdeckung der Pyroelektricität geschah von Aepinus[3]) am geschliffenen Turmalin, an welchem auch gleichzeitig die Existenz der positiven und negativen Elektricität nachgewiesen ward. Ueber das gleichzeitige Auftreten zweier Elektricitäten an einem Krystall wurden später namentlich[4]) von Bergmann, Haüy, Brewster, Köhler, Forbes und Ermann Untersuchungen angestellt, welche eine grosse Anzahl von Thatsachen bekannt machten. Aber erst Hankel[5]) sowie Riess und Rose[6]) versuchten das Zusammenfassen der Thatsachen unter dem Gesichtspunkte einer allgemeinen Theorie.

Die Stellen am Krystalle, an welchen die entgegengesetzten Elektricitäten auftreten, können als Pole bezeichnet werden und die sie verbindende Linie als Axe.

---

[1]) Hankel gibt an, dass oft erst nach mehrmaligem Temperaturwechsel die Erscheinung erkennbar ward.

[2]) Zuerst angegeben in Saggi dell' acad. del Cimento. Napoli 1701. pag. 2.9. Vergl. Riess und Rose. Pogg. Ann. vol. 59. pag. 355.

[3]) Aepinus. Mém de l'Ac. de Berlin. vol. XII. Mineral. Belustigung. Leipzig. 1768. vol. 1, 302.

[4]) Bergmann. Act. Acad. Holmiensis. 1766. V. 402. Haüy. Traité de crystallographie. 1822. vol. II. 557. Brewster. Pogg. Ann. vol. II. 297. Köhler. Pogg. Ann. vol. 17. pag. 146. Forbes J. Edinb. Transact. 1834. vol. XIII. Ermann. Abh. d. Berl. Acad. 1829. Pogg. Ann. vol. XXV. 607.

[5]) Hankel. Pogg. Ann. vol. 49, 493. vol. 50, 237, 471. vol. 56, 37. vol. 61, 281. vol. 74, 231.

[6]) Riess und Rose. Pogg. Ann. vol. 59, pag. 353. vol. 60. pag. 659.

Diese entgegengesetzten Pole fallen nun in den meisten terminalpolaren Fällen an die Endpunkte eines Krystalldurchmessers. Im Gegensatze hierzu zeigen Topas und Prehnit nach Riess und Rose auf der Oberfläche lauter gleichnamige Pole, so dass man annehmen müsste, die entgegengesetzten Pole fallen in das Centrum des Krystalles; daher auch centralpolarisch genannt. Doch spricht sich Hankel gegen die Möglichkeit einer solchen Polvertheilung aus und nimmt auch an diesen Mineralien ebenfalls eine peripherische Vertheilung der Pole an.

An jedem dieser Pole kann sowohl positive, als auch negative Elektricität auftreten, indem, während bei der gewöhnlichen Temperatur $\eta = 0$ ist, sich bei Erwärmung $+ \eta$, bei Erkaltung $- \eta$, oder umgekehrt bei der Erkaltung $+ \eta$, bei der Erwärmung $- \eta$ zeigt.

Berücksichtigt man nun die Verhältnisse bei geringen Temperaturveränderungen, etwa unter 100°, so kann man jenen Pol, der durch Temperaturerhöhung positiv, durch Erkaltung negativ elektrisch wird, dessen Elektricität somit dasselbe Zeichen wie die Temperaturänderung hat, als analogen Pol bezeichnen; der entgegengesetzte Pol aber, der durch Erwärmung negativ elektrisch wird, kann als antiloger Pol bezeichnet werden.

Dieser Unterschied zwischen antilogen und analogen Polen ist bei beschränkten Temperaturintervallen gültig; denn Hankel hat mit Bestimmtheit nachgewiesen (Pogg. 74), dass am Borazit und Titanit im Verlaufe einer weitgetriebenen Erhitzung ein Umsetzen der analogen Pole in antiloge sich wahrnehmen lasse. Hiermit stimmt auch die Beobachtung Becquerel's[1]) überein, nach welcher die Zunahme der Elektricitätsintensität nicht der Wärmedifferenz direct proportional ist, so dass dieselbe vielmehr für verschiedene Körper bei verschiedener Temperatur ihr Maximum erreicht. Die Intensität der erregten Elektricität sucht Becquerel durch die Schwingungszahlen zu bestimmen, welche dem erwärmten und pyroelektrischen Körper zukommen, wenn man ihn zwischen zwei Eisenstäben schwingen lässt, die mit den Polen der Zamboni'schen Säule in Verbindung stehen. Gaugain[2]) hingegen hat die Quantität der erregten Elektricität dadurch zu bestimmen gesucht, dass er die Pole des Krystalls mit dem Elektroskop in leitende Berührung brachte. Entladet man das Elektroskop und ladet dasselbe wieder mit der Elektricität des Krystalls und wiederholt dies Verfahren, so lässt sich hierdurch bestimmen, zu wie oftmaliger Ladung die Elektricität des Krystalls genügte.

---

[1]) Becquerel. An. de chim. 1828. vol. 37.

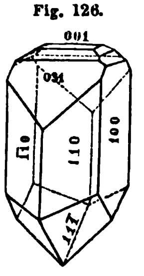
[2]) Gaugain. Compt. rend. vol. 42. 1862. vol. 43, 912, 1112.

Kann man also die Worte analoger und antiloger Pol nur mit den nöthigen Beschränkungen benutzen, so zeigt sich doch diese Bezeichnung namentlich sehr dienlich, um den Zusammenhang der Erscheinung mit der krystallographischen Symmetrie hervortreten zu lassen. Es zeigen nämlich einige Mineralien eine constante Beziehung zwischen ihren Polen und der Art des Krystallwachsthums. So ist Kieselzink immer mit dem antilogen, Skolezit mit dem analogen Pole aufgewachsen, während andere Minerale hingegen kein solches constantes Gesetz befolgen.

Im Allgemeinen scheint jedoch die Axe der Pole eine solche Lage zu haben, dass sie normal auf jene Fläche oder Symmetrieebene zu stehen kommt, welche die zwei entgegengesetzt hemiedrischen Hälften des Krystalls von einander scheidet.

Bereits auf den vorhergehenden Seiten ward nämlich erwähnt, dass die Pyroelektricität vorzüglich eine Eigenschaft hemiedrischer oder hemimorpher Körper ist. Aus dem Vergleich der Lage der Pole, z. B. Turmalin, Kieselzink, mit der krystallographischen Symmetrie lässt sich erkennen, dass jene Medianfläche, welche (an Kieselzink Fig. 126 parallel {001}) die zwei verschieden ausgebildeten oberen und unteren Krystallhälften trennt, auch jene Fläche ist, zu welcher die elektrischen Pole normal sind.

Fig. 126.




Diese Anordnung der Pole erlaubt auch die bei anisophanen Körpern auftretende Pyroelektricität von der Lagerung der Grundstoffe im Krystallmolekül abhängig zu machen. Wie bereits im Kap. XI. pag. 170 angedeutet ward, lassen sich die Hemimorphien erklären, durch eine nach oben und unten verschiedene Lagerung der Grundstoffe auf der Axe der hemimorphen Symmetrie. Eine solche Lagerung, dass in einer Richtung oben und unten nicht gleiche Grundstoffe, sondern oben und unten eine wechselnde Combination von Grundstoffen auftritt, muss naturgemäss in eben dieser Richtung das elektrische Gleichgewicht stören, während in den anderen Richtungen bei normaler Ausbildung elektrisches Gleichgewicht herrschen muss. Die elektrischen Pole müssen somit in der Richtung dieser atomistischen Differenz fallen und ihr Charakter wird naturgemäss, wie bei den übrigen Verhältnissen der Thermoelektricität, von den relativen thermoelektrischen Eigenschaften der in dieser Richtung liegenden Grundstoffe abhängen. Je nachdem der obere oder untere Complex von Grundstoffen die von aussen als Wärme kommende Bewegung in eine intensivere $+\eta$ oder $-\eta$ elektrische Vibration umzusetzen vermag, wird auch der entsprechende Pol als analoger oder antiloger Pol in die Erscheinung treten.

Dass diese Pyroelektricität in der That auch von der Anordnung im Grundmolekül und nicht etwa bloss von dem Aufbau und der äusseren Symmetrie eines grossen Krystalls abhängt, dafür spricht die Beobachtung Brewster's, nach welcher das Turmalinpulver sich pyroelektrisch zeigte.

§. 142. **Fortpflanzung der geleiteten Elektricität in Mineralien. Leitungsfähigkeit.** Wir können zwei Arten der Fortpflanzung der Elektricität unterscheiden. Erstens pflanzt sich die $+\eta$ Elektricität analog der strahlenden Wärme auch mit der Geschwindigkeit dieser letzteren in der Luft fort, und inducirt in dem getroffenen Moleküle entgegengesetzte Elektricität; zweitens pflanzt sich die Elektricität auch von Theilchen zu Theilchen in Einem leitenden Medium fort, immer den Charakter der ursprünglichen $+\eta$ oder $-\eta$ beibehaltend. Letztere Ausbreitungsart wird mit dem Ausdruck Leitung der Elektricität bezeichnet. Man kann auch für diesen letzteren Vorgang die Analogie mit der geleiteten Wärme nicht verkennen.

Die Fortpflanzung eines elektrischen Stromes durch einen Leiter wird naturgemäss von der Substanz des Körpers abhängen und mit letzterer variiren. Die absolute Leitungsfähigkeit eines Körpers würde somit durch das Verhältniss des durchlaufenen Weges zur Zeit — analog dem Brechungsexponenten — ermittelt werden. So haben Fizeau und Gounelle nachgewiesen, dass sich die Geschwindigkeit des elektrischen Stromes im Kupfer zu jener im Eisen, sowie 112 : 62 verhält.

Da solche Versuche zur Bestimmung der absoluten Leitungsfähigkeit der Körper jedoch nur höchst schwierig auszuführen sind, so hat man sich mit der Ermittlung jener Zahlenverhältnisse für die verschiedenen Leiter beschäftigt, welche nur das Verhältniss der relativen Widerstände mehrerer Leiter gegen den elektrischen Strom darstellen.

Analog wie bei der geleiteten Wärme nach aussen hin nur die Bewegung der Temperatur erscheint, so wird auch bei der Elektricität von der Fortpflanzung derselben die Bewegung einer gewissen constanten nach aussen wirkenden Intensität zu unterscheiden sein. Wie bei der Temperaturbewegung, so wird auch hier eine gewisse Summe $E$ Kraft und Arbeit zur Bewegung der Moleküle verbraucht werden müssen, damit die gewünschte Intensität $J$ der Elektricität auftritt.

Hiermit stimmt nun auch das Ohm'sche Gesetz $J = \frac{E}{W}$, worin $W$ den Widerstand des Mittels angibt. Da wir früher (Satz 321) angegeben, dass sich die Intensität durch die Ausschläge der Galvanometernadel messen lässt, so wird man bei Constanz von $E$ leicht zur Kenntniss der relativen Werthe von $WW'$ für mehrere eingeschaltete Leiter gelangen.

Erhält man auch durch dieses Verfahren die Kenntniss der relativen Werthe der Leitungswiderstände und pflegt man auch dieselben den reciproken Werthen der Leitungsfähigkeit proportional zu setzen, so ist doch noch die Kenntniss eines absoluten Maasses hierfür nöthig.

Ein solches absolutes Maass ward durch die Ermittlung des absoluten Fortpflanzungscoefficienten $K$ für Kupfer gewonnen [1]. Analog den früheren Gleichungen (320) ist nämlich die Intensität der geleiteten Elektricität

$$u = -\frac{2K\,d\,\Omega}{dx} - \frac{8K}{c^2}\,\frac{dU}{dt} \qquad (322)$$

auch von dem absoluten Fortpflanzungscoefficienten $K$ des Leiters abhängig.

Ist es nun möglich, durch eine Combination den Einfluss des ersten von der freien Elektricität abhängigen Gliedes zu eliminiren, so wird durch die Messung der Intensität auch eine Messung des Coefficienten $K$ ermöglicht. Analog hiermit suchte Kirchhoff $K$ zu bestimmen, indem er von jenen Gleichungen ausgeht, welche die Intensität $J$ eines inducirten Stromes angeben, welcher in einem linearen Leiter durch relative Bewegung hervorgebracht wird. Diese Gleichung

$$J = -\frac{8K}{c^2}\,\frac{F - F'}{\tilde{\omega}} \qquad (322\,a)$$

enthält ausser $K$ und $c$ noch die Potentialausdrücke [2] $FF'$ der Inducenten auf den Leiter und $\tilde{\omega}$, den Quotienten aus dem Querschnitt in der Länge des Leiters.

Auf diesen und ähnlichen Wegen ward der absolute Fortpflanzungscoefficient $K$ für Kupfer bestimmt. Das Mittel von Kirchhoff und Weber's Angaben ist bezogen auf das Jacobi'sche [3] Grundmaass gleich $\frac{8K}{c^2} = \frac{1}{224}$ Quadratzoll, oder bezogen auf magnetisches Maass gleich $\frac{8K}{c^2} = \frac{1}{274.100}\,\frac{\text{Millimeter.}}{\text{Secunde}}$ Da nun auch $c^2$ bekannt ist, so lässt sich im absoluten Maasse auch $K$ berechnen. Letzteres ist

$$K_{Cu} = \frac{c^2}{8.274100} = 88 \cdot 10^{15}\,\frac{\text{Mm.}}{\text{Sec.}} = 11889.10^6\,\frac{\text{Meilen.}}{\text{Sec.}} \qquad (323)$$

Zu bemerken ist, dass dieser absolute Fortpflanzungscoefficient bei Temperaturzunahme abnimmt, analog der Formel

---

[1] Kirchhoff. Pogg. Ann. vol. 76. pag. 416, Weber. Pogg. Ann. vol. 82. pag. 336.

[2] Der Potentialausdruck berechnet sich als ideale Fläche, aus Zahl und Grösse der Drahtwindungen des Inducenten.

[3] Bezüglich der Vergleichung der Grundmaasse vergl. Weber Pogg. Ann. vol. 82, 358 und Jenkin Pogg. Ann. vol. 126, pag. 368.

$$K_T = K_0 (1 - Q) \tag{324}$$

und für Kupfer fand Arndtsen[1]) $Q = 0{\cdot}00269$.

Ist das Gesetz der absoluten Fortpflanzung an einem Metalle vollkommen erforscht, so lassen sich die übrigen Metalle auf dasselbe beziehen, da die Verhältnisse der Leitungsfähigkeit den der Fortpflanzungscoefficienten parallel laufen.

Sucht man nun die Abhängigkeit der Leitungsfähigkeit von den Eigenschaften des leitenden Mittels zu erforschen, so zeigen die bisherigen Beobachtungen, dass sich der Leitungswiderstand der Körper mit der Abnahme der Dichte im Allgemeinen vermehrt, so dass die Luft einen grösseren Widerstand als Flüssigkeiten und diese wieder einen grösseren Widerstand als die Metalle darbieten. Da man den reciproken Werth des Leitungswiderstandes als elektrisches Leitungsvermögen im uneigentlichen Sinne bezeichnen wird, so erkennt man aus diesem obigen Gesetze, dass das Leitungsvermögen für Elektricität denselben Gang wie jenes für Wärme einhält. Es besitzen auch die Metalle ein gleiches Leitungsvermögen für die Elektricität wie für die Wärme[2]).

Das elektrische Leitungsvermögen namentlich metallischer Leiter zeigt sich abhängig von der Dichte, Härte, sowie auch von der Temperatur. Während bei mehreren nicht metallischen Leitern die Leitungsfähigkeit mit Erhöhung der Temperatur zunimmt, ja dieselbe oft bei jenem Wärmegrad, welcher dem Schmelzpunkte (freie Beweglichkeit der Theilchen) sehr nahekommt, ihr Maximum erreicht, ist hingegen die Abnahme der Leitungsfähigkeit für die Metalle zwischen 0—100° C. nachgewiesen. Ebenso beeinflusst auch der Magnetismus die Leitungsfähigkeit, da es nachgewiesen ist[3]), dass der Leitungswiderstand einer Eisenstange durch Magnetisirung in der Richtung der magnetischen Axen zunimmt, somit das Leitungsvermögen abnimmt.[4])

Bezüglich des Einflusses der Substanz des Minerals auf seine Leitungsfähigkeit ward namentlich durch die Untersuchungen von Haüy sichergestellt, dass im Allgemeinen die Harze, Silicate und die nur wenig Procente Metall enthaltenden Sauerstoffsalze schlechte Leiter sind, dass jedoch die Leitungsfähigkeit zunimmt, wenn der Procentgehalt der Verbindung an Metall grösser wird. Kobell[5]) prüft die Mineralien auf ihre Leitungsfähigkeit, indem er dieselben, in einer Zinkklemme gefasst, in eine Kupfervitriollösung taucht. Der Niederschlag von metallischem

---

[1]) Arndtsen. Pogg. Ann. vol. 104. pag. 1.

[2]) Wiedemann. Pogg. Ann. vol. 122. pag. 22. vol. 125. pag. 497.

[3]) Thomson. Phil. Trans. 1856. pag. 315. Beetz. Pogg. Ann. vol. 128, 193.

[4]) Es muss somit die elektrische Bewegung durch die dem Magnetismus eigenthümliche Art einer constanten Molekularbewegung gehindert werden.

[5]) Kobell. Erdmann. Journ. 1850. vol. L.

Kupfer kennzeichnet die leitenden Mineralien. Wartmann [1]) hat zur Prüfung dieser Verhältnisse einen galvanischen Strom benutzt.

Durch ähnliche Versuche ward weiter nachgewiesen, dass manche Mineralien durch Glühen leitend werden, während sie vor dem Glühen nicht leitend sind. So spricht das Leitendwerden des Anthracit nachdem er geglüht worden, gegen die Möglichkeit eines plutonischen Ursprungs.

Schliesslich ist zu erwähnen, dass Hausmann und Henrici [2]) gefunden haben, dass die krystallisirten und am vollkommensten metallisch glänzenden Mineralien die besseren Leiter sind.

**§. 143. Axialverschiedene Leitungsfähigkeit der Krystalle. Ausdehnung der Elektricität auf der Krystalloberfläche.**

Die im vorigen Paragraphe angeführten Versuche haben nur die Bestimmung der elektrischen Leitungsfähigkeit vor Augen, soweit diese letztere dem Mineral als Ganzes zukommt, ohne dass hierbei auf die axialverschiedenen Richtungen eine weitere Rücksicht genommen wurde.

Wie aber für die übrigen Agentien, so haben auch auf die elektrischen Erscheinungen die Krystalle einen axial verschiedenen Einfluss. Dieser letztere tritt schon bei den Erscheinungen der Thermo- und Pyroelektricität deutlich hervor. Derselbe lässt sich jedoch noch viel besser, ja selbst durch Zahlen nachweisbar, bei jenen Phänomenen erkennen, welche die Fortpflanzung der erregten Elektricität darbietet.

Wegen der Schwierigkeit, das axiale Leitungsvermögen der Krystalle direct zu messen, hat Wiedemann [3]) ein indirectes Verfahren angegeben, welches sich auf nachfolgende Erwägungen stützt. Theilt man einer Scheibe eines homogenen Körpers an einem Punkte Elektricität mit, so verbreitet sich dieselbe kreisförmig um diesen Punkt. Bei den anisophanen Krystallen lehren jedoch ähnlich angestellte Beobachtungen, dass die Ausbreitung der Elektricität nicht mehr kreisförmig, sondern ellipsoidisch erfolgt. Die Fortpflanzung der Elektricität auf der Oberfläche der Krystalle ist somit durch den Einfluss der Substanz bedingt und daher axial verschieden.

Will man diese axialen Werthe des Fortpflanzungsvermögens bestimmen, so kann man ein Verfahren einschlagen, welches dem bei Ermittlung der Temperaturdifferenzen befolgten analog ist. Wiedemann bestreut die geschliffene Krystallplatte mit einem Pulver von Lycopodium und Menning, befestigt dann auf derselben mit einem geeigneten Träger eine

[1]) Wartmann. l'Institut. 1858.

[2]) Hausmann und Henrici. Stud. Götting. Ver. bergm. Fr. vol. IV.

[3]) Wiedemann. Pogg. Ann. vol. 76, pag. 406.

isolirte freie Spitze und theilt dieser letzteren durch Berührung mit dem Knopfe der Leidnerflasche Elektricität mit. Von der elektrisch gewordenen Spitze entfernt sich das Pulver und entblösst so eine elliptische Figur, die nach der Richtung der besseren Leitungsfähigkeit oft sehr excentrisch verlängert erscheint.

Senarmont [1]) wendete eine andere Methode an. Er bedeckte die Krystallfläche mit einem Stanniolblatt, worin eine kreisrunde Oeffnung geschnitten war. In Mitte dieser Oeffnung brachte er die elektrische Spitze an und beobachtete im luftverdünnten Raume den Gang des Funkens von der Spitze zum Stanniolblatt. Auch hier wird der elektrische Funke jenen Weg einschlagen, der dem Maximum von der Leitungsfähigkeit der Oberfläche entspricht. Diese Beobachtungen kann man ebenfalls durch ein Schema darstellen (vergl. §. 106). Ich wähle, um die Analogie mit der Temperaturausbreitung hervorzuheben, den Lateinbuchstaben E (abc) als Index des Schema der elektrischen Ausbreitung.

Die von Wiedemann und Senarmont angestellten Versuche ergeben, dass an fast allen bisher untersuchten Krystallen die Richtung der besten Fortpflanzung für Elektricität mit der Richtung der grösseren optischen Elasticitätsaxe zusammenfällt. Vergleicht man nämlich das optische Schema {abc} mit dem elektrischen Schema E (abc), so gilt für Zinnstein {abç} und E {aac}; für die negativen Krystalle Calcit, Apatit, Turmalin, Beryll hingegen {cca̱} und E (cca). Das relative Verhältniss der Leitungsfähigkeit $c_E : a_E$ ist wohl von jenem von c : a verschieden und erreicht in manchen Fällen selbst 1:1 sogar 2:1, doch stimmt die Orientirung überein.

Ich wage jedoch nicht auf diese nur wenigen Versuche gestützt, für alle Fälle eine solche Uebereinstimmung behaupten zu wollen. Ist jedoch eine solche wahrhaft ohne Ausnahme vorhanden, so wäre hierdurch eine weitere Analogie zwischen Licht und Elektricität begründet. Hervorzuheben wäre hierbei, dass die Schemata für Licht sich auf die Richtungen der molekularen Vibrationen, hingegen für Elektricität auf die Fortpflanzungsrichtung selbst beziehen. Eine solche absolute Identität der Schemata würde dann beweisen, dass den elektrischen Erscheinungen auch die zur Fortpflanzungsrichtung parallelen Molekularbewegungen zuzugestehen sind.

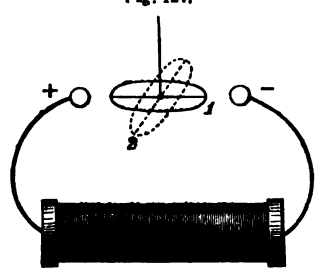
§. 144. **Elektrische Richtkraft der Krystalle und Schema derselben** $\eta$ (abc). Von der Fortpflanzung der Elektricität durch Strahlung unterscheidet sich im wesentlichen jene durch Leitung des elektrischen Stromes. Letztere scheint analog der geleiteten Wärme in der

[1]) Senarmont. An. de Chim. 1850. vol. 28. pag. 261.

Uebertragung des primären Impulses von Molekül zu Molekül zu bestehen. Naturgemäss werden somit die isophanen Körper der Leitung der Elektricität nach allen Richtungen gleichen Widerstand leisten. Anders hingegen verhalten sich die Krystalle; doch für letztere finden sich nur einzelne Bestimmungen vor. Hausmann und Henrici geben an, dass Malacolith in der Richtung der Hauptaxe, Diallag parallel dem Blätterdurchgange am besten leitet. Wartmann sagt, dass bei einaxigen Krystallen eine Verschiedenheit der Leitungsfähigkeit je nach der Richtung des galvanischen Stromes gegen die Axe vorkommt. Da eine directe Bestimmung des Leitungswiderstandes mittelst des Galvanometers bei den bisherigen Hilfsmitteln kaum realisirbar ist, so hat Wiedemann[1]) ein auf Induction und Leitungsfähigkeit basirtes Verfahren vorgeschlagen.

Bringt man nämlich zwischen die zwei naheliegenden Pole (Fig. 127) einer trockenen galvanischen Säule eine homogene kreisrunde Glasscheibe, auf welche ein Streifen von gut leitendem Stanniol geklebt ist, in horizontaler, frei schwebender Lage an, so wird sich dieselbe, wenn sie im Mittelpunkte frei beweglich ist, drehen und eine solche Stellung einnehmen, dass das leitende Stanniol in der Richtung des elektrischen Stromes von Pol zu Pol (Stellung 1) liegt. Wird statt der homogenen Glasscheibe eine kreisrunde Krystallplatte zwischen den Polen frei beweglich aufgehangen, so würde sich dieselbe analog der ersteren ebenfalls drehen, bis die Richtung der besten Leitungsfähigkeit in die Richtung von Pol zu Pol fällt. Man pflegt diese Richtung von Pol zu Pol (Fig. 127 1) die axiale, hingegen die hierauf senkrechte Richtung (beide in der horizontalen durch die Polpunkte gehenden Ebene) die äquatoriale Stellung (Fig. 127 2) zu nennen. Die Grösse der elektrischen Einwirkung kann immer dadurch ermittelt werden, denn in jeder Platte, welche zwei Coordinatenaxen enthält, wird die Richtung der stärkeren Einwirkung die axiale Lage annehmen. Mittelst zweier Platten kann man daher die Werthe E ($a \gtrless b \gtrless c$) bestimmen.

Fig. 127.




Zu bemerken ist, dass diese Drehungserscheinungen in einzelnen Fällen durch die Wirkung der inducirten Elektricität verdeckt werden können. So ist nach Knoblauch[2]) bei Bergkrystall und Topas die inducirte Elektricität so stark, dass selbst rotirende Scheiben in jeder beliebigen Stellung durch die im Momente der Stromschliessung hervor-

---

[1]) Wiedemann. Pogg. Ann. vol. 77. pag 534.
[2]) Knoblauch. Pogg. Ann. vol. 83. pag. 289.

gerufene inducirte Elektricität augenblicklich zwischen den Polen festgehalten werden können. Ueberdiess wäre die Annahme selbst nicht unmöglich, dass diese gesammten Drehungserscheinungen nur Folge der axial grösseren oder geringeren Induction wären, so dass die axiale Lage der Richtung die kräftigere Induction wäre. Die bisherigen Beobachtungen lassen hierüber keine definitive Entscheidung zu. Nur die Beziehungen mit der später (pag. 418) betrachteten magnetischen Richtkraft sind vielleicht von einigem Einfluss auf die Entscheidung.

Nach den obigen Principien hat Knoblauch eine grosse Reihe von Mineralien auf ihre axial verschiedene Einwirkung geprüft. Um nun den Einfluss dieser elektrischen Richtkraft übersichtlich darzustellen, wird es zweckmässig[1]) sein, auch hierfür das Schema $\eta$ (abc) anzunehmen. Man wird sodann die Orientirung eines einaxigen Krystalls zwischen den elektrischen Polen mit $\eta$ (aac) bezeichnen, wenn die Krystallplatte senkrecht zur optischen Axe aufgehangen, letztere c äquatorial einstellt. Den Beobachtungen an Krystallen sind jene, welche an homogenen, künstlich comprimirten Körpern von Knoblauch dargestellt wurden, ähnlich. Auch letztere drehen sich zwischen den elektrischen Polen und nehmen eine solche Stellung an, dass die Compressionsaxe (parallel welcher somit die grösste Anzahl der Moleküle liegt) die äquatoriale[2]) Lage hat.

Da nach diesen Beobachtungen die Compressionsaxe, also auch die Dichte auf die Grösse der elektrischen Richtkraft von Einfluss ist, so sollte man vermuthen, dass zwischen den optischen oder thermischen Schemata und dem Schema $\eta$ (abc) eine Beziehung stattfinde.

Stellt man zu diesem Zwecke die Schemata für das Licht, die Temperaturbewegung $T$(abc), die elektrische Ausbreitung $E$(abc) mit dem Schema $\eta$ (abc) für die elektrische Richtkraft in Parallele für

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Beryll . . | a | $T$ (cca) | $E$ (cca) | $\eta$ (cca) |
| Calcit . . | a | $T$ (cca) | $E$ (cca) | $\eta$ (aac) |
| Turmalin | a | $T$(aac) | $E$ (cca) | $\eta$ (cca) |

so ersieht man hieraus, dass das Schema $\eta$(abc) für die elektrische Richtkraft in keiner näheren Beziehung zu den übrigen Schemata steht, somit auch keine einfache Function der Dichte, ähnlich dem Verhalten der comprimirten Körpern sein kann. Die wirklich bestehenden Analogien betreffen nur die magnetische Orientirung der Körper und werden bei Besprechung dieser im nächsten Kapitel hervorgehoben werden.

---

[1]) Der Buchstabe $\eta$ soll die Analogie mit der para- und diamagnetischen Orientirung andeuten.

[2]) Die Anziehung der Richtung, worin die Minderzahl der Moleküle liegt, spricht vielleicht gegen die Möglichkeit, die Erscheinungen als Folge der Induction zu erklären.

Für die Theorie der Elektricität scheint jedoch der Vergleich der Schemata $E$ und $\eta$ einige bemerkenswerthe Momente darzubieten. Die obige Tabelle zeigt, dass die Leitungsfähigkeit für strömende Elektricität $\eta$ (abc) mit der Ausbreitung und Leitungsfähigkeit für Spannungselektricität $E$ (abc) nicht übereinstimmt. Eine solche Nichtübereinstimmung wird sich wohl schwerlich mittelst der Hypothese zweier elektrischer Fluida erklären lassen. Nimmt man jedoch eine Hypothese von Molekularbewegungen zu Hilfe, so mag sich für diese elektrischen Erscheinungen ein Analogon finden lassen in der ungleichen Fortpflanzung eines Wärmeimpulses und der gleichen Temperatur.

Wollte man hingegen die Erscheinungen, welche die elektrische Richtkraft hervorruft, als Folge der Induction betrachten, so würde auch hierfür die bisherige Hypothese der elektrischen Fluida nicht vollkommen genügen. Zur Erklärung würde es unbedingt nothwendig sein, dass man die Theorie der oberflächlichen elektrischen Induction verlässt, und annimmt, es bestehe für die Krystalle eine axialverschiedene, nicht von der äusseren Form (da kreisrunde Scheiben angewendet), sondern von der innern axialverschiedenen Substanz abhängige elektrische Induction.

Und so zeigen schon diese wenigen Thatsachen, dass nur die quantitativen Beobachtungen die eigentlichen Stützen einer Hypothese bilden. Fehlt die Bestätigung durch Zahlen, so ist jede Hypothese richtig, da keine geprüft werden kann.

# XXI. Kapitel.

## Die magnetischen Erscheinungen an Krystallen.

§. 145. Analog der Elektricität bestehen auch zwei magnetische Zustände, welche ungleichnamig sind und sich gegenseitig anziehen, während gleichnamig magnetische Körper sich gegenseitig abstossen. Der wesentliche Unterschied zwischen beiden Agentien, Elektricität und Magnetismus, beruht aber darin, dass der vom Magnet angezogene Körper nicht wieder abgestossen wird. Man hat daher in früherer Zeit (Coulomb und Poisson) nicht umhin können, auch für den Magnetismns eigene magnetische Fluida zu creiren. Durch die wichtige Entdeckung Ampere's, dass ein elektrisches Solenoid sich einem Magnete gleich verhält, ward zum mindesten ein Zusammenhang zwischen Elektricität und Magnetismus nachgewiesen, der mit zahlreichen wichtigen Entdeckungen die Wissenschaft bereicherte. Man pflegt daher anzunehmen [1], der magnetische Zustand wird dadurch hervorgebracht, dass um die einzelnen materiellen Moleküle elektrische Ströme kreisen.

Ist schon bei einer solchen Erklärung die Möglichkeit schwer verständlich, dass elektrische Ströme iselirt sich um die Theilchen bewegen sollen und fast continuirlich ihre Kraft beibehalten können, so wird es fast unmöglich diese Erklärungsweise der magnetischen Zustände unverändert beizubehalten, wenn man die Hypothese eines imponderablen Aethers fallen lassen muss.

Im Nachfolgenden habe ich versucht, die für die Aufstellung einer Theorie wichtigsten Punkte zu erörtern.

Durch die neuesten Untersuchungen [2] ist erwiesen, dass bei Erregung des Magnetismus, wenn auch in geringer Quantität, Wärme ent-

---

[1] Weber. Abhand. d. sächs. Acad. d. Wissensch. 1852. I. 541. Vergl. Beetz. Pogg. Ann. vol. 111. pag. 107.

[2] Beetz. Pogg. Ann vol. 128. pag. 193.

wickelt wird. Durch diese Wärmeerregung ist sichergestellt, dass auch der Magnetismus auf Bewegung, jedoch von minimaler Wirkung, beruht. Da ferner zwei magnetische Zustände zu unterscheiden sind, wird man nothwendig circulare Bewegungen der Moleküle anzunehmen gezwungen. Da die entstehende Wärme nur im Minimum ist, so entfallen alle grösseren Vibrationen und es wird eine Rotation des Moleküls um seine Axe genügen. Diese Rotationsaxe wird sich für alle magnetischen Theilchen parallel lagern [1]) und es ist somit, analog wie für den umlaufenden Strom in der Ampere'schen Spirale, eine orientirte Linie [2]) der Molekularbewegung vorhanden. Diese magnetische Bewegung besitzt nun das Vermögen, sich durch Strahlung fortzupflanzen und eine Folge hiervon ist die Induction des Magnetismus in hierzu fähigen Körpern. Man kann in dieser Beziehung den Magnetismus mit dem Lichte vergleichen. Während aber die Elektricität, analog der Wärme durch Strahlung und Leitung, sich fortpflanzt, besitzt der Magnetismus, da derselbe auf einer orientirten Rotation des Moleküls beruht, nicht die Fähigkeit sich durch Leitung fortzupflanzen. Eine natürliche Folge hiervon ist, dass die vom Magnet angezogenen Körper bei der Conglomeration nicht identen Magnetismus erhalten und daher nicht abgestossen werden. Die magnetische Anziehung und Abstossung kann vielleicht auf analoge Weise wie die der Elektricität erklärt werden (pag. 377). Zu bemerken ist, dass für eine solche Erklärung der dynamischen Wirkung die wichtigen Beobachtungen sprechen, nach welchen die anziehende oder abstossende Kraft des Magnets auf einen anderen Körper durch das umgebende Mittel geändert werden kann [3]).

Da die magnetische Anziehung schliesslich in den Krystallen nach den drei Dimensionen, also auch nach den axial gelagerten Grundstoffen variirt, so zeigt diess wieder auf die Existenz einfacher molekularer Bewegungen hin.

Da auch die Erde ein um seine Axe rotirendes Molekül im Universum darstellt, so kann sie ebenfalls als ein Magnet betrachtet werden. In der durch sie ausgeübten Induction könnten wir die Quelle des continuirlichen Magnetismus und auch analog dem schon früher Gesagten die Ursache der Massenanziehung suchen. Da der Nordpol der Erde für den ausserhalb desselben befindlichen Beschauer von rechts nach links gegen den Uhrzeiger rotirt, so muss für denjenigen Pol, den wir gewöhnlich

---

[1]) Daher Ausdehnung durch Magnetismus, vergl. Wiedemann Galvanismus. vol. II. 457. Beetz. Pogg Ann. 128. pag. 193.

[2]) Es scheint nur für die magnetischen Zustände nöthig, auf eine orientirte Richtung der Bewegung Rücksicht zu nehmen, während für die elektrische Erscheinung kaum eine constante Richtung der Bewegung anzunehmen nöthig ist.

[3]) Vergl. Faraday. Pogg. Ann. vol. 88. pag. 559. Plücker. Pogg. Ann. vol. 75. 180.

als Nordpol der Magnetnadel bezeichnen, eine Vibration der Moleküle angenommen werden, die rechtsläufig, analog dem Uhrzeiger ist.

Hiermit stimmt auch die Ampere'sche Theorie, nach welcher die Stromrichtung im Nord- und Südpol nebenstehende Lage haben. (Fig. 128.)

Fig. 128.




Eine andere Ursache eines continuirlichen Magnetismus könnte in der Molekularconstitution gesucht werden, welche etwa fähig wäre, die von aussen zufliessende Wärme in magnetische Bewegungen zu versetzen. Diese Hypothese entspräche auch der Thatsache, dass der Magnetismus z. B. des Stahles eine mit Temperatur variable Grösse ist.

Diese Betrachtungen werden genügen, um die allgemeinen Umrisse einer Hypothese erkennen zu lassen, welche auch den Magnetismus frei von allen Imponderabilien nur durch molekulare Bewegung zu erklären versucht.

§. 146. **Induction und Ermittlung der Inductionsconstante.** Die bisherige mathematische Theorie des Magnetismus geht analog wie die der Elektricität von zwei Zuständen aus, welche sich anziehen und abstossen. Es wird bei einer solchen Behandlungsweise nicht die Ursache der gegenseitigen Anziehung in die Berechnung eingezogen, sondern vielmehr die mit der Entfernung variable Anziehung. Die Grösse der magnetischen Kraft wechselt nämlich mit der Lage des inducirenden und inducirten Körpers im magnetischen Felde auf eine bestimmbare Weise. Der Potentialausdruck [1]) für diese magnetische Kraft bestimmt dann ebenfalls nur die Grösse der gegenseitigen Einwirkung als Function der Lage und ohne Rücksicht auf die etwaigen molekularen Veränderungen. Es lässt sich auch wie in der Lehre von der Elektricität die ganze Wirksamkeit des Magneten durch eine auf der Oberfläche vertheilte fictive Ladung ersetzen. Man kann somit auch die Wirkung $\mathfrak{F}$ zweier Magneten abhängig machen von der Flächendichtigkeit $\delta\,\delta'$ der magnetischen Ladungen in den Elementen $ds\,ds'$, also

$$(325) \qquad \mathfrak{F} = \int\int FF' = \int \frac{\delta\, ds\, \delta'\, ds'}{r}$$

wo $r$ die Entfernung der Elemente ist.

Die Distanz $r$ zweier Elemente $PP$ kann aber auch abhängig gedacht werden von der Lage $xyz$ eines Punktes $P$ und von der Distanz $R$ des magnetischen Punktes $P'$ von dem Anfangspunkte der Coordinaten

---

[1]) Vergl. Beer. Einl. in Elektr. u. Magnetismus. Braunschweig. 1865.

und der Richtung $\alpha\beta\gamma$ dieser Distanz $R$ zu den Coordinaten. Entwickelt man $\frac{1}{r}$ und führt die Neigung $\delta$ zwischen der Südnordlinie und der Linie $R$ ein, so erhält man für das Potential des Magnets

$$\mathfrak{F}' = -\frac{Q}{R^2}\cos\delta + \frac{Q}{R^3}\Big((\cos a - 3\cos\alpha\cos\delta)x + (\cos b - 3\cos\beta\cos\delta)y + (\cos c - 3\cos\gamma\cos\delta)z \tag{326}$$

worin $abc$ die Neigung der Südnordlinie gegen die Coordinaten-Axen und $Q$ das magnetische Moment darstellt. Für die Kraft $\mathfrak{K}$, mit welcher der Magnet auf einen Nordpol mit dem magnetischen Quantum Eins einwirkt, findet man hieraus

$$\mathfrak{K} = \frac{Q}{R^3}\sqrt{1 + 3\cos\delta^2} \tag{327}$$

Die durch einen Magnetpol in einem Körper inducirte magnetische Kraft übt jedoch wieder eine inducirende Wirkung auch auf die ausserhalb liegenden Körper aus, so dass wir eine continuirliche Reihe von Inductionen zu betrachten haben[1]).

Die inducirende Wirkung zweier Pole auf einander ist den Quadraten ihrer Distanz verkehrt proportional; wird hingegen nur die Masse als solche betrachtet, so kann die inducirende Kraft verkehrt proportional gesetzt werden den dritten Potenzen der Entfernung der Mittelpunkte von beiden auf einander wirkenden Massen. Sucht man nun jenes Potential für die secundäre inducirende Wirkung zu bestimmen, welche ein von einem Magnetpol inducirter Körper wieder auf in der Distanz $r$ liegenden Punkte $xyz$ ausübt, so kann dasselbe, wenn die Coordinatenaxen durch das inducirende Körperelement gehen, durch

$$\varphi = \frac{Q}{r^3}(xA + yB + yC) \tag{328}$$

bezeichnet werden. $Q$ bedeutet die magnetische Quantität des primär inducirenden Poles, $ABC$ Coefficienten, die von der Lage des letzteren abhängen. Seien nun $x'y'z'$ die Coordinaten und $r'$ die Distanz des primär inducirenden Magnetpols, so können diese Grössen für $ABC$ in die obige Gleichung eingeführt werden, wodurch man successive zur Formel

$$\varphi = -\frac{Q}{r^3 r^3}\left(\frac{xx'}{\mathfrak{a}^2} + \frac{yy'}{\mathfrak{b}^2} + \frac{zz'}{\mathfrak{c}^2}\right) \tag{329}$$

gelangt, worin $\mathfrak{abc}$ nur von der Natur des Körpers selbst abhängende

[1]) Vergl. Green. Crelle Journ. f Mathem. vol. XXXIX, vol. XLIV, vol. XLVII. Thomson. Report. on brit. Assoc. 1848. Phil. Mag. 4 Ser. vol. VIII. Poisson. Mémoir. de l'Acad. des Scienc. Paris. 1821 und 1822.

Coefficienten darstellen. Diese Gleichung kann auch, wenn $\frac{Q}{r^1} = F$ das Potential des inducirenden Poles ist, $x_2 y_2 z_2$ die Coordinate des Körperelements darstellen, ferner $R^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2$ ist, durch die nachstehende Formel präcisirt werden:

$$(330) \quad u = -\left\{\frac{1}{\mathfrak{a}^2}\frac{dF}{dx_2}\frac{d\left(\frac{1}{R}\right)}{dx_2} + \frac{1}{\mathfrak{b}^2}\frac{dF}{dy_2}\frac{d\left(\frac{1}{R}\right)}{dy_2} + \frac{1}{\mathfrak{c}^2}\frac{dF}{dz_2}\frac{d\left(\frac{1}{R}\right)}{dz_2}\right\}$$

In dieser Formel sind $\mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}^2 \mathfrak{c}^2$ nur von der Inductionsfähigkeit des Körperelements abhängig und mit dem letzteren variirend. Ist der Körper isotrop, d. h. nach den drei Coordinatenrichtungen gleich, so wird $\mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}^2 \mathfrak{c}^2$ einander gleich und man kann für letztere die Inductionsconstante $\mathfrak{K}$ einführen, welche in Folge der mehrfachen Inductionen

$$(331) \quad \mathfrak{K} = \frac{4\pi}{3}\frac{1}{\mathfrak{a}^2}$$

gesetzt werden kann. Diese Inductionsconstante wird ihrem Wesen nach zwischen 0 und 1 liegen. Ist $\mathfrak{K} = 0$, so verschwindet jede Induction, ist diese aber der Einheit gleich, so kann die ideale magnetische Oberflächenladung jener elektrischen Ladung als gleich betrachtet werden, welche aufträte, wenn das inducirende Potential von elektrischen Massen herrühre.

Die Kenntniss der Inductionsconstante $\mathfrak{K}$ für Eisen, den die stärkste inducirende Wirkung ausübenden Körper, verdanken wir Barlow[1]), welcher die Wirkung einer eisernen Vollkugel mit jener einer Hohlkugel aus gleichem Material verglich. Barlow bestimmte die Wirkung, welche die aus Eisen verfertigte Vollkugel auf die horizontale Magnetnadel bei verschiedenen Lagen dieser letzteren in Folge der Induction ausübt. Wendete er hingegen eine Hohlkugel von 5 Zoll Radius und $^1/_{30}$ Zoll Dicke an, so erzeugte diese nur $^2/_3$ der Wirkung von einer gleich grossen Vollkugel.

Für das Verhältniss der Potentiale, also auch für das der Wirkungen einer Voll- und Hohlkugel, gilt jedoch

$$(332) \quad \frac{(1 + \mathfrak{K})(1 - q^3)}{1 + \mathfrak{K} - 2\mathfrak{K}^2 q^3}$$

worin $q = \frac{r'}{r}$ das Verhältniss des innern zum äusseren Radius der Hohlkugel bezeichnet. Hieraus erhielt man für Eisen den Werth der Inductionsconstante

[1]) Barlow. Essay on magnetic attractions. 1823.

$$\mathfrak{K}_{Fe} = 0{\cdot}9930.$$

Durch die Ermittlung dieses absoluten Werthes für Eisen erhält man ein Mittel, um durch blosse relative Versuche die Zahlen für die übrigen Stoffe bestimmen zu können.

§. 147. Paramagnetismus und Diamagnetismus. Im Vorhergehenden ward nur der allgemeine Fall betrachtet, dass jeder magnetische Körper die Fähigkeit besitzt, diese seine lebendige Kraft durch Strahlung an entfernte Körper zu übertragen und in letztern ebenfalls Molekularbewegungen von entgegengesetzter Richtung hervorzurufen. Die Folge dieser Induction ist eine Anziehung. Eine Erweiterung der Kenntniss dieser molekularen Induction erfolgte aber 1846 durch Faraday. Dieser wies nach, dass der Magnetpol nicht bloss auf die bisher bekannten magnetischen Körper, sondern vielmehr auf alle Körper inducirend wirke. Bringt man nämlich in die Nähe eines sehr kräftigen Magnetpols beliebige Substanzen, so theilen sich dieselben in zwei Gattungen, solche, welche vom Pole angezogen, oder solche, welche vom Pole abgestossen werden. Man pflegt nach Faraday letztere diamagnetisch, nach Plücker die ersteren, wahrhaft magnetischen Körper paramagnetisch zu nennen.

Es verhalten sich diese beiden Systeme von Körpern entgegengesetzt und Weber[1]) hat nachgewiesen, dass in der That bei diamagnetischen Körpern dem erregenden Nordpol ebenfalls ein Nordpol entgegengesetzt liegt. Während nämlich ein inducirter magnetischer Eisenstab in einem benachbarten Leiter einen bestimmt gerichteten elektrischen Strom durch Induction hervorruft, so ist die Richtung des Stromes, welche ein inducirter diamagnetischer Wismuthstab hervorruft, entgegengesetzt.

Man wird somit sagen müssen, die materiellen Theilchen der Körper besitzen unter Einfluss eines magnetischen Inductors die Fähigkeit, entweder eine Vibration parallel dem empfangenen Impulse, oder eine hiermit entgegengesetzt gerichtete Rotation zu beginnen. Für letztere Körper im Gegensatz zu ersteren wird man eine grössere Coercitivkraft der einzelnen Körpertheilchen annehmen müssen. Nur letztere[2]) erklärt den Vorgang der paramagnetischen Induction, nach welchem jeder von aussen kommende, z. B. rechtsläufige Rotationsimpuls, von dem inducirten Körper aus in Folge der geweckten Coercitivkraft der Theilchen durch eine entgegengesetzte Rotation beantwortet wird, welche letztere nicht bloss genügt, die inducirende Bewegung aufzuheben, sondern selbst noch eine überschüssige entgegengesetzte Kraft erübrigt. Die Aeusserung dieser ge-

[1]) Weber. Pogg. Ann. vol. 73, 241.

[2]) Es stimmt hiermit der Diamagnetismus der leicht verschiebbaren Gasmoleküle.

weckten magnetischen Anziehung und Abstossung ist aber, wie schon früher bemerkt, von dem Mittel abhängig, welches die Substanz umgibt. Sie nimmt ab, wenn die zu inducirende Substanz in einem gleichnamigen Mittel schwebt, hingegen zu, wenn das Mittel ungleichnamig ist. So würde die Abstossung diamagnetischer Substanzen am kräftigsten in einer paramagnetischen Flüssigkeit vor sich gehen. Plücker,[1] dem wir dies Gesetz verdanken, vergleicht es mit dem archimedischen Grundsatze, nach welchem jeder Körper beim Eintauchen in eine Flüssigkeit etwas von seinem Gewichte verliert.

Von den metallischen Grundstoffen haben sich Eisen, Nickel, Kobalt, Chrom, Mangan, Cer, Platin, Aluminium, Palladium, Titan, Kohle, Graphit als magnetisch bewiesen; hingegen als diamagnetisch Wismuth, Antimon, Zink, Zinn, Kadmium, Natrium, Magnesium, Blei, Silber, Kupfer, Gold, Arsen, Wolfram, Silicate, Jod, Phosphor, Schwefel.

Die Erscheinungen des Dia- und Paramagnetismus unterscheiden sich nach dem bisher Gesagten somit nur durch das entgegengesetzte Vorzeichen $\pm$ der Inductionsconstante, welche bei Eisen mit $+ \mathfrak{K}$, bei Wismuth mit $- \mathfrak{K}$ bezeichnet werden muss.

Hierdurch wandelt sich die anziehende Wirkung der paramagnetischen Stoffe in die abstossende eines diamagnetischen Stoffes um. Beachtenswerth ist, dass die diamagnetische Inductionsconstante bedeutend kleiner als die paramagnetische ist und sich der Nulle nähert, eine Thatsache, welche fast die Meinung begünstigt, dass der Diamagnetismus nur die secundäre Wirkung von der magnetischen Differenz der Substanz und des umgebenden Mittels sei.

Ueber die relativen Werthe der Induction von Eisen und dem am stärksten diamagnetischen Wismuth haben wir Versuche von Plücker[2] und Weber[3]. An denselben berechnete Beer[4] unter der Voraussetzung, dass die Inductionsconstante des Eisen $\mathfrak{K}_{Fe} = 0{\cdot}9965$ die diamagnetische Inductionsconstante des Wismuth zu

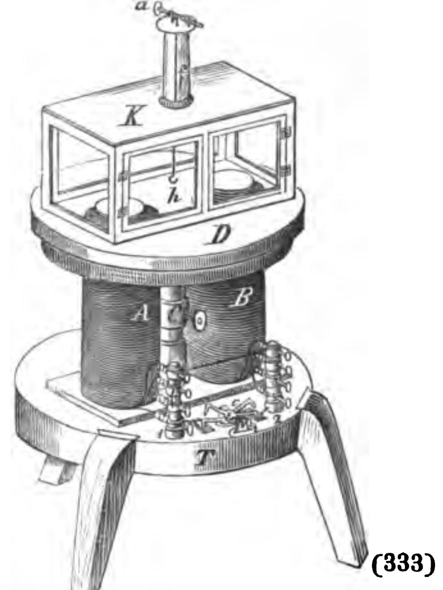
$$\mathfrak{K}_{Bi} = - 0{\cdot}00023.$$

Da Wismuth noch die stärkste diamagnetische Wirkung ausübt und dennoch eine so kleine Inductionsconstante besitzt, so ist es erklärlich, dass man zur Erforschung des diamagnetischen Zustandes einen sehr starken Magneten bedarf. Man bedient sich daher meist (vgl. Fig. 129) des Elektromagneten, d. h. der Kraft jenes Magnetismus, welche ein um einen Eisenstab circulirender elektrischer Strom in demselben inducirt. Die

[1] Plücker. Pogg. Ann. vol. 77. pag. 578.
[2] Plücker. Pogg. Ann. vol. 91. pag. 1.
[3] Weber. Diamagnetische Massbestimmung. Abh. d. sächs. Gesells. d. Wissens. I.
[4] Beer. Elekt. u. Magnet. 1865. pag. 211.

prüfenden Substanzen werden sodann in einem papiernen Schiffchen oder nur in einer Schlinge *h* (vgl. Fig. 129) an einem Coconfaden aufgehangen und zwischen die Pole gebracht. Haben sie Stangenform, so nimmt die Längenaxe bei paramagnetischen die axiale (vgl. Fig 127), bei diamagnetischen hingegen die äquatoriale Lage an. Prüft man bloss Kugeln (Fig. 130), so werden die diamagnetischen von den naheliegenden Magnetpolen abgestossen.

Fig. 129.

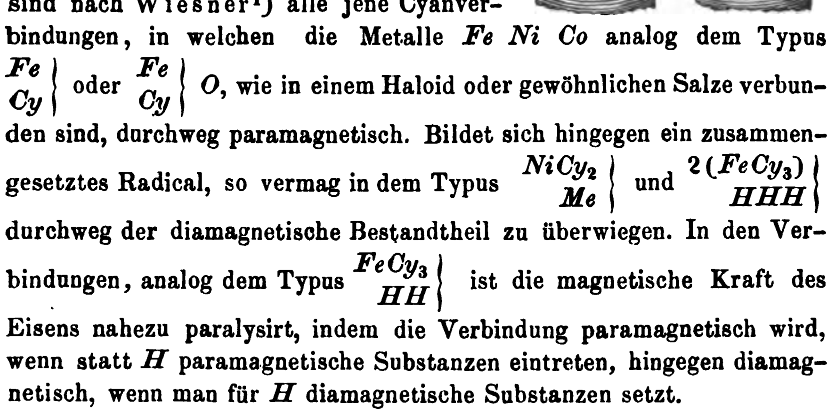



Der magnetische Charakter der Grundstoffe geht im Allgemeinen auf deren Verbindungen über. Der totale magnetische Charakter einer Verbindung hängt somit ab von der Summe para- oder diamagnetischer Kräfte der in ihr auftretenden Bestandtheile. Ist somit das Vorzeichen der Summe

$$S = + \pi_a - \delta_b + \pi_c - \dots \qquad (333)$$

positiv oder negativ, so wird auch dem entsprechend der magnetische Charakter der Verbindung para- oder diamagnetisch sein.

Fig. 130.



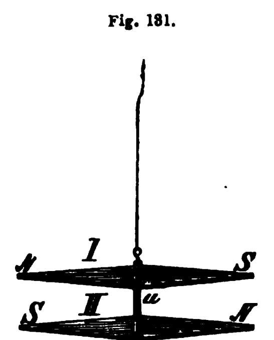
Es stimmt hiermit überein, dass einige Cyanverbindungen von magnetischen Stoffen auch diamagnetisch erscheinen. So sind nach Wiesner[1]) alle jene Cyanverbindungen, in welchen die Metalle *Fe Ni Co* analog dem Typus $\left.\begin{matrix}Fe\\Cy\end{matrix}\right\}$ oder $\left.\begin{matrix}Fe\\Cy\end{matrix}\right\}O$, wie in einem Haloid oder gewöhnlichen Salze verbunden sind, durchweg paramagnetisch. Bildet sich hingegen ein zusammengesetztes Radical, so vermag in dem Typus $\left.\begin{matrix}NiCy_2\\Me\end{matrix}\right\}$ und $\left.\begin{matrix}2(FeCy_3)\\HHH\end{matrix}\right\}$ durchweg der diamagnetische Bestandtheil zu überwiegen. In den Verbindungen, analog dem Typus $\left.\begin{matrix}FeCy_3\\HH\end{matrix}\right\}$ ist die magnetische Kraft des Eisens nahezu paralysirt, indem die Verbindung paramagnetisch wird, wenn statt *H* paramagnetische Substanzen eintreten, hingegen diamagnetisch, wenn man für *H* diamagnetische Substanzen setzt.

[1]) Wiesner. Sitzungsb. d. Wien. Acad, 1862. vol. 46. pag. 175.

**§. 148. Magnetische Polarität in Mineralien. Axial verschiedene Induction in Krystallen und homogenen comprimirten Körpern.** Die im vorhergehenden Paragraphe angedeutete Abhängigkeit des magnetischen Charakters von den Bestandtheilen der Verbindung erlaubt, denselben als ein mineralogisches Merkmal zu verwenden. So prüfte namentlich Haüy[1]) zahlreiche eisenhaltende Substanzen auf ihren Magnetismus, und machte bereits aufmerksam, dass der Magnetismus des Granat und Chrysolith sie von den übrigen eisenhaltigen Edelsteinen unterscheide.

Zur Erkennung von so schwachen Spuren von Magnetismus wird man eine sehr empfindliche Magnetnadel wählen müssen. Haüy wendet eine Magnetnadel an, welche durch einen vorgelegten Magnet bereits aus ihrer Ruhelage um 90° abgelenkt war, wo dann der geringste äussere magnetische Einfluss wirksam ward. Am zweckmässigsten wird jedoch die Anwendung einer Combination zweier gegen einander verwendeter Magnetnadeln sein, die als astatische Nadel (Fig. 131) bekannt ist.

Fig. 131.




Manche der in der Natur vorkommenden Minerale sind nicht bloss paramagnetisch, sondern vielmehr selbst polarmagnetisch. In ihnen ist nämlich die Fähigkeit vorhanden, dass die in Folge der Einwirkung des Erdmagnetismus rotirenden Moleküle parallele Rotationsaxen besitzen. Die Endpunkte dieses der Rotationsaxe parallelen Durchmessers des Mineralstücks werden als magnetische Pole bezeichnet. Nach den Untersuchungen von Delesse und Greiss[2]) steht jedoch die Lage der bei octaedrischem Magneteisenstein auftretenden Pole in keiner Beziehung zu den krystallographischen Dimensionen.

Dieser Satz hat wohl bei den tesseralen Krystallen sicher seine Richtigkeit, indem für dieselbe die Stärke der magnetischen Induction nach allen Richtungen hin gleich bleiben muss. Für nicht homogene Körper wird hingegen sicher die Lage der Pole von der Austheilung der Masse abhängen und die stärkste magnetische Axe jedenfalls mit jener Rotationsaxe der Moleküle zusammenfallen, bezüglich welcher die durch Induction gewonnene lebendige Kraft das mögliche Maximum erreicht.

Hiermit stimmen die Beobachtungen von Knoblauch und Tyndall[3]) an künstlich comprimirten, homogenen Substanzen überein.

[1]) Haüy. Traité de Minéralogie. vol. IV. 1800.
[2]) Delesse. An. de chim. 1849. vol. 25, 194. An. de mines. vol. 14. vol. 15. vol. 26. pag. 148. Greiss. Pogg. Ann. vol. 98. pag. 3.
[3]) Knoblauch und Tyndall. Pogg. Ann. vol. 81. pag. 481, 498, vol, 83, 397.

Während nämlich die Lage einer kreisförmigen Scheibe aus einem homogenen Körper, zwischen die Magnetpole gebracht, in jeder beliebigen Lage in Ruhe verbleibt, so wird hingegen eine Scheibe aus einem comprimirten Körper, dessen Compressionsaxe in der Ebene der Scheibe liegt, immer eine constante Lage annehmen. Die Scheibe dreht sich, wenn sie frei beweglich aufgehangen ist, und nimmt eine solche Stellung ein, dass die Compressionsaxe bei den paramagnetischen Körpern eine axiale, bei den diamagnetischen eine äquatoriale Lage annimmt (vergl. pag. 395). Es fällt somit die Richtung der grössten magnetischen Action mit der Richtung der grössten Dichtigkeit zusammen.

Bereits hieraus ersieht man, dass in Folge der axial verschiedenen Dichte die magnetische Induction in verschiedenen Krystallen axial verschiedene Werthe besitzen muss. Hierzu kommt noch weiter der Umstand, dass man für Krystalle in Folge der Axiallagerung der verschiedenen Grundstoffe, welche verschiedenes magnetisches Moment besitzen, auch hierin eine Ursache der axial verschiedenen Induction suchen muss.

Die Grösse der axialen magnetischeu Induction lässt sich durch die Richtung (analog oben) bestimmen, welche ein aus dem Krystall parallel den Coordinatenebenen geschnittener Würfel einnimmt. Hängt man nämlich denselben zwischen die beiden Pole, so dass die Krystallaxe *a* parallel der Aufhängeaxe, hingegen *b* und *c* in der horizontalen Ebene zwischen den Polen liegen, so wird sich je nach der Stärke der Induction nach *b* oder *c*, entweder *b* oder *c* axial stellen (vergl. pag. 395).

Die stärkere Induction spricht sich bei paramagnetischen entsprechend der Anziehung durch eine axiale, hingegen bei diamagnetischen durch eine äquatoriale Stellung aus. Führt man daher wie bei den übrigen Erscheinungen Schemata ein, so bezeichnet dann das Schema $\varkappa$ (bca) einen paramagnetischen Krystall, der sowohl nach der Krystallaxe *a* als *b* aufgehängt, immer die Krystallaxe *c* axial einstellt. Wäre das Schema $\delta$ (bca), so wäre die Lage der Krystallaxe *c* äquatorial. Die Orientirung dieser magnetischen Induction wurde schon an zahlreichen Krystallen durchgeführt und man verdankt die gewonnenen Resultate Plücker [1]), Knoblauch und Tyndall [2]), Grailich und Lang [3]).

Ist durch solche Versuche auch die axiale verschiedene Qualität der Induction sichergestellt, so erübrigt auch die Bestimmung der absoluten Intensität derselben.

---

[1]) Plücker. Pogg. Ann. vol. 72. pag, 315. vol. 76. pag. 576. vol. 77. 447. vol. 86, 1. Plücker und Beer. Pogg. Ann. vol. 81, 115. vol. 82, 42.

[2]) Knoblauch und Tyndall. Pogg, Ann. vol. 79. pag. 232. vol. 81, 481. Tyndall. Pogg. Ann. vol. 83, 384.

[3]) Grailich und Lang. Sitzungsb. d. Wien. Acad. 1858. vol. X XXII. 43.

Plücker [1]) hat dieselben auf zwei Methoden angestrebt. Erstens indem er eine aus einem Krystall geschnittene Kugel zwischen den Magnetpolen schwingen liess, auf welche Versuche im nächstfolgenden Paragraphe zurückgekommen wird; zweitens durch die Bestimmung der sogenannten magnetischen Axen.

Da nämlich der magnetischen Induction analog den Lichterscheinungen ein Ellipsoid der Kraftwirkung mit verschiedenen, der Intensität der Induction proportionalen Axen zu Grunde gelegt werden kann, so ist leicht ersichtlich, dass es (vergl. Fig. 132) auch in der Curve *ac* einen Punkt geben muss, dessen Diameter der Axe *b* gleich sein muss. Es muss daher in jedem Krystalle zwei Flächen geben, so dass eine parallel denselben aus dem Krystall kreisrund geschnittene Platte allseits gleiche Induction erhält und daher zwischen dem Magnetpole keine orientirte Lage annimmt. Die Normalen auf diese magnetischen Hauptschnitte sind die magnetischen Axen $V_m$ $V_m$. So hat Plücker durch Versuche (Fig. 133) die Lage dieser Axen an Kaliumeisencyanid (rothem Blutlaugensalz), dessen Krystall-Parameterverhältniss $a : b : c = 1 : 0·77 : 0·62$ ist, nachgewiesen. Das Schema der Substanz ist ϰ (abc) und die magnetischen Axen $V_m$ $V_m$ liegen in der Ebene *ac* und bilden mit der Krystallaxe *c* einen Winkel von 20⁰. Will man die Lage dieser den spitzen Winkel der magnetischen Axen halbirenden Mittellinie angeben, so schlage ich eine analoge Bezeichnung wie für die optische Mittellinie vor. Im obigen Falle, wo die Axe der

Fig. 132.

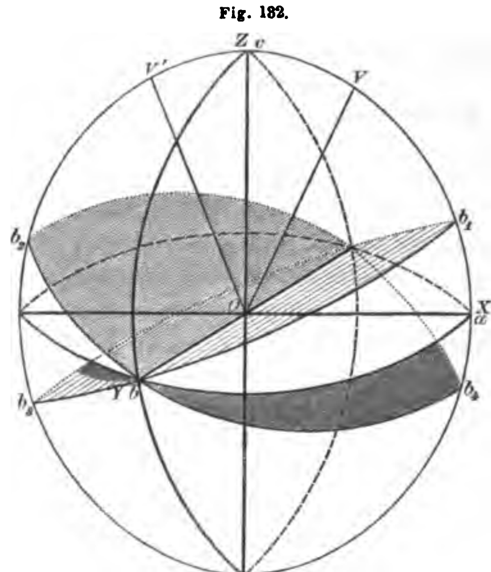
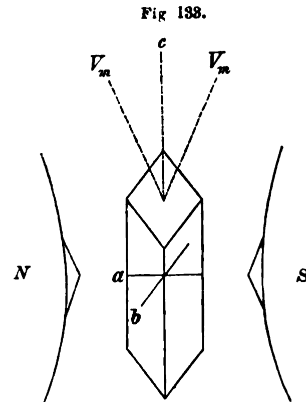



Fig. 133.




[1]) Plücker. Philos. Transact. 1858. pag. 543.

kleinsten Wirkung die erste magnetische Mittellinie ist, wäre somit[1]) das Schema $\pi\,(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})$.

§. 149. Induction in einem homogenen ellipsoidischen Körper. Schwingungsversuche. Im vorhergehenden Paragraphe haben wir erkannt, dass den Krystallen in Folge ihrer axial ungleichen Structur auch eine axial verschiedene Induction zukommt. Wir verdanken den Untersuchungen Plücker's[2]) die Methoden, welche auch die absoluten Werthe dieser axialen Induction angeben. Diese Methoden stützen sich auf die Analogien, welche zwischen dem Verhalten eines homogenen Ellipsoides und einer anisophanen Kugel zwischen den Magnetpolen besteht.

Es sind daher vorerst die Erscheinungen, welche ein Ellipsoid aus einem homogenen, stark inducirten Körper darbietet, zu untersuchen. Ist ein paramagnetisches Ellipsoid frei beweglich zwischen zwei Magnetpolen aufgehangen, so wird sich dasselbe so zu stellen suchen, dass die grössere Axe in die Verbindungslinie beider Pole zu liegen kommt. Wird durch eine äussere drehende Kraft das Ellipsoid aus der Ruhelage gebracht, so wird in Folge der combinatorischen Wirkung dieser drehenden Kraft und der von den Magnetpolen ausgeübten Anziehung, das Ellipsoid erst nach einer Reihe von Schwingungen zur Ruhe kommen. Die Anzahl dieser Schwingungen und deren Dauer wird von der Stärke der Induction abhängen.

Aus der Theorie des Potentials kann man aber entnehmen, dass die magnetische Induction analog jener der Elektricität, ebenfalls durch eine Fläche zweiter Ordnung ausdrückbar sein wird. Sei somit das körperliche Ellipsoid $E$ mit den Axen $abc$ der inducirenden Wirkung einer magnetischen Kraft ausgesetzt, welche mit den Richtungen $abc$ die Winkel $\lambda\mu\nu$ bildet, so lassen sich die magnetischen Verhältnisse mittelst eines Hilfsellipsoides $\mathfrak{E}$, dessen Axen $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ sind, ausdrücken, wenn man

$$\frac{1}{\mathfrak{a}^2}=\frac{A}{a}+\frac{4\pi(1-\mathfrak{K})}{\mathfrak{K}}\quad \frac{1}{\mathfrak{b}^2}=\frac{B}{b}+\frac{4\pi(1-\mathfrak{K})}{\mathfrak{K}}\quad \frac{1}{\mathfrak{c}^2}=\frac{C}{c}+\frac{4\pi(1-\mathfrak{K})}{\mathfrak{K}} \tag{334}$$

setzt, worin $ABC$ die Anziehungen der Masseneinheit in den Scheiteln des Ellipsoides bedeuten soll. Nimmt man an, dass $a > b > c$, so wird $\mathfrak{a} > \mathfrak{b} > \mathfrak{c}$.

Analog dem optischen Elasticitätsellipsoid wird man aber auch bei diesem Inductionsellipsoid Kreisschnitte voraussetzen müssen, in welchen die inducirende Wirkung der mittleren Axe des Ellipsoids gleich

[1]) Plücker hat wohl die entgegengesetzte Bezeichnung ohne Rücksicht auf deren Zweckmässigkeit gewählt.

[2]) Plücker, Philosoph. Transact. for 1858. vol. 148. Part. II. pag. 543. London.

ist. Man wird diese ausgezeichneten Ebenen in die Untersuchung einführen müssen, und die auf denselben senkrechten Linien werden analog dem optischen Gebrauche mit dem Worte magnetische Axen zu bezeichnen sein. (Vergl. §. 148.) Es hängt die Lage dieser magnetischen Axen $V_m V_m$ (Fig. 132) aber nur von der Grösse der Inductionsconstanten $(\mathfrak{abc})$ ab, indem sich der halbe Winkel dieser magnetischen Axen berechnen lässt nach

$$\sin^2 \frac{V_m V_m}{2} = \frac{\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{c}^2}{\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{c}^2} \qquad \text{tang}^2 \frac{V_m V_m}{2} = \frac{\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{c}^2}{\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{c}^2} \tag{335}$$

Ebenso erhellt, dass für jeden anderen elliptischen Durchschnitt des Inductionsellipsoides $\mathfrak{E}$ die Gleichung gelten wird

$$(\mathfrak{a}_o^2 - \mathfrak{b}_o^2) = (\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{c}^2) \sin \psi \sin \psi' \tag{336}$$

worin $\psi\ \psi'$ die Winkel der Normale eines elliptischen Durchschnittes zu den zwei magnetischen Axen und $\mathfrak{a}_o\ \mathfrak{b}_o$ die zwei Axen des Durchschnittes selbst sind.

Ist nun das Körperellipsoid $E$ der Einwirkung einer entfernten magnetischen Kraft $\varphi$ unterworfen, so wird eine Drehung desselben eintreten, dessen Moment dargestellt werden kann durch

$$\frac{2\varphi \sin \xi}{pr} = \frac{2\varphi \,\text{tang}\, \xi}{r^2} \tag{337}$$

In dieser Gleichung bedeutet $r$ den Radius des Ellipsoides und $p$ den vom Mittelpunkte des Ellipsoides auf jene Tangentialebene gezogenen Perpendikel, welche den Endpunkt des Radius tangirt.

$\xi$ ist der Winkel zwischen Radius und Perpendikel und lässt sich darstellen durch

$$\begin{aligned}\text{tang}^2 \xi &= [(\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2)\, xy]^2 + [(\mathfrak{a}^2-\mathfrak{c}^2)\, xz]^2 + [(\mathfrak{b}^2-\mathfrak{c}^2)\, yz]^2 \\ &= (\mathfrak{a}^2-\mathfrak{c}^2)^2 \left[x^2 y^2 \cos^2 \frac{V_m V_m}{2} + x^2 z^2 + y^2 z^2 \sin^2 \frac{V_m V_m}{2}\right]\end{aligned}$$

daher

$$\left(\frac{\text{tang}\, \xi}{r^2}\right)^2 = \tfrac{1}{4} (\mathfrak{a}^2-\mathfrak{c}^2)^2 \left[\sin^2 2\mu + \sin^2 \frac{V_m V_m}{2} (\sin^2 2\varrho - \sin^2 2\mu)\right] \tag{338}$$

worin $\mu\nu\varrho$ die Winkel von $r$ zu den Coordinatenaxen bedeuten.

Fällt somit die Richtung von $r$ mit einem der Hauptschnitte des Ellipsoides zusammen, so hat man als Moment

$$\varphi\, (\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2) \sin 2\mu; \qquad \varphi\, (\mathfrak{a}^2-\mathfrak{c}^2) \sin 2\nu; \qquad \varphi\, (\mathfrak{b}^2-\mathfrak{c}^2) \sin 2\varrho. \tag{339}$$

Nach diesen Erörterungen lassen sich auch die unendlich kleinen Oscillationen und Verschiebungen um den Winkel $\vartheta$ aus der Gleichgewichtslage berechnen; denn für eine beliebige Aufhängaxe wird, wenn

wir wie oben unter $\mathfrak{a}_o\ \mathfrak{b}_o$ die Axen des in das magnetische Feld fallenden elliptischen Durchschnittes verstehen, das Rotationsmoment

$$\varphi\,(\mathfrak{a}_o^2 - \mathfrak{b}_o^2)\ 2\vartheta \tag{340}$$

Nennt man nun die influirte Masse des Körperellipsoides $P$, so wird mit Bezug auf eine vertikale Aufhängaxe $PK^2$ das Trägheitsmoment des Ellipsoides bezeichnen. Wir erhalten dann

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{2\varphi\,(\mathfrak{a}_o - \mathfrak{b}_o)}{PK^2}\,\vartheta$$

Hieraus folgt für die Zeit einer Oscillation

$$\Theta^2 = \frac{PK^2\pi^2}{2\varphi\,(\mathfrak{a}_o^2 - \mathfrak{b}_o^2)} \tag{341}$$

Wird das Ellipsoid nach einer der drei Hauptaxen $abc$ aufgehangen, so sind auch in der vorhergehenden Formel die Axen $\mathfrak{abc}$ der Hauptschnitte des Ellipsoides $\mathfrak{E}$ einzuführen und ferner wird statt $K^2$ zu setzen sein

$$K_a^2 = {}^1/_5\,(b^2 + c^2) \qquad K_b^2 = {}^1/_5\,(a^2 + c^2) \qquad K_c^2 = {}^1/_5\,(a^2 + b^2) \tag{342}$$

Man erhält also schliesslich für die Oscillationsdauer, wenn die Aufhängeaxen parallel $abc$ sind

$$\begin{aligned} \Theta_a^2 &= {}^1/_{10}\,\pi^2\,\frac{P}{\varphi}\,\frac{b^2+c^2}{\mathfrak{b}^2-\mathfrak{c}^2} & \qquad \frac{\Theta_b^2}{\Theta_c^2} &= \frac{a^2+c^2}{a^2+b^2}\cos^2\frac{V_m V_m}{2} \\ \Theta_b^2 &= {}^1/_{10}\,\pi^2\,\frac{P}{\varphi}\,\frac{a^2+c^2}{\mathfrak{a}^2-\mathfrak{c}^2} & \qquad \frac{\Theta_b^2}{\Theta_a^2} &= \frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}\sin^2\frac{V_m V_m}{2} \\ \Theta_c^2 &= {}^1/_{10}\,\pi^2\,\frac{P}{\varphi}\,\frac{a^2+b^2}{\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2} & \qquad \frac{\Theta_a^2}{\Theta_a^2} &= \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}\,\mathrm{tang}^2\frac{V_m V_m}{2} \end{aligned} \tag{343}$$

und schliesslich

$$\frac{a^2+b^2}{\Theta_c^2} + \frac{b^2+c^2}{\Theta_a^2} = \frac{a^2+c^2}{\Theta_b^2} \tag{344}$$

Die Richtigkeit dieser Formeln hat Plücker durch Versuche an einem Ellipsoide aus Eisen geprüft, dessen Axen die Werthe hatten

$$a^2 = 4^{\mathrm{cm.}} \qquad b^2 = 1{\cdot}6^{\mathrm{cm.}} \qquad c^2 = 1^{\mathrm{cm.}}$$

und wofür er die Oscillationsdauer bestimmte.

$$\Theta_a = 13{\cdot}350 \qquad \Theta_b = 9{\cdot}407 \qquad \Theta_c = 11{\cdot}411$$

Diese Zahlen stimmen annähernd mit den obigen Formeln.

§. 150. Die axialverschiedene Induction in Krystallen. Die im Vorhergehenden gewonnenen und geprüften Formeln bieten nun auch die Möglichkeit, die magnetische Induction quantitativ sicher zu stellen, welche auf eine aus einem Krystalle geschnittene Kugel von zwei Magnetpolen ausgeübt wird. Während nämlich bei einem homoge-

nen Ellipsoide die Induction nur darum axial verschieden ist, weil die Körpermasse ungleich vertheilt ist, so ist bei den Krystallen, selbst wenn sie in Kugelform zwischen die Magnetpole gebracht werden, ebenfalls eine axialungleiche Induction vorhanden, weil ja dann den gleichen Radien der Kugel nicht gleiche Massen Moleküle entsprechen.

Man kann somit auch die Krystallkugel einem homogenen Ellipsoids analog betrachten, welchen Weg auch Plücker l. c. eingeschlagen hat [1]).

Nimmt man an, dass der Krystall aus einer grossen Zahl unendlich kleiner Ellipsoide besteht, so wird jedem dieser letzteren das Rotationsmoment

$$\frac{2 \operatorname{tang} \xi \, d\varphi}{r^2}$$

zukommen, wo $\xi$, $r$ durch das Inductionsellipsoid bestimmt sind. Das gesammte Rotationsmoment ist dann

$$2\int \frac{\operatorname{tang} \xi \, d\varphi}{r^2} \tag{345}$$

ausgedehnt auf die ganze Masse des Krystalls.

Da man nun analog unseren Ansichten von der Krystallbildung annehmen muss, dass die Krystallpartikelchen ähnlich und gleicher Form sind, so wird $\xi$ und $r$ constant, wenn das resultirende Moment ebenfalls durch

$$\frac{2\varphi \operatorname{tang} \xi}{r^2}$$

ausgedrückt wird. Es ist diess dieselbe Gleichung, welche auch für ein homogenes Ellipsoid gilt. Wir erhalten also die analogen Gleichungen des vorhergehenden Paragraphes, wenn wir statt der Axen $abc$ des Ellipsoids $E$ die für die Krystallkugel geltenden Werthe einführt.

Das Trägheitsmoment, bezogen auf eine vertikale Drehungsaxe der Kugel, ist aber

$$K = {}^2/_5 PR^2$$

worin $P$ die Masse und $R$ den Radius der Kugel darstellt. Man erhält dann statt der Gleichungen

$$\begin{aligned} \Theta_a^2 &= {}^1/_5 \pi^2 \frac{P}{\varphi} \frac{R^2}{\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{c}^2} & \qquad \frac{\Theta_b}{\Theta_c} &= \cos \frac{V_m V_m}{2} \\ \Theta_b^2 &= {}^1/_5 \pi^2 \frac{P}{\varphi} \frac{R^2}{\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{c}^2} & \qquad \frac{\Theta_b}{\Theta_a} &= \sin \frac{V_m V_m}{2} \\ \Theta_c^2 &= {}^1/_5 \pi^2 \frac{P}{\varphi} \frac{R^2}{\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2} & \qquad \frac{\Theta_c}{\Theta_a} &= \operatorname{tang} \frac{V_m V_m}{2} \end{aligned} \tag{346}$$

[1]) Vergl. Thomson, Philosoph. Magazin. 1851. IV. Ser. vol. I. pag 177.

woraus folgt

$$\frac{1}{\Theta_a^2} + \frac{1}{\Theta_c^2} = \frac{1}{\Theta_b^2} \tag{347}$$

Diese Gleichungen ermöglichen daher, wenn man aus dem zu untersuchenden Stoffe eine Kugel schneidet und zwischen den Magnetpolen schwingen lässt, aus den Schwingungszahlen die Grösse der axialen Induction, so wie den Winkel der beiden magnetischen Axen zu berechnen.

Plücker wendete diese Gleichungen zur Untersuchung einer Kugel von ameisensaurem Kupferoxydul an, deren Durchmesser 1 Centimeter betrug. Diese Substanz krystallisirt monoklinisch und ist paramagnetisch. Zwischen den Magnetpolen zeigt sich, dass die Axe der grössten oder kleinsten Induction in der Symmetrieebene liegt und die Axe der Symmetrie mit der mittleren paramagnetischen Induction zusammenfällt.

Plücker wendete nun, um die Schwingungszahlen zu ermitteln, einen Elektromagnet an, dessen Pole 4 Centimeter entfernt waren und und hing in deren Mitte mittelst Conconfäden die Krystallkugel successive nach der Richtung $\pi(\mathfrak{a})$, $\pi(\mathfrak{b})$, $\pi(\mathfrak{c})$ auf und fand folgende Werthe der Schwingungsdauer

$$\Theta_a = {}^1/_{23} \qquad \Theta_b = {}^1/_{53} \qquad \Theta_c = {}^1/_{49}$$

Diese Zahlen entsprechen nahezu dem Gesetze, denn es ist

$$\frac{1}{\Theta_a^2} + \frac{1}{\Theta_c^2} = 2918 \qquad \frac{1}{\Theta_c^2} = 2809$$

Weiter berechnet sich der Winkel der magnetischen Axen aus diesen Werthen zu $V_m V_m = 50^0$. Diesen Winkel hat Plücker auch durch die Beobachtung verificirt; denn wenn er eine solche Aufhängenlage der paramagnetischen Kugel wählte, dass die Aufhängeaxe parallel einer dieser magnetischen Axen $V_m$, also einer der Kreisschnitte des Inductionsellipsoids $\mathfrak{E}$ horizontal war, so ward keine axial ungleiche Einwirkung bemerkbar und die Kugel bleibt an jedem Punkte dieses Kreisschnittes im labilen Gleichgewichte.

Ausser diesen von Plücker abgeleiteten Werthen genügen die obigen Gleichungen auch, um die relativen Werthe der axialen Induction zu bestimmen. Wohl muss man in dieser Beziehung absehen, die absoluten Werthe der Induction aus diesen drei Schwingungszahlen abzuleiten; doch setzt man den kleinsten Inductionscoefficienten $\mathfrak{c}_\pi$ der Einheit gleich, so werden sich die übrigen Coefficienten aus den Schwingungszahlen ableiten lassen.

Es ist dann $\Theta_a^2 = C \frac{1}{\mathfrak{b}^2 - 1} \qquad \Theta_b^2 = C \frac{1}{\mathfrak{a}^2 - 1}$

(348) oder $\mathfrak{b}^2 = C'\left(1 + \frac{1}{\Theta_a^2}\right) \quad \mathfrak{a}^2 = C'\left(1 + \frac{1}{\Theta_b^2}\right) \quad \mathfrak{c} = C'$

daher im vorliegenden Falle

$$\mathfrak{a}^2 = 1 + 53^2 \qquad \mathfrak{b}^2 = 1 + 23^2 \qquad \mathfrak{c} = 1$$

Man könnte daher annähernd für die relative Grösse der paramagnetischen Axen des ameisensauren Kupferoxyduls das Schema annehmen

$$\mathfrak{a}_\pi : \mathfrak{b}_\pi : \mathfrak{c}_\pi = 53 : 23 : 1$$

und der hieraus gerechnete Axenwinkel $49^0$ stimmt mit dem von Plücker gefundenen überein. Es erhellt weiter, dass die Mittellinie des spitzigen Winkels der magnetischen Axen mit der Axe $\pi(\mathfrak{a})$ der grössten paramagnetischen Induction zusammenfällt. Wählt man analog dem optischen Schema auch für die erste Mittellinie der magnetischen Axen die Bezeichnung $\underline{\mathfrak{a}}$ oder $\underset{\smile}{\mathfrak{c}}$, so muss das magnetische Schema [1]) des ameisensauren Kupferoxyduls dann sein $\pi(100\ \mathfrak{b}\underline{\mathfrak{a}}) = x^0$.

Bei dieser Methode erhält man die relativen Werthe der axialen Induction, jedoch nur auf ein relatives Maass (die kleinste Wirkung) und nicht auf ein absolutes Maass bezogen. Analog wie bei dem optischen Phänomen, so wird es sich auch jetzt bei der Fortsetzung dieser Versuche darum handeln, die wahren „mittleren" paramagnetischen Momente zu gewinnen. Es wird diess nur durch den Vergleich der Schwingungszahlen von schwingenden Kugeln, geschnitten aus den zu vergleichenden Substanzen, möglich sein. Solche Schwingungen geben sowohl die Verhältnisse

(349) $$\frac{\mathfrak{a}_\pi}{\mathfrak{c}_\pi} : \frac{\mathfrak{b}_\pi}{\mathfrak{c}_\pi} : 1 \qquad \frac{'\mathfrak{a}_\pi}{'\mathfrak{c}_\pi} : \frac{'\mathfrak{b}_\pi}{'\mathfrak{c}_\pi} : 1$$

als auch die Differenzen

$$\mathfrak{a}^2_\pi - \mathfrak{b}^2_\pi \quad \text{und} \quad '\mathfrak{a}^2_\pi - '\mathfrak{b}^2_\pi$$

wodurch man die relative Grösse der Induction in beiden Substanzen bestimmen kann. Es fällt diese letztere Aufgabe mit der Bestimmung des absoluten Werthes der Inductionsconstante zusammen.

§. 151. Die Beziehungen der magnetischen Induction zu den übrigen morphologischen und physikalischen Eigenschaften der Krystalle.

Durch die Beobachtungen Knoblauch's und Tyndall's ist sichergestellt, dass die magnetische Induction in comprimirten homogenen

---

[1]) Das optische Schema des ameisensauren Kupferoxyduls ist ebenfalls $\{(100)\ \mathfrak{b}\underline{\mathfrak{a}} = 62^0\}$ und der Winkel der scheinbaren Axen $EE' = 54-55^0$.

Körpers die grösste Kraft in der Richtung der grössten Dichtigkeit entwickelt. Würde diese Beobachtung sich unmittelbar auf die Krystalle übertragen lassen und die magnetische Induction in Folge dessen nur mehr eine Funktion der Dichte sein, so würde sich aus den bisher bekannten Daten die magnetische Orientirung leicht ableiten lassen. Wir wissen nämlich aus der Molekulartheorie des Lichtes, dass die Fortpflanzung der letzteren als eine Funktion der Dichte angesehen werden kann und dass sich daher aus den optischen Beobachtungen mit Leichtigkeit die axiale Dichte des Krystalls nach dem Grundsatze ergibt

$$(D_{\mathfrak{a}} < D_{\mathfrak{b}} < D_{\mathfrak{c}}) \qquad (\mathfrak{a} > \mathfrak{b} > \mathfrak{c}) \tag{350}$$

Wäre somit die magnetische Induction ebenfalls eine einfache Function der Dichte, ohne Abhängigkeit von Aequivalent oder sonstigen magnetischen Inductionsvermögen, so müsste somit das magnetische Schema unmittelbar aus dem optischen ableitbar sein und der grössten optischen Elasticitätsaxe die kleinste magnetische Induction entsprechen.

Für einzelne Medien stimmen auch diese beiden Schemata überein. So fällt für nachfolgende Substanzen die grösste, gleichgiltig ob para- oder diamagnetische Induction mit der kleinsten optischen Elasticitätsaxe, also grössten axialen Dichte zusammen. Turmalin, Beryll, Idocras haben die optischen und magnetischen Schemata $\{\mathfrak{cc}\underline{\mathfrak{a}}\}$ und $\varkappa\,(\mathfrak{aac})$, Honigstein $\{\mathfrak{cc}\underline{\mathfrak{a}}\}$ und $\delta\,(\mathfrak{aac})$.

Doch diese Uebereinstimmung bewährt sich nicht allgemein und es fällt selbst die grösste Elasticitätsaxe d. i. kleinste Dichte bei mehreren einaxigen Krystallen mit der stärksten magnetischen Induction zusammen. So hat Calcit die Schemata $\{\mathfrak{cc}\underline{\mathfrak{a}}\}$ und $\delta\,(\mathfrak{cca})$ und Zirkon $\delta\,(\mathfrak{aac})$ und {aaç}.

Diese Nichtübereinstimmung zeigt sich auch bei den optisch zweiaxigen Medien und vergleicht man einige Mineralien nach den optischen und magnetischen Beobachtungen von **Grailich** und **Lang**, so kann man nachfolgende wichtige[1]) Fälle hervorheben.

| | | |
|---|---|---|
| Baryt, Coelestin . . | $\delta\,(\mathfrak{bca})$ | {abç} |
| Arragonit, Salpeter | $\delta\,(\mathfrak{cba})$ | $\{\mathfrak{cb}\underline{\mathfrak{a}}\}$ |
| Kaliumeisencyanid | $\varkappa\,(\mathfrak{abc})$ | {abç} |

Während die erste Gruppe annähernd das Gesetz der Proportionalität mit der Dichte befolgt, zeigen die beiden nachfolgenden Gruppen hingegen eine auffallende Uebereinstimmung der magnetischen und optischen Orientirung. Diese Uebereinstimmung der letztern ist um so auffallen-

[1]) Ich erwähne, dass für die hier und nachfolgend angeführten Fällen nach pag. 288 das Verhältniss der Krystallaxen dem Satze $a > b > c$ entspricht und $\underline{\mathfrak{a}}$ oder ç der Axe $c$ parallel ist.

der als auch der Werth des magnetischen Axenwinkels $V_m V_m = 40^0$ mit dem Werthe des inneren Winkels der optischen Axen stimmt, den ich [1]) zu $44^0$—$49^0$ angegeben habe. Auch das im vorhergehenden Paragraphe besprochene monoklinische ameisensaure Kupferoxydul zeigt eine merkwürdige Uebereinstimmung der optischen und magnetischen Schemata und der Grösse des Axenwinkels.

Durch diese Vergleichung des optischen und magnetischen Schema ist nachgewiesen, dass man nicht berechtigt ist, die Wirkung der magnetischen Induction bloss von der axialen Dichte abhängig zu machen. Man wird vielmehr sagen müssen: so wie in homogenen, aber comprimirten Körpern die Induction in der Richtung der grössten Masse zunimmt, so wird auch die axial verschiedene Induction in Krystallen von der axial verschiedenen Lagerung der Grundstoffe abhängen müssen. Natürlich wird dann in jener Richtung sich die grösste magnetische Induction zeigen, in welcher Richtung sich das Element mit grösstem magnetischen Moment gelagert findet.

Wohl hat die allgemeine Physik bisher ausser Acht gelassen, die relative magnetische Inductionsfähigkeit der Grundstoffe, sowie deren Abhängigkeit von der Eigenschaft der Masse selbst, in absolutem Maasse sicher zu stellen; doch glaube ich für meine obige Ansicht ein Beispiel anführen zu können. Bekanntlich ist $SiO_2$ als Quarz stark diamagnetisch; weiters gehört Ẑr der Atomgruppe VI (pag. 165) an, worin das paramagnetische Aluminium auftritt, und daher besitzt Ẑr mit grosser Wahrscheinlichkeit entweder Paramagnetismus oder sehr schwachen Diamagnetismus. Eine Combination von $SiO_2$ und Ẑr, so dass beide Stoffe in einer Ebene zu einander senkrecht gelagert wären, würde sich somit zwischen den Magnetpolen aufgehangen, jedenfalls in der Weise einstellen, dass Ẑr die axiale, $SiO_2$ die äquatoriale Stellung einnehme. Beachtet man hiermit die von mir angegebene Molekularlagerung des Zirkon (pag. 170) $a = b = Si\Theta_3$, $c = 2$ (Ẑr), so ist aus dem eben Gesagten unmittelbar das magnetische Schema $\delta$(ααc) abzuleiten. Hiermit stimmt die directe Beobachtung vollkommen überein, denn nach Plücker und Beer wird die optische Axe des diamagnetischen Zirkon angezogen, was ebenfalls zum Schema $\delta$(ααc) führt.

Diese Beziehung der magnetischen Induction zu der molekularen Lagerung spricht sich auch durch die Uebereinstimmung der magnetischen Orientirung bei isomorphen Körpern aus. So haben schon Grailich und Lang [2]) nachgewiesen, alle isomorphen prismatischen Körper, so

---

[1]) Schrauf. Sitzungsber. der Wien. Acad. vol. 42, 145.

[2]) Grailich und Lang. Sitzungsber. der Wien. Acad. vol. 33. pag. 439.

weit sie bisher untersucht wurden, das gleiche magnetische Schema unabhängig von den Vorzeichen *π* oder *δ* zukommt. So haben Arragonit und Salpeter das gleiche Schema $\delta$(cba), ferner die isomorphen Gruppen

$$\begin{array}{lll} Mg\,Cl_2 + 2Cd\,Cl_2 + 12H_2O & \{ab\underline{c}\} & \delta\,(bac) \\ Ni\,Cl_2 + 2Cd\,Cl_2 + 12H_2O & \{ab\underline{c}\} & \delta\,(bac) \\ Co\,Cl_2 + 2Cd\,Cl_2 + 12H_2O & \{ab\underline{c}\} & \pi\,(bac) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{lll} Mg\,O\,SO_3 + 7H_2O & \{cb\underline{a}\} & \delta\,(bac) \\ Zn\,O\,SO_3 + 7H_2O & \{cb\underline{a}\} & \pi\,(bac) \\ Ni\,O\,SO_3 + 7H_2O & \{cb\underline{a}\} & \pi\,(bac) \end{array}$$

Man erkennt durch diesen Vergleich die Richtigkeit des obigen Gesetzes der gleichen magnetischen Orientirung für isomorphe Körper. Gleichzeitig liefern diese Beispiele auch den Beweis, dass der dia- oder paramagnetische Charakter der ganzen Verbindung von dem relativen magnetischen Vermögen eines der eintretenden Bestandtheile bedingt ist und mit letzterem variirt. Ebenso lässt sich diese Vergleichung als ein Beweis für die von mir aufgestellte Abhängigkeit von der Molekularlagerung benützen.

Dass eine solche Beziehung der magnetischen Eigenschaften zu den morphologischen Eigenschaften bestehen müsse, hat auch schon Tyndall erkannt, indem er nachwies, dass die Richtung der Normale auf die pinacoidische Hauptspaltungsfläche oftmals mit der Richtung der kräftigsten magnetischen Wirkung coincidirt. Aus den bisherigen Beobachtungen lassen mehrere Mineralien diese Uebereinstimmung deutlich erkennen. Da die Normale auf der Spaltungsfläche (vergl. pag. 65) die härteste Richtung im Krystall ist, und auch schon früher nachgewiesen ward, dass die Spaltungsrichtungen meist zu den Richtungen der kleinsten oder grössten Dichten (pag. 306) senkrecht sind, so steht auch dieser Satz mit der molekularen Bildung der Krystalle in keinem Gegensatze.

Findet durch die vorhergehenden Untersuchungen die Abhängigkeit der magnetischen Induction von der Masse und der axial verschiedenen Lagerung derselben im Grundmolekül[1]) ihre Bestätigung, so muss man die weitere Untersuchung aufnehmen, ob nicht die thermische und elektrische Orientirung ebenfalls in einer bestimmten Beziehung zu den magnetischen Erscheinungen steht.

---

[1]) Da die Theorie des magnetischen Potentials sich meist nur auf die Betrachtung der oberflächlichen Ladung beschränkt, ohne der Substanz des Körpers und deren Eigenschaften eine Berücksichtigung zu schenken, so habe ich aus derselben im vorhergehenden auch nur einzelne Sätze mitgetheilt.

Für das Verhalten der Krystallscheiben zwischen elektrischen Polen (vergl. pag. 394) hat nun schon Knoblauch (l. c.) darauf auch hingewiesen, dass die diamagnetischen Krystalle eine gleiche axiale Lagerung zwischen dem Magnetpole und den Polen der elektrischen Säule annehmen, dass hingegen die paramagnetische Substanz zwischen beiden Polen sich entgegengesetzt einstellen. So entspricht beispielsweise eine axiale Lage eines paramagnetischen Körpers zwischen den Magnetpolen einer äquatorialen Lage zwischen den elektrischen Polen.

Als Beispiel hierfür kann man die magnetischen und elektrischen η(abc) Schema gegenüberstellen von

| | | |
|---|---|---|
| Turmalin | π (aac) | η (cca) |
| Beryll .. | π (aac) | η (cca) |
| Calcit .. | δ (cca) | η (aac) |

Diese Vergleichung führt unmittelbar zu dem Gesetze, dass für die bisher beobachteten Krystalle die Maximum der elektrischen Wirkung mit der Richtung der Minimum der magnetischen Induction zusammenfallen. Dieses Gesetz findet vielleicht seine Erklärung in dem durch Beetz [1]) an Eisen bestätigten Gesetze, dass der elektrische Leitungswiderstand durch die magnetische Induction vergrössert, somit die Leitungsfähigkeit vermindert wird. Analog diesem müsste man annehmen, dass das molekulare Inductionsvermögen für Magnetismus jenem elektrischen Leitungsvermögen verkehrt proportionirt sein müsse. In diesem Falle würde sich auch das elektrische Schema auf die molekulare Constitution zurückführen lassen.

Schliesslich verdient bemerkt zu werden, dass keine Uebereinstimmung zwischen dem thermischen und magnetischen Schema besteht.

---

Wir haben durch die vorhergehenden Zeilen versucht, die noch am vollständigsten untersuchte magnetische Orientirung in ihren Beziehungen zu den morphologischen Eigenschaften zu erörtern. Während bei der optischen Orientirung wenigstens in erster Annäherung gelang, eine solche Beziehung selbst durch Zahlen sicher zu stellen, fehlen für letztere die absoluten Zahlenbestimmungen. Vergleicht man als einfaches Beispiel die verschiedenen Schemata von

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Turmalin | $\underline{a}$ | τ (cca) | T (aac) | η (cca) | π (aac) |
| Beryll .. | $\underline{a}$ | τ (cca) | T (cca) | η (cca) | π (aac) |
| Calcit .. | $\underline{a}$ | τ (cca) | T (cca) | η (aac) | δ (cca) |

[1]) Beetz. Pogg. Ann. vol. 128. pag. 193.

so sieht man, dass keine der hierdurch angezeigten orientirten Eigenschaften mit den übrigen übereinstimmt. Und doch müssen alle diese axial variirenden Phänomene Functionen der verschiedenen im Molekül auftretenden Grundstoffe und der denselben eigenthümlichen Eigenschaften sein.

Die Krystallphysik hat mit der Erkenntniss dieser Beziehungen ihre Aufgabe theilweise gelöst, ja sie hat selbst in jenem Falle, wo die allgemeine Physik die Eigenschaften der Grundstoffe ermittelt hatte, diese Beziehung schon annähernd in Zahlen festgestellt.

Muss unter solchen Verhältnissen nicht nothwendig die Krystallphysik die Frage aufwerfen: welche Functionen der materiellen Beschaffenheit der Grundstoffe sind deren thermische, magnetische und elektrische Eigenschaften? Die Beantwortung dieser Frage liegt ausserhalb der Grenze der Krystallphysik und wird kaum durch eine glänzende Behandlung des Potentials, sondern nur durch die Bestimmung absoluter Zahlenwerthe möglich sein.

# Verzeichniss

**der im vorliegenden Bande wiederholt gebrauchten Bezeichnungen.**

---

## I. Abtheilung.

$M$ Masse, $V$ Volum, $D$ Dichte, $A$ chemisches Aequivalent, $S$ specifisches Gewicht.

$Sp.\ V$ specifisches oder Atomvolumen, $Kr.\ V$ Krystallvolumen.

$M$ Elasticitätsmodulus.

$H$ Härte.

## II. Abtheilung.

$v$ Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes, $\lambda$ die Wellenlänge, $\tau$ Vibrationsdauer, $\mu$ Brechungsexponent, $S$, $s$ die molekulare Amplitude, $C$, $c$ die Weggeschwindigkeit des Moleküls.

$\lambda_A\ \lambda_B \ldots \lambda_H$ die Wellenlängen bezüglich der Fraunhofer'schen Linien im Sonnenspectrum.

$\mathfrak{x}\ \mathfrak{y}\ \mathfrak{z}$ die Winkel der Vibrationsrichtung zu den Coordinaten $XYZ$.

$\Delta$ und $\Theta$ die Phasendifferenz zweier Strahlen.

$I$ die Intensität.

$A^\circ$ der brechende Winkel des Prisma, $D^\circ$ die Deviation des gebrochenen Strahles.

$i$ Incidenzwinkel, $r$ Brechungswinkel.

$A$ der Couchy'sche Refractions-, $B$ der Couchy'sche Dispersionscoefficient.

$\mathfrak{R}$ der molekulare Refractions-, $\mathfrak{D}^2$ der molekulare Dispersionscoefficient.

$\mu_a\ \mu_b\ \mu_c$ die Brechungsexponenten entsprechend den Vibrationen parallel der betreffenden Krystallaxe.

$\mu_\rho\ \mu_{\beta\lambda}$ die Brechungsexponenten entsprechend den Farben roth und blau.

$\mu_A\ \mu_B \ldots \mu_H$ die Brechungsexponenten bezogen auf die Fraunhofer'schen Linien im Sonnenspectrum.

$\alpha > \beta > \gamma$ die drei Hauptbrechungsexponenten.

$J^{\circ}$ Incidenzwinkel, $L^{\circ}$ Reflexionswinkel, $R^{\circ}$ Refractionswinkel.

$J_p$, $L_p$, $R_p$ die Phasen des parallel der Einfallsebene, $J_s$, $L_s$, $R_s$ die des senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Lichtstrahles.

$p_i^{\circ}$, $p_L^{\circ}$, $p_r^{\circ}$ die Winkel der Schwingungsrichtung der einfallenden, reflectirten und gebrochenen Phase zur Einfallsebene.

$V$ Volumen, $D$ Dichte, $m$ Masse, $P$ chemisches Atomgewicht.

$ZG$ „optische Atomzahl", Product aus Zahl und Grösse der Atome.

$X_v$ die lichtverzögernden molekularen Kräfte.

$M$ Newton'sches Refractionsvermögen, $N$ Dispersionsvermögen.

$\mathfrak{M}$ Newton'sches Refractionsäquivalent, $\mathfrak{N}$ Dispersionsäquivalent.

## III. Abtheilung.

$\mathfrak{a} > \mathfrak{b} > \mathfrak{c}$ die drei optischen Elasticitätsaxen.

$VV_1^{\circ}$ der innere Winkel der beiden optischen Wellenaxen.

$N$ Einfallsloth, die Normale auf die Trennungsfläche zweier Medien und $HKL$ die Cosinusse der Winkel von derselben zu den Coordinaten.

$W$ die Wellennormale und $ABC$ die Winkel (oder Cosinusse derselben) derselben zu den Coordinaten.

$\psi^{\circ}$ $\psi_1^{\circ}$ die Winkel der Wellennormale zu den optischen Axen.

$\varphi^{\circ}$ $\varphi_1^{\circ}$ die Winkel der Vibrationsrichtung zu den optischen Axen.

$\mathfrak{x}^{\circ}$ $\mathfrak{y}^{\circ}$ $\mathfrak{z}^{\circ}$ die Winkel der Vibrationsrichtung zu den Coordinaten.

$\mathfrak{r}_1$ $\mathfrak{r}_2$ die Werthe der Welle, $\mathfrak{s}_1$ $\mathfrak{s}_2$ die Werthe der Strahlen.

$\underline{\mathfrak{a}}$ $\underline{\mathfrak{c}}$ die Elasticitätsaxe, welche mit der ersten Mittellinie eines negativen oder positiven Krystalls zusammenfällt.

$(\omega = \omega) \gtrless \varepsilon$ die Brechungsexponenten eines einaxigen Krystalls.

$\mathfrak{R}$ Winkel zwischen Strahl und Wellennormale.

$\varphi_i$ Winkel der Oeffnung der inneren, $\varphi_e$ der äusseren konischen Refraction.

$\Psi$ $\Psi'$ Winkel des Einfallslothes zu optischen Axen.

$2\varDelta^{\circ}$ Winkel der Ebenen von den optischen Axen zum Einfallsloth und $2\mathfrak{d}$ zu Wellennormalen.

$\Pi$ Winkel der Einfallsebene zu der den Winkel $2\varDelta$ halbirenden Ebene.

$\mathfrak{p}$ Winkel der Schwingungsebene zur Einfallsebene.

$r_s$ Brechungswinkel des Strahles, $r$ Brechungswinkel der Welle.

$\mathfrak{E}$ Ellipticitätsfactor bezüglich der Circularpolarisation.

$X_t$ $Y_t$ $Z_t$ die wahren Elasticitätsaxen in klinischen Krystallen und $\mathfrak{a}_t > \mathfrak{b}_t > \mathfrak{c}_t$ deren Werthe und $\xi\eta\zeta$ deren Neigungswinkel.

$X_S$ $Y_S$ $Z_S$ die conjugirten, orthogonalen Hauptschwingungsaxen in klinischen Krystallen und $\mathfrak{a}_S > \mathfrak{b}_S > \mathfrak{c}_S$ deren Werthe.

$\mathfrak{S}^{\circ}$ Winkel zwischen einer Hauptschwingungs- und der entsprechenden wahren Elasticitätsaxe.

d Dicke einer vom Lichte durchlaufenen Schichte.

$D_\alpha$ $D_\beta$ $D_\gamma$ die axiale Dichte eines Krystalls.
$EE'$ der Winkel der beiden scheinbaren optischen Axen.

## IV. Abtheilung.

$T$ Temperatur, $W$ specifische Wärme, $A$ chemisches Aequivalent.
$l$ linearer Ausdehnungs-, $k$ kubischer Ausdehnungscoefficient.
d Dicke einer Platte, $V$ Volumen.
$K$ wahre Leitungsfähigkeit, $h$ Strahlungsvermögen für Wärme.
$c$ Weber'sche Inductionsconstante.
$K$ elektrischer Leitungsfähigkeitscoefficient.
$J$ Stromstärke, $E$ elektromotorische Kraft, $W$ Widerstand.
$\mathfrak{K}$ magnetische Inductionsconstante.
$\mathfrak{a}_\pi$ $\mathfrak{b}_\pi$ $\mathfrak{c}_\pi$ die axiale magnetische Inductionsgrösse.
$\Theta$ Oscillationsdauer.

## V. Vergleichende Schemata für die Orientirung der physikalischen Eigenschaften nach den Krystallaxen.

$(a > b > c)$ die Parameter eines orthogonalen Krystalls, den Richtungen dieser Reihenfolge entspricht etwa
$\{\mathfrak{b}\mathfrak{a}\underline{\mathfrak{c}}\}$ oder $\{\mathfrak{c}\mathfrak{b}\underline{\mathfrak{a}}\}$ als Schema der optischen Elasticitätsaxen, worin $\underline{\mathfrak{c}}$ oder $\underline{\mathfrak{a}}$ die Bissectrix von $VV'$ angibt.
$\tau$ $(\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{b})$ das Schema der axialen Ausdehnung durch die Wärme, hierin bedeutet $\underline{\mathfrak{c}}$ eine Contraction.
$T$ $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})$ das Schema der Ausbreitung einer gleichen Temperatur.
$E$ $(\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{c})$ das Schema der axialen Ausbreitung der Elektricität.
$\eta$ $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})$ das Schema der axial ungleichen Einwirkung der elektrischen Richtkraft.
$\varkappa$ $(\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{c})$ Schema des axial ungleichen Paramagnetismus.
$\delta$ $(\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{c})$ Schema des axial ungleichen Diamagnetismus.
$H(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})$ Schema der nach den drei Dimensionen ungleichen Härte.

Für monoklinische Krystalle, für welche $\sphericalangle\,(100)\,(001) \gtreqless 90^0$ ist $\{(100)\mathfrak{b}\underline{\mathfrak{a}}\} = 15^0$ oder $\{(100)\mathfrak{c}\underline{\mathfrak{a}}\} = -22^0$ das Schema der Orientirung der optischen Hauptschwingungsaxen in der Zone der Symmetrie. Die Schemata der übrigen physikalischen Erscheinungen für monoklinische Krystalle sind analog.

# Inhaltsverzeichniss.

## I. Abtheilung.

### Die allgemeinen Eigenschaften der Materie.



## II. Abtheilung.

### Die optischen Eigenschaften der Körper im Allgemeinen.

